

Геометричний зміст похідної. Диференціальні моделі геометричних задач

Похідна – основне поняття диференціального числення, що характеризує швидкість зміни функції. Визначається як границя відношення приросту функції до приросту її аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля (якщо така границя існує):

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}.$$

Похідна також позначається як відношення диференціалів dy/dx , де dy і dx позначають нескінченно малий приріст відповідної змінної.

Функцію, що має скінченну похідну, називають диференційовною (в точці чи на проміжку). Умова неперервності функції в точці $x = a$ є необхідною, але не достатньою умовою диференційовності функції в цій точці.

Похідна функції $y = f(x)$ за змінною x у точці $x = a$ з геометричної точки зору характеризує нахил дотичної лінії до графіка функції $y = f(x)$. Нахил дотичної дуже близький до нахилу лінії, що проходить через точки $M(a, f(a))$ та $N(a + h, f(a + h))$, де h досить мале. Такі лінії називають *січними*. При $h \rightarrow 0$ нахил січної наближається до нахилу *дотичної*. Тому дотична визначається як граничне положення січної MN , коли $N \rightarrow M$, а

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Геометричний зміст похідної. Значення похідної $f'(x_0)$ функції $f(x)$ у точці $x = x_0$ рівне значенню кутового коефіцієнта дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 .

Оскільки кутовий коефіцієнт $k = \operatorname{tg} \alpha$, де α – кут, утворений дотичною з додатним напрямом осі абсцис, то у випадку $f'(x_0) > 0$ кут α – гострий; якщо $f'(x_0) = 0$, то дотична паралельна осі абсцис або співпадає з нею; а у випадку $f'(x_0) < 0$ кут α – тупий.

Рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці $M(x_0, y_0)$ має вигляд

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Нормаллю до кривої $y = f(x)$ у точці $M(x_0, y_0)$ називається пряма, що проходить через точку M перпендикулярно до дотичної в цій точці. Рівняння нормалі:

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0).$$

Піддотичною (піднормаллю) називається проєкція на вісь абсцис відрізка дотичної (нормалі) від точки дотику до перетину з віссю абсцис.

У геометричних задачах зазвичай вимагається знайти рівняння кривих, які мають певну описану в задачі властивість. Щоб розв'язати геометричну задачу, яка зводиться до диференціального рівняння першого порядку, слід побудувати схематичне креслення, позначити шукану криву через $y = y(x)$ (якщо задача вирішується в декартових координатах), і виразити всі згадувані в задачі величини через x , y та y' . Тоді задане в задачі співвідношення перетворюється на диференціальне рівняння, з якого можна визначити шукану функцію $y(x)$.

Приклад 1.1. Знайти криві, які мають наступну властивість: точка перетину будь-якої дотичної з віссю абсцис має абсцису, вдвічі меншу за абсцису точки дотику.

Розв'язання. Побудуємо схематичний графік шуканої кривої, позначивши через $M(x, y)$ точку дотику деякої дотичної до зображеного графіка (мал. 1.1). За умовою задачі точка A має абсцису, вдвічі меншу за абсцису точки M , тобто

$$OB = 2OA. \quad (1.1)$$

Із малюнка очевидно, що $OB = x$, а відрізок OA можна знайти як різницю $OA = OB - AB = x - AB$.

Знайдемо відрізок AB з прямокутного трикутника ABM . Очевидно, що один із катетів цього трикутника $BM = y$. Тоді інший катет (піддотична AB) з урахуванням геометричного змісту похідної рівний

$$AB = \frac{BM}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{y}{y'(x)}.$$

Отже, рівність (1.1) можемо записати у вигляді диференціального рівняння шуканих кривих:

$$x = 2 \left(x - \frac{y}{y'} \right),$$

або після спрощення

$$x = \frac{2y}{y'}.$$

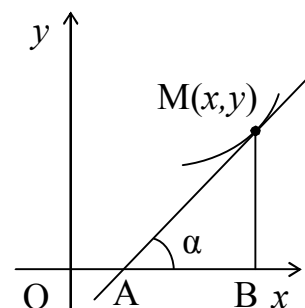
Зінтегрувавши одержане рівняння з відокремленими змінними, дістанемо рівняння сім'ї парабол $y = Cx^2$.

Задача про траєкторії. Одним із важливих застосувань диференціальних рівнянь першого порядку є *задача про траєкторії*, в яких вимагається знайти лінії, які перетинають усі криві заданої сім'ї під однаковим кутом.

