

**ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД  
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ ТА ЦИФРОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ  
Кафедра теорії ймовірностей і математичного аналізу**

«ЗАТВЕРДЖУЮ»  
Декан факультету математики  
та цифрових технологій  
/Микола МАЛІЯР/  
« 27 » / 06 2025 року



**РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ**

**МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ**

Рівень вищої освіти	перший (бакалаврський)
Галузь знань	<b>11 Математика і статистика</b>
Спеціальність	<b>111 Математика</b>
Освітня програма	<b>Комп'ютерна та бізнес-математика</b>
Статус дисципліни	<b>обов'язкова</b>
Мова навчання	<b>українська</b>

**Ужгород 2025**

Робоча програма навчальної дисципліни «**Математичний аналіз функції багатьох змінних**» для здобувачів вищої освіти галузі знань **11 Математика і статистика** спеціальності **111 Математика** освітньої програми **Комп'ютерна та бізнес-математика**.

**Розробники:** Тетяна БОЯРИЩЕВА, канд. фіз.-мат. наук,  
доцент кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу.

Робочу програму розглянуто та затверджено на засіданні кафедри **теорії ймовірностей і математичного аналізу**.

Протокол № 10 від 3 червня 2025 року.

Завідувач кафедри  Ганна СЛИВКА-ТИЛИЩАК

Схвалено науково-методичною комісією **факультету математики та цифрових технологій**.

Протокол № 10 від 26 червня 2025 року.

Голова науково-методичної комісії  Наталія ЮРЧЕНКО

© Боярищева Т. В. 2025 р.

© ДВНЗ «Ужгородський національний університет», 2025 р.

## 1. ОПИС НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Найменування показників	Розподіл годин за навчальним планом
	Денна форма навчання
Кількість кредитів ЄКТС – 15	Рік підготовки:
Загальна кількість годин – 450	<b>2</b>
Кількість модулів – 4	Семестр:
Тижневих годин для денної форми навчання:  аудиторних – 3 семестр: 6,1; 4 семестр: 7,5  самостійної роботи студента – 3 семестр: 6,1; 4 семестр: 7,5	<b>3-4</b>
	Лекції:
	<b>114 год.</b>
	Практичні (семінарські):
	<b>110 год.</b>
Вид підсумкового контролю: семестровий	Лабораторні:
	<b>не передбачено</b>
Форма підсумкового контролю: екзамен	Самостійна робота:
	<b>226 год.</b>

## 2. МЕТА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Метою вивчення навчальної дисципліни «**Математичний аналіз функції багатьох змінних**» є формування теоретичних знань, умінь і практичних навичок розв'язування задач математичного аналізу, теорії функцій багатьох змінних, диференціального та інтегрального числення функції багатьох змінних, теорії рядів Фур'є.

Відповідно до освітньої програми, вивчення дисципліни для здобувачів вищої освіти галузі знань **11 Математика і статистика** спеціальності **111 Математика** освітньої програми **Математика** сприяє формуванню у здобувачів вищої освіти таких компетентностей:

*Загальні компетентності:*

ЗК-01. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.

ЗК-02. Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях.

ЗК-03. Знання й розуміння предметної області та професійної діяльності.

*Професійні (фахові) компетентності:*

ФК-01. Навички обчислень, зокрема усних, тотожних перетворень виразів, вибору раціональних методів і способів обчислень, перетворень, ефективного використання технічних засобів; здатність пояснювати в математичних термінах результати, отримані під час розрахунків.

ФК-02. Здатність здійснювати логічні математичні міркування із чітким зазначенням припущень та висновків.

ФК-03. Здатність до математичного формулювання задач та вибору методів їх розв'язання.

ФК-04. Здатність проводити математичні доведення на базі аксіоматичного підходу, спроможність відрізнити правдоподібні аргументи від формально бездоганних.

ФК-05. Здатність до кількісного мислення.

