Курс: «Застосування диференціальних рівнянь для розв'язання проблем природознавства» **ст. викл. Рего В. Л.**
До Модуля 1
Лекція №2:

Основні принципи диференціального моделювання фізичних задач

У фізичних задачах спершу слід вирішити, яку з величин узяти за незалежну змінну, а яку – за шукану функцію. Після цього потрібно визначити, наскільки зміниться шукана функція *y*, коли незалежна змінна *x* отримає приріст Δx, тобто виразити різницю $y(x+\Delta x)-y(x)$ через величини, про які говориться в задачі. Поділивши цю різницю на Δx, після переходу до границі при $\Delta x \to 0$ одержимо диференціальне рівняння, з якого можна знайти шукану функцію. У більшості задач подаються умови, за допомогою яких можна визначити значення сталих, що входять у загальний розв'язок диференціального рівняння.
Іноді диференціальне рівняння можна скласти простішим шляхом, скориставшись ***фізичним змістом похідної***: якщо незалежною змінною є час *t*, то dy/dt є швидкість зміни величини *y*.
У багатьох задачах диференціальне рівняння безпосередньо отримується з відповідних фізичних законів, або будується на їх підставі. Такі задачі будуть розглядатися в наступних розділах. У даному розділі обмежимося задачами на перетікання рідин і газів та подібними до них задачами, у яких диференціальні моделі отримуються шляхом визначення приросту шуканої функції $y(x+\Delta x)-y(x)$, як описано вище.

Приклад 2.1. У посудину, що містить 10 л води, безперервно зі швидкістю 2 л за хвилину вливається розчин, у кожному літрі якого міститься 0,3 кг солі. Розчин, що вливається в посудину, перемішується з водою, і суміш витікає з посудини з тією ж швидкістю. Скільки солі буде в посудині через 5 хвилин?
Розв'язання. Візьмемо за незалежну змінну час *t*, а за шукану функцію $y(t)$ – кількість солі в посудині через *t* хвилин після початку досліду. Знайдемо, наскільки зміниться кількість солі за проміжок часу від моменту *t* до моменту $t+\Delta t$. За одну хвилину вливається 2 л розчину, а за Δt хвилин – $2\Delta t$ літрів; у цих $2\Delta t$ літрах міститься $0{,}3\cdot 2\Delta t = 0{,}6\Delta t$ кг солі. З іншого боку, за час Δt з посудини витікає $2\Delta t$ літри розчину. У момент *t* у всій посудині (10 л) міститься $y(t)$ кг солі, отже, у $2\Delta t$ літрах суміші, що витікає, містилося б $0{,}2\Delta t\cdot y(t)$ кг солі, якби протягом часу Δt вміст солі в посудині не змінювався. Але, оскільки він за цей час змінюється на величину, нескінченно малу при $\Delta t \to 0$, то в $2\Delta t$ літрах суміші, що витікає, міститься $0{,}2\Delta t(y(t)+\alpha)$ кг солі, де $\alpha \to 0$ при $\Delta t \to 0$.
Отже, в розчині, що вливається за проміжок часу $(t, t+\Delta t)$, міститься $0{,}6\Delta t$ кг солі, а в тому, що витікає, відповідно $0{,}2\Delta t(y(t)+\alpha)$ кг. Приріст кількості солі протягом цього часу $y(t+\Delta t)-y(t)$ рівний різниці знайдених величин, тобто

$$y(t+\Delta t)-y(t) = 0{,}6\Delta t - 0{,}2\Delta t\cdot(y(t)+\alpha).$$

Поділимо на Δt й перейдемо до границі, коли $\Delta t \to 0$. У лівій частині отримаємо похідну $y'(t)$, а в правій одержимо $0{,}6 - 0{,}2y(t)$, оскільки $\alpha \to 0$ при $\Delta t \to 0$. Отже, маємо диференціальне рівняння $y'(t) = 0{,}6 - 0{,}2y(t)$. Зінтегрувавши його, дістанемо

$$y(t) = 3 - C\mathrm{e}^{-0{,}2t}. \qquad (2.1)$$

Оскільки при $t = 0$ солі в посудині не було, то $y(0) = 0$. Покладаючи в одержаному загальному розв'язку (2.1) $t = 0$, знаходимо: $y(0) = 3 - C$, $0 = 3 - C$, $C = 3$. Підклавши це значення C в загальний розв'язок (2.1), одержимо $y(t) = 3 - 3\mathrm{e}^{-0{,}2t}$. При $t = 5$ у посудині буде

$$y(5) = 3 - 3\mathrm{e}^{-0{,}2\cdot 5} = 3 - 3\mathrm{e}^{-1} \approx 1{,}9 \text{ кг солі.}$$

Приклад 2.2. Знайти тиск атмосферного повітря на висоті h над поверхнею Землі за припущення, що на поверхні Землі тиск P (мм рт. ст.) і густина повітря S є сталими.
Розв'язання. Візьмемо за незалежну змінну висоту h, а за шукану функцію $p(h)$ – тиск атмосферного повітря на висоті h. Згідно з законом Бойля-Маріотта за ізотермічного процесу добуток тиску газу на його об'єм є величиною сталою. Звідси випливає, що тиск газу змінюється прямо пропорційно його густині, адже й густина, і тиск обернено пропорційні об'єму. Тоді, позначивши густину повітря на висоті h через s, знаходимо

$$\frac{s}{S} = \frac{p(h)}{P} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{Sp}{P}.$$

Відомо, що густина повітря, а отже, і тиск, зменшується зі збільшенням висоти. На висоті $h + \Delta h$ тиск зменшиться на величину $s\Delta h$, що можна записати у вигляді співвідношення

$$p(h + \Delta h) - p(h) = -s\Delta h.$$

Поділимо на Δh і перейдемо до границі, коли $\Delta h \to 0$. У лівій частині отримаємо похідну $p'(h)$, а отже, з урахуванням значення s одержимо диференціальне рівняння

$$\frac{dp}{dh} = \frac{Sp}{P}.$$

Зінтегрувавши його шляхом відокремлення змінних, дістанемо

$$p(h) = C\mathrm{e}^{-\frac{S}{P}h}. \qquad (2.2)$$

Оскільки при $h = 0$ тиск рівний P, то $p(0) = P$. Покладаючи в отриманому загальному розв'язку (2.2) $h = 0$, знаходимо $C = P$. Підклавши це значення C в загальний розв'язок (2.2), одержимо формулу, що виражає залежність тиску від висоти $p = P\mathrm{e}^{-\frac{S}{P}h}$, яка наочно показує, що з ростом висоти тиск атмосферного повітря зменшується.

Джерела:

Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. – Стор. 12-17.
Rontó Miklós, Raisz Péterné. Differenciálegyenletek műszakiaknak. Elméleti összefoglaló 300 kidolgozott feladattal. – Miskolci egyetemi kiadó, 2004. – Стор. 259-260.