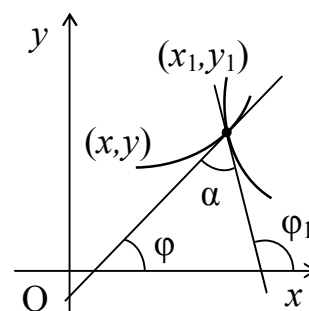
Нехай задана сім'я плоских кривих

$$F(x, y, C) = 0, \quad (1.2)$$

залежна від одного параметра C .



Мал. 1.1



Мал. 1.2

Крива, яка в кожній своїй точці утворює сталий кут α із кривою сім'ї (1.2), що проходить через цю точку, називається *ізогональною траєкторією* цієї сім'ї. Якщо $\alpha = \pi/2$, то маємо *ортогональні траєкторії*.

Знайдемо диференціальні рівняння траєкторій сім'ї (1.1). Для цього позначимо біжучі координати траєкторії (x_1, y_1) , а кривої сім'ї (x, y) (мал. 1.2).

1. Нехай $\alpha \neq \pi/2$, а $\operatorname{tg} \alpha = k$. Тоді в будь-якій точці траєкторії $\varphi_1 - \varphi = \alpha$, де φ_1 – кут нахилу дотичної до траєкторії, а φ – кут нахилу дотичної до відповідної кривої сім'ї. Звідси з урахуванням геометричного змісту похідної маємо:

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi} = \frac{\frac{dy_1}{dx_1} - \frac{dy}{dx}}{1 + \frac{dy_1}{dx_1} \cdot \frac{dy}{dx}} = k. \quad (1.3)$$

Співвідношення (1.3) має силу в будь-якій точці траєкторії, але для сім'ї (1.2) кутовий коефіцієнт dy/dx обчислюється з формули (1.1):

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}, \quad (1.4)$$

тоді в точках траєкторії

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F(x_1, y_1, C)}{\partial x_1}}{\frac{\partial F(x_1, y_1, C)}{\partial y_1}}.$$

Підставивши отримане значення в (1.3), маємо

$$\frac{\frac{dy_1}{dx_1} + \frac{F'_{x_1}}{F'_{y_1}}}{1 - \frac{dy_1}{dx_1} \cdot \frac{F'_{x_1}}{F'_{y_1}}} = k \Rightarrow \frac{F'_y(x_1, y_1, C) \cdot \frac{dy_1}{dx_1} + F'_x(x_1, y_1, C)}{F'_y(x_1, y_1, C) - F'_x(x_1, y_1, C) \cdot \frac{dy_1}{dx_1}} = k. \quad (1.5)$$

У рівність (1.5) входить параметр C , який змінюється в точках траєкторії і характеризує ту криву сім'ї, яку траєкторія перетинає в даній точці. Значення цього параметру одержується з (1.2), якщо покласти $x = x_1$, $y = y_1$:

$$F(x_1, y_1, C) = 0. \quad (1.6)$$

Виключивши параметр C із системи рівнянь (1.5), (1.6), дістанемо диференціальне рівняння ізогональних траєкторій

$$\Phi(x_1, y_1, \frac{dy_1}{dx_1}) = 0.$$

Загальний інтеграл отриманого рівняння є шуканою сім'єю ізогональних траєкторій.

2. Нехай $\alpha = \pi/2$. Тоді для ортогональних траєкторій маємо: $\varphi_1 - \varphi = \pi/2$,

$\operatorname{tg} \varphi_1 = -\operatorname{ctg} \varphi$, $\frac{dy_1}{dx_1} = -\left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1}$. Отже, замість (1.5) із (1.4) дістанемо

$$F'_x(x_1, y_1, C) \cdot \frac{dy_1}{dx_1} - F'_y(x_1, y_1, C) = 0. \quad (1.7)$$

Диференціальне рівняння ортогональних траєкторій одержується шляхом виключення параметра C із системи рівнянь (1.6), (1.7).