## 3. ПЕРЕДУМОВИ ДЛЯ ВИВЧЕННЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Передумовами вивчення навчальної дисципліни «**Математичний аналіз функції багатьох змінних**» для здобувачів вищої освіти галузі знань **11 Математика і статистика** спеціальності **111 Математика** освітньої програми **Математика** є опанування таких навчальних дисциплін (НД) освітньої програми (ОП):

ННД 1.05 (ОК 5)      Математичний аналіз функції однієї змінної

ННД 1.07 (ОК 7)      Алгебра

ННД 1.11 (ОК 11)     Аналітична геометрія

## 4. ОЧІКУВАНІ РЕЗУЛЬТАТИ НАВЧАННЯ

Відповідно до освітньої програми «**Математичний аналіз функції багатьох змінних**», вивчення навчальної дисципліни повинно забезпечити досягнення здобувачами вищої освіти галузі знань **11 Математика і статистика** спеціальності **111 Математика** освітньої програми **Математика** таких програмних результатів навчання (ПРН):

Програмні результати навчання	Шифр ПРН
Знати сучасні тенденції в математиці.	ПРН-1
Відтворювати ключові факти з різних складових частин математики,	ПРН-3

принципи <i>modus ponens</i> (правило виведення логічних висловлювань) та <i>modus tollens</i> (доведення від супротивного) і використовувати умови, формулювання, висновки, доведення та наслідки математичних тверджень у різних складових частинах математики; за допомогою графічних та інших засобів пояснювати, аргументувати, ілюструвати, інтерпретувати зміст математичних тверджень.	
Відтворювати базові знання фундаментальних розділів комп'ютерної математики в обсязі, необхідному для володіння математичним апаратом відповідної галузі знань і використання математичних методів у обраній професії.	ПРН-4
Розв'язувати задачі з математичною строгістю та математичними методами, перевіряти умови виконання математичних тверджень, переносити умови та твердження на нові класи об'єктів, знаходити й аналізувати відповідності між поставленою задачею й існуючими моделями.	ПРН-10.
Розв'язувати математичні задачі аналізу даних; застосовувати загальні математичні моделі для специфічних ситуацій; управляти інформацією та переводити її у зручний формат; знання комп'ютерного забезпечення статистичного аналізу даних	ПРН-11

Очікувані результати навчання, які повинні бути досягнуті здобувачами освіти галузі знань **11 Математика і статистика** спеціальності **111 Математика** освітньої програми **Математика** після опанування навчальної дисципліни «**Математичний аналіз функції багатьох змінних**»:

<b>Очікувані результати навчання з дисципліни</b>	<b>Шифр ПРН</b>
Знати теорію диференціального числення функції багатьох змінних та застосування похідних для дослідження плоских і просторових кривих; теорію інтегрального числення функції багатьох змінних (подвійні, потрійні, кратні та криволінійні інтеграли, поверхневі інтеграли); теорію рядів Фур'є.	ПРН-3
Вміння знаходити область визначення функції двох змінних.	ПРН-3
Вміння знаходити частинні похідні першого та вищих порядків явно заданої функції, похідні складених та неявних функцій, повні диференціали першого і другого порядків функції двох аргументів.	ПРН-1
Вміння знаходити безумовні й умовні екстремуми функції, найбільше та найменше значення функції в обмеженій замкненій області.	ПРН-3
Вміння будувати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні	ПРН-3
Вміння обчислювати інтеграли Ейлера, застосовувати їх до розв'язування задач.	ПРН-3
Вміння зводити подвійний, потрійний, криволінійний і поверхневий інтеграл до визначених інтегралів і обчислювати їх.	ПРН-4
Вміння використовувати при обчисленні кратних інтегралів полярні, циліндричні і сферичні координати	ПРН-4
Вміння знаходити похідну за напрямом, градієнт, дивергенцію, ротор.	ПРН-10
Вміння визначати тип векторного поля, знаходити потік, роботу, циркуляцію, потенціал.	ПРН-11
Вміння розвивати функції в ряд Фур'є, знаходити перетворення Фур'є.	ПРН-3

## 5. ЗАСОБИ ДІАГНОСТИКИ ТА КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ НАВЧАННЯ

### Засоби оцінювання та методи демонстрування результатів навчання

Засобами оцінювання та методами демонстрування результатів навчання з навчальної дисципліни є:

- розв'язування задач під час практичних занять;
- індивідуальні домашні завдання;
- 4 модульні контрольні роботи;
- підсумкові семестрові екзамен.

### Форми контролю та критерії оцінювання результатів навчання

Форми поточного контролю: написання та захист студентами індивідуальних домашніх завдань, написання самостійних робіт під час практичних занять. Студент може отримати бали за усні відповіді та доповнення на лекційних та практичних заняттях..

Форма модульного контролю: письмовий.

Форма підсумкового семестрового контролю: екзамен.

