

Задачі теорії теплопровідності

Теплопровідність – властивість тіл, яка полягає в передачі енергії від більш нагрітих тіл до менш нагрітих.

Процес теплопередачі відбувається між тілами, які мають різну температуру. У замкнутій системі всі тіла з часом набувають однакової температури, тобто встановлюється *теплова рівновага*.

Енергія, яку тіло отримує чи втрачає в процесі теплопередачі, називається *кількістю тепла* (позначається Q , вимірюється в джоулях). Кількість тепла, передана тілу в процесі нагрівання, залежить від матеріалу тіла, маси тіла та зміни його температури. Щоб розрахувати кількість тепла, необхідну для нагрівання тіла, треба масу тіла помножити на питому теплоємність і на величину зміни температури:

$$Q = cm(T_2 - T_1), \quad (5.1)$$

де T_2 – температура у кінцевий, T_1 – у початковий момент часу.

Питома теплоємність показує, яка кількість тепла необхідна для нагрівання тіла маси 1 кг на 1°C ; позначається c , вимірюється у Дж/(кг·К). Питома теплоємність є табличною величиною. Питома теплоємність речовин у різних агрегатних станах (твердому, рідкому, газоподібному) є різною.

Якщо в теплообміні беруть участь кілька тіл, то кількість тепла, яку віддають більш нагріті тіла, повинна дорівнювати кількості тепла, отриманій менш нагрітими тілами. Це твердження називається *рівнянням теплового балансу*. Зауважимо, що коли тіло віддає тепло (охолоджується), то при складанні теплового балансу величина Q в формулі (5.1) береться зі знаком мінус.

Для розв'язування найпростіших задач теорії теплопровідності, окрім рівняння теплового балансу, використовують наступні фізичні закони.

1. Закон випромінювання тепла. Швидкість нагрівання (охолодження) тіла прямо пропорційна різниці температур тіла і довкілля:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_0), \quad (5.2)$$

де $T(t)$ – температура тіла, $T_0(t)$ – температура довкілля в момент часу t , k – сталий коефіцієнт пропорційності (додатний у випадку нагрівання, від'ємний за охолодження).

2. Закон Фур'є для кількості тепла. Кількість тепла, яка пройде через поверхню ds у напрямі вектора зовнішньої нормалі \vec{n} за проміжок часу dt , рівна

$$Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} ds dt, \quad (5.3)$$

де λ – коефіцієнт теплопровідності, який визначає енергію, що переноситься через одиницю площі 1 м^2 товщини 1 м за одиницю часу при зміні температури на один градус; вимірюється у $\text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$.

На підставі закону (5.3) виводяться математичні моделі складніших процесів поширення тепла, які описуються рівняннями з частинними похідними і вивчаються в теорії рівнянь математичної фізики. Проте в деяких частинних випадках змоделювати процес теплопровідності вдається і за допомогою звичайних диференціальних рівнянь, зокрема у випадку *стаціонарного теплового потоку*, коли температура тіла в кожній точці не змінюється з часом. При розв'язуванні задач, пов'язаних із впливом теплових потоків, важливу роль відіграють так звані *ізотермічні поверхні* (поверхні, в кожній точці яких температура має однакове значення). Зауважимо, що загалом ізотермічні поверхні можуть набувати найрізноманітнішого вигляду, що пов'язано з нестационарністю теплового потоку і неоднорідністю матеріалу.

Закон Фур'є (5.3) у випадку стаціонарного теплового потоку можна сформулювати наступним чином: кількість тепла, випромінювана за одиницю часу тілом, яке перебуває в незмінному тепловому стані, і температура якого в кожній точці є функцією лише однієї координати x , обчислюється згідно з формулою

$$Q = -\lambda S(x) \frac{dT}{dx} = \text{const}, \quad (5.4)$$

де $S(x)$ – площа перерізу, перпендикулярного до напрямку поширення тепла.

Приклад 5.1. Тіло охолело за 10 хв від 100°C до 60°C . Температура навколишнього повітря підтримується рівною 20°C . Коли тіло охолоне до 25°C ?

