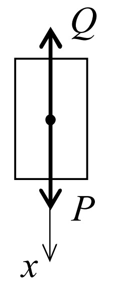
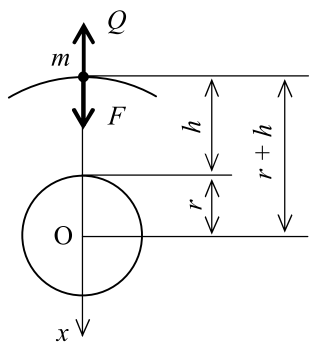
Курс: «Застосування диференціальних рівнянь для розв'язання проблем природознавства» **ст. викл. Рего В. Л.**
До Модулів 1, 2
Лекція №7:

Деякі задачі небесної механіки

Задача про невагомість. Людина вагою P перебуває в кабіні пасажирського ліфта, що рухається вниз із прискоренням $\omega = \alpha g$, де $0 < \alpha < 1$, а g – прискорення сили тяжіння. Визначити тиск людини на дно кабіни, а також прискорення ліфта, при якому цей тиск відсутній.



Мал. 7.1



Мал. 7.2

На людину в ліфті діють дві сили: вага людини P і сила реакції дна кабіни ліфта Q, рівна тиску людини на дно кабіни (мал. 7.1). Диференціальне рівняння руху людини запишеться у вигляді

$$m\ddot{x} = P - Q. \tag{7.1}$$

Оскільки $\omega = \alpha g$, $m = P / g$, то з рівняння (7.1) отримаємо

$$Q = P - m\ddot{x} = P(1 - \alpha). \tag{7.2}$$

Беручи до уваги, що $0 < \alpha < 1$, робимо висновок, що $Q < P$. Отже, тиск людини на дно кабіни ліфта, що рухається вниз, дається силою $Q = P(1 - \alpha)$.

Очевидно, що коли кабіна ліфта підійматиметься вгору з прискоренням $\omega = \alpha g$, $0 < \alpha < 1$, то тиск людини на дно кабіни визначатиметься силою $Q = P(1 + \alpha)$, тобто в цьому випадку $Q > P$.

З'ясуємо, при якому прискоренні ліфта тиск людини на дно кабіни відсутній. Для цього достатньо в (7.2) покласти $Q = 0$. Тоді буде $\alpha = 1$, тобто для того, щоб тиск був рівним нулеві, прискорення ліфта повинне дорівнювати приско-ренню сили тяжіння. Отже, за вільного падіння ліфта із прискоренням сили тяжіння g тиск людини на дно кабіни відсутній. Саме цей стан називається *станом невагомості*. За невагомості відсутній взаємний тиск частин тіла людини, що викликає у неї незвичні відчуття. У стані невагомості всі точки тіла мають рівні прискорення.

Задача про штучний супутник. Якою повинна бути швидкість космічного корабля, що обертається навколо Землі як штучний супутник, аби людина знаходилася в кабіні корабля у стані невагомості?

Припустимо, що космічний корабель рухається по круговій орбіті радіусу $r+h$, де r – радіус Землі, h – висота польоту корабля над поверхнею Землі (мал. 7.2). Із попередньої задачі випливає, що у стані невагомості тиск на дно кабіни космічного корабля, а отже, і реакція Q дна кабіни рівні нулю.
Спрямуємо вісь x уздовж головної нормалі кругової траєкторії космічного корабля. У проєкції на головну нормаль диференціальне рівняння руху матеріальної точки маси m за використання формули доцентрової сили має вигляд

$$\frac{mv^2}{R} = F = m\ddot{x},$$

де $R = r + h$, оскільки сила F напрямлена по головній нормалі до траєкторії руху.
Звідси одержимо диференціальне рівняння

$$\ddot{x} = \frac{v^2}{r+h}.$$

Тоді з (7.1), підставивши значення $\ddot{x}$ із останньої рівності, маємо:

$$\frac{mv^2}{r+h} = P - Q. \qquad (7.3)$$

Тут сила P рівна силі F тяжіння до Землі, яка у відповідності до закону всесвітнього тяжіння обернено пропорційна квадрату відстані $r+h$ до центру Землі, тобто

$$F = \frac{km}{(r+h)^2},$$

де m – маса космічного корабля, а значення константи k можна визначити з попередньої формули, враховуючи, що на поверхні Землі (тобто при $h = 0$) сила тяжіння $F = mg$. Тоді отримаємо $k = gr^2$, а отже,

$$P = F = \frac{mgr^2}{(r+h)^2}.$$

Підклавши отримане значення P у (7.3) і взявши до уваги, що $Q = 0$, визначаємо формулу для швидкості, що вимагається в задачі:

$$v = r\sqrt{\frac{g}{r+h}}. \qquad (7.4)$$

Зауважимо, що при $h = 0$ з (7.4) одержуємо формулу $v_1 = \sqrt{gr}$ *першої космічної швидкості*, тобто найменшої швидкості, яку, нехтуючи опором повітря та обертанням планети, необхідно надати тілу для переміщення його на кругову орбіту, радіус якої рівний радіусу планети r. Наприклад, для Землі перша космічна швидкість рівна 7,9 км/с.