Зауважимо, що наведені міркування значно спрощуються, якщо сім'я кривих задана диференціальним рівнянням

$$\Phi_1(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0. \quad (1.8)$$

Поклавши в (1.8) $x = x_1$, $y = y_1$, і визначивши dy/dx із (1.3), отримаємо рівняння поля для ізогональних траєкторій, тобто їх диференціальне рівняння

$$\Phi_1 \left(x_1, y_1, \frac{\frac{dy_1}{dx_1} - k}{k \frac{dy_1}{dx_1} + 1} \right) = 0.$$

У випадку ортогональних траєкторій $\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^{-1}$, звідки рівняння ортогональних траєкторій буде

$$\Phi_1 \left(x_1, y_1, -\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^{-1} \right) = 0.$$

Приклад 1.2. Знайти ортогональні траєкторії до ліній сім'ї

$$y^2 = C e^x + x + 1.$$

Розв'язання. Запишемо систему рівнянь (1.6), (1.7) для даної сім'ї кривих, опустивши заради зручності індекси:

$$\begin{aligned} y^2 - C e^x - x - 1 &= 0, \\ (-C e^x - 1) \cdot \frac{dy}{dx} - 2y &= 0. \end{aligned}$$

Виключивши з останніх двох рівнянь параметр C , отримаємо диференціальне рівняння ортогональних траєкторій

$$2y + (y^2 - x)y' = 0.$$

Це рівняння можна записати у вигляді лінійного неоднорідного рівняння першого порядку відносно невідомої функції $x(y)$:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{2y} - \frac{y}{2},$$

загальний інтеграл якого $3x = C\sqrt{|y|} - y^2$. Зазначимо, що вихідне рівняння має також особливий розв'язок $y = 0$.

На завершення наведемо деякі приклади геометричних задач, які зводяться до диференціальних рівнянь вищих порядків. Це зокрема задачі, де описані властивості шуканих кривих, пов'язані з кривиною і радіусом кривини.

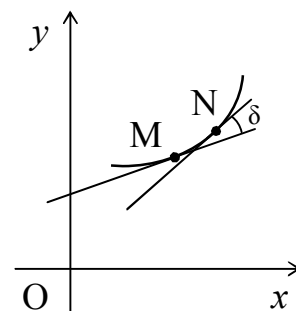
Кривиною K кривої $y = f(x)$ у її точці M називається границя відношення «кута суміжності» δ між додатними напрямками дотичних у точках M і N , коли $\cup MN \rightarrow 0$ (мал. 1.3):

$$K = \lim_{\cup MN \rightarrow 0} \frac{\delta}{\cup MN}.$$

У залежності від знаку цієї границі кривина має знак «+» чи «-».

Знак K вказує на напрям вгнутості кривої: крива випукла при $K < 0$ і вгнута при $K > 0$. Часто кривину вважають додатною величиною, розуміючи під нею абсолютну величину границі.

Радіусом кривини R у точці M називається величина, обернена до кривини: $R = \frac{1}{K}$. Чим більш викривлена крива поблизу даної



Мал. 1.3

точки, тим більша K і менший R у цій точці. Для кола радіусу a $K = \frac{1}{a}$, а радіус кривини $R = a$ (сталі величини для всіх точок). Для прямої $K = 0$, $R = \infty$; для інших кривих кривина змінюється в різних точках.

Якщо крива задана рівнянням $y = y(x)$, то для неї кривина K і радіус кривини R обчислюються згідно з формулами:

$$K = \frac{y''}{\sqrt{(1 + y'^2)^3}}, \quad R = \frac{1}{K} = \frac{\sqrt{(1 + y'^2)^3}}{y''}. \quad (1.9)$$

Приклад 1.3. Довести, що крива, в кожній точці якої кривина має стале значення $K = a$, є колом.

Розв'язання. Згідно з формулами (1.9) диференціальне рівняння шуканої кривої має вигляд

$$\frac{y''}{\sqrt{(1 + y'^2)^3}} = a.$$

Це рівняння другого порядку, що не містить незалежної змінної. Його порядок можна понизити підстановкою $y' = z(x)$. Тоді маємо

$$z' = a\sqrt{(1 + z^2)^3}.$$

Останнє рівняння найпростіше зінтегрувати, ввівши подвійну параметризацію: $z = \operatorname{tg} t$, $z' = a \cos^{-3} t$, звідси $dx = a^{-1} \operatorname{cost} dt$ і $x = a^{-1} \sin t + C_1$. Тоді з першої підстановки $dy = z dx = \operatorname{tg} t \cdot a^{-1} \operatorname{cost} dt = a^{-1} \sin t dt$, а отже, $y = -a^{-1} \operatorname{cost} + C_2$.

Виключивши з виразів для x і y як із алгебраїчної системи параметр t , одержимо загальний інтеграл вихідного диференціального рівняння

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = a^{-2},$$

який являє собою рівняння кола з центром у точці $(C_1; C_2)$ і радіусом a^{-1} . Оскільки $a = K$, то радіус отриманого кола є радіусом кривини в кожній точці.

Джерела:

Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959. – Стор. 135-139.

Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. – Стор. 12-48.