Розв'язання. Скориставшись законом випромінювання тепла (5.2), одержимо математичну модель задачі у вигляді

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 20), \quad T(0) = 100, \quad T(10) = 60.$$

Зінтегрувавши рівняння шляхом відокремлення змінних, дістанемо загальний розв'язок

$$T(t) = C e^{kt} + 20,$$

де C – стала інтегрування. Із першої крайової умови визначаємо $C = 80$, тоді

$$T(t) = 80 e^{kt} + 20.$$

Невідомий коефіцієнт k визначаємо з другої крайової умови при $t = 10$:

$$60 = 80 e^{10k} + 20 \Rightarrow e^{10k} = \frac{1}{2} \Rightarrow k = -\frac{1}{10} \ln 2.$$

Звідси закон зміни температури тіла

$$T(t) = 80 e^{-0,1t \ln 2} + 20 = 80 \cdot 2^{-0,1t} + 20.$$

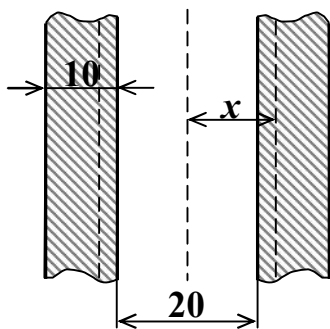
Знайдемо тепер той момент часу t_0 , для якого $T(t_0) = 25$:

$$25 = 80 \cdot 2^{-0,1t_0} + 20 \Rightarrow 2^{-0,1t_0} = \frac{1}{16} \Rightarrow t_0 = 40 \text{ хв.}$$

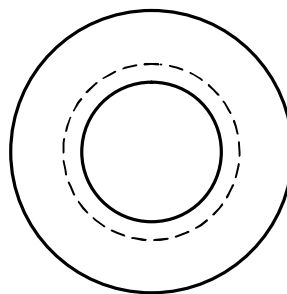
Приклад 5.2. Теплопровідна труба діаметру 20 см зроблена з однорідного матеріалу, і захищена покриттям із магnezії товщиною 10 см. Припустимо, що температура труби 160°C , а зовнішнє покриття має температуру 30°C . Вивести закон розподілу

температури всередині покриття, і знайти кількість тепла, виділену трубою на ділянці 1 м протягом доби, якщо коефіцієнт теплопровідності $\lambda = 1,7 \cdot 10^{-4}$ Вт/(см·К).

Розв'язання. На мал. 5.1 і 5.2 зображена труба відповідно в поздовжньому та поперечному перерізі. З умови задачі очевидно, що температура в кожній точці покриття залежить тільки від відстані x цієї точки від центральної осі труби (мал. 5.1). Тому в даному випадку *ізотермічними кривими* будуть концентричні кола (пунктирна лінія на мал. 5.2), а ізотермічними поверхнями – відповідні циліндричні поверхні.



Мал. 5.1



Мал. 5.2

Скористаємося законом Фур'є для випадку стаціонарного теплового потоку (5.4). Урахувавши, що згідно з умовами задачі $S(x) = 2\pi x l$, де l – довжина труби в сантиметрах, а x – радіус основи циліндричної поверхні, що міститься всередині зовнішнього циліндра, для розподілу температури всередині покриття $T(x)$ одержимо наступну задачу:

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{Q}{2\pi x l \lambda} \equiv -\frac{H}{x}, \quad T(10) = 160, \quad T(20) = 30.$$

Загальний розв'язок рівняння

$$T(x) = -H \ln x + C, \quad C = \text{const.}$$

Із крайових умов одержуємо значення невідомих сталих:

$$H = \frac{130}{\ln 2}, \quad C = 160 + \frac{130}{\ln 2} \ln 10.$$

Тоді закон розподілу температури всередині покриття

$$T(x) = 160 + \frac{130}{\ln 2} \ln \frac{10}{x}.$$

Для знаходження кількості тепла, виділеної трубою за одиницю часу 1 с на ділянці $l = 100$ см, використаємо виражене значення константи H :

$$\frac{Q}{2\pi l \lambda} = H \Rightarrow Q = 2\pi \cdot 100 \cdot 0,00017 \cdot \frac{130}{\ln 2} \approx 20,033 \text{ Дж.}$$

Отже, кількість тепла, виділена протягом доби, рівна

$$24 \cdot 60 \cdot 60 Q \approx 1730874 \text{ Дж.}$$

Джерела:

Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. – М.: «Наука», 1987. – С. 9-13.