Задача про характеристичну швидкість. Формула Ціолковського. Принцип руху ракети полягає у її відштовхуванні від маси реактивного струменя, що утворюється від згоряння палива в ракеті й витікає з її двигунів.
Такий принцип руху властивий багатьом літальним апаратам. Наприклад, турбореактивний літак вбирає повітря (зі збільшенням своєї маси) для спалювання палива, і викидає з великою швидкістю (зі зменшенням своєї маси) утворені при

спалюванні гази. Прискорення, яке отримує тіло з урахуванням зміни його маси в процесі руху, описується *рівнянням Мещерського*[1]

$$m\frac{dv}{dt} = F - u_1\frac{dm_1}{dt} - u_2\frac{dm_2}{dt}, \tag{7.5}$$

де $m(t)$ – маса тіла в момент часу t, $v(t)$ – його швидкість, F – зовнішня сила (наприклад, сила тяжіння), m_1 – маса, відкинута з відносною швидкістю u_1, m_2 – маса, приєднана з відносною швидкістю u_2. Величина $-u_1\,dm_1/dt - u_2\,dm_2/dt$ називається *реактивною силою*.

У випадку ракети (маса якої в процесі руху виключно зменшується) за відсутності зовнішніх сил рівняння (7.5) можна записати у вигляді

$$m\frac{dv}{dt} + u\frac{dm}{dt} = 0, \tag{7.6}$$

де $m(t)$ – маса ракети в момент часу t, $v(t)$ – її швидкість, u – відносна швидкість, із якою рухається відокремлювана від ракети частина її маси (для ракетного двигуна ця величина називається *питомим імпульсом* і визначається як відношення тяги двигуна до секундної витрати маси палива).

Знайдемо кінцеву швидкість ракети, яку вона розвине після згоряння всієї маси палива. Нехай M_1 – початкова маса ракети (конструкція апарата плюс корисне навантаження плюс паливо), а M_2 – її кінцева маса (без палива). Розв'язавши задачу Коші для рівняння (7.6) із початковою умовою $v(M_1) = 0$ (початкова швидкість рівна нулеві), одержимо формулу, що описує залежність швидкості від маси:

$$v = u\ln\frac{M_1}{m}.$$

Підклавши в останню формулу значення $m = M_2$, дістанемо шукану кінцеву швидкість ракети

$$V = u\ln\frac{M_1}{M_2}. \tag{7.7}$$

Формула (7.7) називається *формулою Ціолковського* (виведена К. Е. Ціолковським[2] у рукопису «Ракета» в 1897 р.) і визначає швидкість, яку розвиває літальний апарат під дією тяги ракетного двигуна, незмінної за напрямом, за відсутності інших сил. Ця швидкість називається *характеристичною швидкістю*.

Одноступенева ракета практично неспроможна розвивати швидкість, більшу за 8 км/с, яка необхідна для космічного польоту. К. Е. Ціолковський запропонував створити «ракетний потяг»: багатоступінчасту ракету, що складається з кількох ступенів – ракет, розміщених одна за одною, причому що далі вниз, то більші баки з паливом, і потужніші двигуни. Ракети виконують роль «локомотива» по черзі – розганяють «потяг», після чого відокремлюються. Остання ракета такого «потяга» може набувати величезної швидкості.

Для багатоступінчастої ракети швидкість розраховують як суму швидкостей, отриманих за формулою (7.7), для кожного ступеня, причому за розрахунку

---

[1] Іван Мещерський (1859-1935) – російський і радянський учений в області теоретичної та прикладної механіки, механіки руху тіл змінної маси. Один із піонерів теоретичного обґрунтування польотів у космос.

[2] Костянтин Ціолковський (1857-1935) – російський учений-теоретик польського походження, один із заснов-ників ракетобудування та сучасної космонавтики.

характеристичної швидкості кожного ступеня до її початкової й кінцевої маси додається сумарна початкова маса всіх наступних ступенів. Нехай N – число ступенів ракети; M_0 – маса корисного навантаження; M_{1i} –маса заправленого *i*-го ступеня; M_{2i} – маса *i*-го ступеня без палива; u_i – питомий імпульс двигуна *i*-го ступеня. Тоді формула Ціолковського для багатоступінчастої ракети матиме вигляд:

$$V = \sum_{i=1}^{N} u_i \ln \frac{M_0 + \sum_{j=i}^{N} M_{1j}}{M_0 + M_{2i} - M_{1i} + \sum_{j=i+1}^{N} M_{1j}}.$$

Джерела:

Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. – М.: «Наука», 1987. – С. 59-68.