### Розподіл балів, які отримують здобувачі вищої освіти (модуль 1, семестр 3)

Поточне оцінювання та самостійна робота						Модульна контрольна робота	Сума
T1	...	T5	T6	...	T10	60	100
20			20				

T1, T2 ... – теми змістових модулів.

### Розподіл балів, які отримують здобувачі вищої освіти (модуль 2, семестр 3)

Поточне оцінювання та самостійна робота						Модульна контрольна робота	Сума
T11	...	T17	T18	...	T22	60	100
23			17				

T1, T2 ... – теми змістових модулів.

### Критерії оцінювання модульної контрольної роботи

Модульні контрольні роботи розраховані на 90 хвилин. Загальна оцінка модульних контрольних робіт – 100 балів.

В модульній контрольній роботі використовуються різні форми завдань, що дозволяє перевірити знання і вміння студентів: визначення понять, теоретичні та практичні завдання.

#### **Критерії оцінки знань:**

*Оцінка блоку теоретичних завдань (20 балів)*

Блок теоретичних завдань складається з двох теоретичних питань. Кожне з питань оцінюється в 10 балів:

10 балів – ставиться, якщо сутність поняття розкрито вірно та повністю;

5 балів – ставиться, якщо сутність питання розкрито з деякими уточненнями;

0 балів – якщо сутність поняття не розкрито або розкрито невірно.

*Оцінка блоку практичних завдань (30 балів)*

Блок практичних завдань складається з 4 завдань. Одне завдання оцінюється в 7,5 балів :

7,5 балів – ставиться, якщо практичне завдання розв'язано вірно;

5 балів – ставиться, якщо в практичному завданні допущені незначні помилки;  
 3,5 бал – якщо завдання розв’язано вірно не менше 50% обсягу завдання;  
 0 балів - якщо завдання не виконано або виконано невірно.

### Критерії оцінювання підсумкового семестрового контролю

Письмовий екзамен розрахований на 60 хвилин. Загальна оцінка виконаних завдань – 100 балів.

#### Критерії оцінки знань:

*Оцінка блоку теоретичних завдань (45 балів)*

Блок теоретичних завдань складається з двох теоретичних питань.

45 балів – ставиться, якщо сутність поняття розкрито вірно та повністю;

20 балів – ставиться, якщо сутність питання розкрито з деякими уточненнями;

0 балів – якщо сутність поняття не розкрито або розкрито невірно.

*Оцінка блоку практичних завдань (55 балів)*

Блок практичних завдань складається з 5 завдань. Одне завдання оцінюється в 11 балів :

11 балів – ставиться, якщо практичне завдання розв’язано вірно;

8 балів – ставиться, якщо в практичному завданні допущені незначні помилки;

5 балів – якщо завдання розв’язано вірно не менше 50% обсягу завдання;

0 балів - якщо завдання не виконано або виконано невірно.

### Шкала оцінювання: вузу, національна та ECTS

Оцінка ECTS	Оцінка в балах	Оцінка за національною шкалою	
		для екзамену, диференційованого заліку курсового проекту(роботи)	для заліку
<b>A</b>	90 – 100	5	<b>Відмінно</b>
<b>B</b>	82-89	4	<b>Добре</b>
<b>C</b>	74-81		
<b>D</b>	64-73		
<b>E</b>	60-63	3	<b>Задовільно</b>
<b>FX</b>	35-59	2	<b>Незадовільно</b> з можливістю повторного складання
<b>F</b>	1-34	1	<b>Незадовільно</b> з обов’язковим повторним вивченням дисципліни

### Критерій оцінювання з дисципліни

— **“відмінно” А** (90 та вище балів) заслуговує студент, який виявив всебічне і глибоке знання програмового матеріалу, вміння вільно виконувати завдання, передбачені програмою, засвоїв основну і ознайомився з додатковою літературою, розуміє взаємозв’язок головних понять дисципліни та їх значення для майбутньої професії;

— **“добре” В** (82-89 балів) заслуговує студент, який виявив повне знання програмного матеріалу, успішно виконує передбачені програмою завдання, засвоїв основну літературу рекомендовану програмою, виявив систематичний характер знань з дисциплін і здатний до самостійного доповнення, але під час відповіді допустив деякі неточності;

— **"добре" С** (74-81 балів) заслуговує студент, що виявив не цілком повне знання програмного матеріалу, не завжди успішно виконує передбачені програмою завдання, частково засвоїв основну літературу, рекомендовану програмою, виявив не систематичний характер знань з дисциплін і не завжди здатний до їх самостійного доповнення і під час відповіді допускає деякі неточності;

