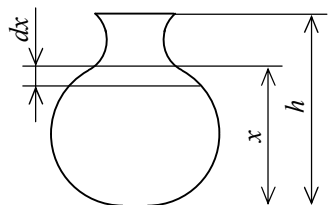


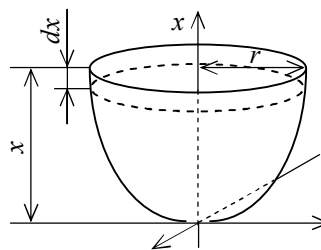
### Витікання рідини з посудин

Переконливу ілюстрацію зв'язку фізичного змісту задачі з геометрією дає дослідження процесів витікання рідини з посудин різної форми.

Розглянемо посудину з отвором у дні (мал. 3.1), площа горизонтального перерізу якої є довільною функцією відстані цього перерізу від дна посудини. Нехай висота рівня рідини в посудині в початковий момент часу  $t = 0$  рівна  $h$  метрів. Позначимо через  $S(x)$  площу перерізу на висоті  $x$ , а через  $s$  – площу отвору, проробленого у дні посудини.



Мал. 3.1



Мал. 3.2

У гідравліці виводиться закон, згідно з яким швидкість витікання рідини  $v$  у той момент часу, коли висота її рівня становить  $x$ , визначається рівністю

$$v = k\sqrt{2gx}, \quad (3.1)$$

де  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$  – прискорення сили тяжіння,  $k$  – коефіцієнт швидкості витікання рідини з отвору (наприклад, для води  $k = 0,6$ ).

На нескінченно малому проміжку часу  $dt$  витікання рідини можна вважати рівномірним, тому за час  $dt$  витече стовпчик рідини, висота якого  $v dt$ , а площа перерізу  $s$ , що в свою чергу призведе до пониження рівня рідини в посудині на  $-dx$ . Із цих міркувань з урахуванням (3.1) отримуємо диференціальне рівняння

$$ks\sqrt{2gx}dt = -S(x)dx,$$

яке після відокремлення змінних можна переписати у вигляді

$$dt = -\frac{S(x)}{ks\sqrt{2gx}}dx. \quad (3.2)$$

Отже, процес витікання рідини з посудини описується рівнянням із відокремленими змінними (3.2), розв'язок якого  $x(t)$  визначає залежність висоти рівня рідини в посудині від часу.

**Приклад 3.1.** Заповнений водою циліндричний резервуар із вертикальною віссю має у дні круглий отвір радіусу  $1/12$  м. Визначити залежність рівня води в резервуарі від часу  $t$ , і захонометрувати час витікання рідини з резервуару по метрах, якщо висота резервуару 6 м, а діаметр його основи 4 м.

**Розв'язання.** Згідно з умовою задачі  $S(x) = 4\pi$ ,  $s = \pi/144$ ,  $k = 0,6$ . Із цими числовими даними рівняння (3.2) набуде вигляду

$$dt = -216,842 \frac{dx}{\sqrt{x}},$$

загальний інтеграл якого дає співвідношення

$$C + t = -433,684\sqrt{x}.$$

Із початкової умови  $x(0) = 6$  маємо  $C = -1062,304$ . Отже, залежність рівня води в резервуарі від часу визначається рівністю

$$1062,304 - t = 433,684\sqrt{x}. \quad (3.3)$$

Визначимо з (3.3) час пониження рівня рідини в резервуарі по метрах:

1)  $x = 5$  м  $\Rightarrow t = 1,543$  хв  $\approx 1$  хв 32 с;

2)  $x = 4$  м  $\Rightarrow t = 3,249$  хв  $\approx 3$  хв 15 с;

3)  $x = 3$  м  $\Rightarrow t = 5,186$  хв  $\approx 5$  хв 11 с;

4)  $x = 2$  м  $\Rightarrow t = 7,483$  хв  $\approx 7$  хв 29 с;

5)  $x = 1$  м  $\Rightarrow t = 10,477$  хв  $\approx 10$  хв 29 с;

6) час повного витікання води:  $x = 0 \Rightarrow t = 17,705$  хв  $\approx 17$  хв 42 с.

Наведений хронометраж ілюструє цікавий факт: час витікання останнього метра стовпа рідини майже рівний часу витікання перших чотирьох метрів.

**Задача про водяний годинник.** Відомо, що стародавній водяний годинник являв собою чашу (мал. 3.2), із якої через невеликий отвір у дні витікала вода. Такі годинники застосовувалися в грецьких і римських судах для хронометрування промов адвокатів, аби не допускати занадто тривалих виступів. У задачі вимагається знайти форму водяного годинника, за якої рівень води в чаші знижувався б зі сталою швидкістю. Для розв'язання задачі скористаємося рівнянням (3.2) у вигляді

$$\sqrt{x} = -\frac{S(x)}{ks\sqrt{2g}} \cdot \frac{dx}{dt}. \quad (3.4)$$

Враховуючи, що чашу можна розглядати як поверхню обертання, із (3.4) з використанням позначень на мал. 3.2 дістанемо

$$\sqrt{x} = -\frac{\pi r^2}{ks\sqrt{2g}} \cdot a,$$

де  $a = v_x = \frac{dx}{dt}$  – проекція швидкості вільної поверхні рідини на вісь  $x$  (стала величина згідно з умовою задачі, причому величина від'ємна, адже рівень рідини знижується). Підносячи ліву і праву частини останньої рівності до квадрату, отримаємо

$$x = Cr^4, \quad (3.5)$$

де  $C = \frac{a^2 \pi^2}{2gk^2 s^2}$ . Отже, шукана форма поверхні водяного годинника отримується обертанням кривої (3.5) навколо осі  $x$ .

### Джерело:

Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. – М.: «Наука», 1987. – С. 18-20.