— "задовільно" **D** (64-73 балів) заслуговує студент, що виявив знання основного програмного матеріалу в обсязі, необхідному для подальшого навчання та майбутньої роботи за професією, вміє виконувати завдання, передбачені програмою, знайомий з основною рекомендованою літературою. Як правило, оцінка "задовільно" виставляється студентам, що допустили помилки у відповіді на екзамені та при виконанні екзаменаційних завдань, але які володіють необхідними знаннями для їх усунення за допомогою викладача;

— "задовільно" **E** (60-63 балів) заслуговує студент, що виявив часткове знання основного програмного матеріалу в обсязі, необхідному для подальшого навчання та майбутньої роботи за професією, не завжди вміє виконувати завдання, передбачені програмою, знайомий лише частково з основною рекомендованою літературою. Як правило, оцінка "достатньо" виставляється студентам, що допустили грубі помилки у відповіді на екзамені та при виконанні екзаменаційних завдань, але які частково володіють необхідними знаннями для їх усунення за допомогою викладача.

— "незадовільно" **FX** (35-59 балів) з можливістю повторного складання виставляється студенту, який виявив суттєві прогалини в знаннях основного програмного матеріалу, допустив принципові помилки у виконанні передбачених програмою завдань.

— "незадовільно" **F** (1-34 балів) з обов'язковим повторним вивченням дисципліни виставляється студенту коли протягом семестру він допустив грубі помилки у виконанні передбачених програмою завдань.

## **6. ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ**

### **6.1. Зміст навчальної дисципліни**

#### **СЕМЕСТР 3**

##### **Змістовий модуль 1. Диференціальне числення функцій багатьох змінних**

*Тема 1.* Відкриті та замкнені множини. Поняття метричного простору. Приклади метричних просторів. Зв'язні множини. Обмежені множини. Поняття границі в  $\mathbb{R}^n$ .

*Тема 2.* Функції багатьох змінних. Задачі, що приводять до поняття функції багатьох змінних. Границя функції багатьох змінних. Неперервні функції. Необхідна та достатня умови неперервності. Повторні границі. Неперервність функції багатьох змінних, властивості неперервних функцій.

*Тема 3.* Частинні похідні функції багатьох змінних. Геометричний зміст частинних похідних. Диференційованість функції багатьох змінних. Необхідні і достатні умови диференційованості. Похідна складеної функції багатьох змінних.

*Тема 4.* Диференціал функції багатьох змінних. Означення повного та частинних диференціалів функції багатьох змінних. Диференціал складної функції багатьох змінних, інваріантність форми диференціала функцій багатьох змінних.

*Тема 5.* Частинні похідні вищих порядків функцій багатьох змінних, теорема про мішані похідні. Диференціали вищих порядків функцій багатьох змінних, порушення інваріантності.

*Тема 6.* Дотична площина та нормаль до поверхні. Геометричний зміст диференціала. Похідна за напрямком, градієнт.

*Тема 7.* Формула Тейлора для функцій двох змінних.

*Тема 8.* Неявні функції. Теореми про існування неявної функції однієї і багатьох змінних. Неявні функції, що визначаються системою рівнянь.

*Тема 9.* Екстремум функції багатьох змінних. Необхідні і достатні умови локального екстремуму функції багатьох змінних. Достатні умови екстремуму функції двох змінних. Локальні екстремуми функції  $n$  змінних.

*Тема 10.* Умовний екстремум функції багатьох змінних, метод Лагранжа. Найбільше та найменше значення функції в замкненій області.

##### **Змістовий модуль 2. Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли.**

*Тема 11.* Задачі, що приводять до подвійних інтегралів, означення подвійного інтегралу. Умови існування подвійного інтеграла. Властивості подвійного інтеграла.

*Тема 12.* Зведення подвійного інтеграла до повторного, обчислення подвійного інтеграла (випадає прямокутної області, випадок довільної області).

*Тема 13.* Заміна змінних у подвійних інтегралах. Подвійний інтеграл в полярних координатах. Подвійний інтеграл в узагальненій полярній системі координат.

*Тема 14.* Застосування подвійних інтегралів до задач геометрії. Застосування подвійного інтеграла до задач механіки.

*Тема 15.* Поняття потрійного інтеграла, умови його існування, властивості. Обчислення потрійного інтеграла в декартових координатах.

*Тема 16.* Заміна змінних у потрійному інтегралі. Потрійний інтеграл у циліндричних та сферичних координатах. Узагальнені циліндрична і сферична системи координат.

*Тема 17.* Застосування потрійного інтеграла до задач геометрії. Об'єм тіла. Застосування потрійного інтеграла до задач механіки

*Тема 18.* Криволінійні інтеграли першого роду (за довжиною дуги), їх властивості, обчислення. Застосування криволінійного інтеграла першого роду для плоских кривих до задач геометрії та механіки.

*Тема 19.* Криволінійні інтеграли другого роду, їх властивості. Обчислення криволінійного інтеграла другого роду. Зв'язок між криволінійними інтегралами першого й другого роду. Формула Гріна.

*Тема 20.* Застосування криволінійного інтеграла другого роду. Умови незалежності криволінійного інтеграла другого роду від форми шляху інтегрування. Інтегрування повних диференціалів.

*Тема 21.* Поняття поверхневого інтеграла першого роду (за площею поверхні), його властивості. Обчислення поверхневого інтеграла першого роду. Застосування поверхневого інтеграла першого роду.

*Тема 22.* Поверхневий інтеграл другого роду, його властивості, обчислення, застосування. Формули Стокса, Остроградського-Гаусса.

## 6.2. Структура навчальної дисципліни

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин					
	Денна форма					
	Усього	у тому числі				
лекції		практичні (семінарські)	лабораторні	індивідуальна робота	самостійна робота	
<b>СЕМЕСТР 3</b>						
<b>Модуль 1</b>						
Тема 1. Відкриті та замкнені множини. Поняття метричного простору. Приклади метричних просторів. Зв'язні множини. Обмежені множини. Поняття границі в $\mathbb{R}^n$ .	8	2	2	-	-	4
Тема 2. Функції багатьох змінних. Задачі, що приводять до поняття функції багатьох змінних. Границя функції багатьох змінних. Неперервні функції. Необхідна та достатня умови неперервності. Повторні границі. Неперервність	16	4	4	-	-	8

функції багатьох змінних, властивості неперервних функцій.						
Тема 3. Частинні похідні функції багатьох змінних. Геометричний зміст частинних похідних.	8	2	2	-	-	4
Тема 4. Диференційованість функції багатьох змінних. Необхідні і достатні умови диференційованості. Похідна складеної функції багатьох змінних. Диференціал функції багатьох змінних. Означення повного та частинних диференціалів функції багатьох змінних. Диференціал складної функції багатьох змінних, інваріантність форми диференціала функцій багатьох змінних.	8	2	2	-	-	4
Тема 5. Частинні похідні вищих порядків функцій багатьох змінних, теорема про мішані похідні. Диференціали вищих порядків функцій багатьох змінних, порушення інваріантності.	16	4	4	-	-	8
Тема 6. Дотична площина та нормаль до поверхні. Геометричний зміст диференціала. Похідна за напрямком, градієнт.	16	4	4	-	-	8
Тема 7. Формула Тейлора для функції двох змінних.	8	2	2	-	-	4
Тема 8. Неявні функції. Теореми про існування неявної функції однієї і багатьох змінних. Неявні функції, що визначаються системою рівнянь.	16	4	4	-	-	8
Тема 9. Екстремум функції багатьох змінних. Необхідні і достатні умови локального екстремуму функції багатьох змінних. Достатні умови екстремуму функції двох змінних. Локальні екстремуми функції $n$ змінних.	16	4	4	-	-	8
Тема 10. Геометричні застосування неявних функцій. Умовний екстремум функції багатьох змінних, метод Лагранжа. Найбільше та найменше значення функції в замкненій області.	16	4	4	-	-	8
Модульна контрольна робота				-	-	
Разом за модуль	160	42	38	-	-	80
<b>Модуль 2</b>						
Тема 11. Задачі, що приводять до подвійних інтегралів, означення подвійного інтегралу. Інтегральні суми, верхня і нижня суми Дарбу. Умови існування подвійного інтеграла. Властивості подвійного інтегралу.	10	3	2	-	-	5
Тема 12. Зведення подвійного інтеграла до повторного, обчислення подвійного інтеграла (випадок прямокутної області, випадок довільної області).	10	3	2	-	-	5
Тема 13. Заміна змінних у подвійних інтегралах. Подвійний інтеграл в полярних координатах. Подвійний інтеграл в узагальненій полярній системі координат.	8	2	2	-	-	4
Тема 14. Застосування подвійних інтегралів до задач геометрії. Застосування подвійного інтеграла до задач механіки.	12	2	4	-	-	6

Тема 15. Поняття потрійного інтеграла, умови його існування, властивості. Обчислення потрійного інтегралу в декартових координатах.	12	3	3	-	-	6
Тема 16. Заміна змінних у потрійному інтегралі. Потрійний інтеграл у циліндричних та сферичних координатах. Узагальнені циліндрична і сферична системи координат.	12	3	3	-	-	6
Тема 17. Застосування потрійного інтеграла до задач геометрії. Об'єм тіла. Застосування потрійного інтеграла до задач механіки.	16	4	4	-	-	8
Тема 18. Криволінійні інтеграли першого роду (за довжиною дуги), їх властивості, обчислення. Застосування криволінійного інтеграла першого роду для плоских кривих до задач геометрії та механіки.	12	3	3	-	-	6
Тема 19. Криволінійні інтеграли другого роду, їх властивості. Обчислення криволінійного інтеграла другого роду. Зв'язок між криволінійними інтегралами першого й другого роду. Формула Гріна.	12	3	3	-	-	6
Тема 20. Застосування криволінійного інтеграла другого роду. Умови незалежності криволінійного інтеграла другого роду від форми шляху інтегрування. Інтегрування повних диференціалів.	16	4	4	-	-	8
Тема 21. Поняття поверхневого інтеграла першого роду (за площею поверхні), його властивості. Обчислення поверхневого інтеграла першого роду. Застосування поверхневого інтеграла першого роду. Поверхневий інтеграл другого роду, його властивості, обчислення, застосування. Формули Стокса, Остроградського-Гаусса.	12	3	3	-	-	6
Тема 22. Поверхневий інтеграл другого роду, його властивості, обчислення, застосування. Формули Стокса, Остроградського-Гаусса.	12	3	3	-	-	6
Модульна контрольна робота				-	-	-
Разом за модуль	160	40	40	-	-	80
<b>Разом за семестр</b>	<b>240</b>	<b>60</b>	<b>60</b>			<b>120</b>
<b>Всього</b>	<b>450</b>	<b>114</b>	<b>110</b>			<b>226</b>

### 6.3. Теми практичних (семінарських, лабораторних) занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин	
		денна	заочна
<b>Семестр 3</b>			
1	Відкриті та замкнені множини. Поняття метричного простору. Приклади метричних просторів. Зв'язні множини. Обмежені множини. Поняття границі в $\mathbb{R}^n$ .	2	
2	Функції багатьох змінних. Задачі, що приводять до поняття функції багатьох змінних. Границя функції багатьох змінних. Неперервні функції. Необхідна та достатня умови неперервності. Повторні границі. Неперервність функції багатьох змінних, властивості неперервних функцій.	4	-

3	Частинні похідні функції багатьох змінних. Геометричний зміст частинних похідних.	2	-
4	Диференційованість функції багатьох змінних. Необхідні і достатні умови диференційованості. Похідна складеної функції багатьох змінних.	2	-
5	Диференціал функції багатьох змінних. Означення повного та частинних диференціалів функції багатьох змінних. Диференціал складної функції багатьох змінних, інваріантність форми диференціала функцій багатьох змінних. Застосування повного диференціала для наближених обчислень.	4	-
6	Частинні похідні вищих порядків функцій багатьох змінних, теорема про мішані похідні. Диференціали вищих порядків функцій багатьох змінних, порушення інваріантності.	4	-
8	Дотична площина та нормаль до поверхні. Геометричний зміст диференціала. Похідна за напрямком, градієнт.	4	-
9	Формула Тейлора для функції двох змінних.	2	-
10	Неявні функції. Теореми про існування неявної функції однієї і багатьох змінних. Неявні функції, що визначаються системою рівнянь.	4	-
11	Екстремум функції багатьох змінних. Необхідні і достатні умови локального екстремуму функції багатьох змінних. Достатні умови екстремуму функції двох змінних. Локальні екстремуми функції $n$ змінних.	4	-
12	Геометричні застосування неявних функцій. Умовний екстремум функції багатьох змінних, метод Лагранжа.	4	-
13	Найбільше та найменше значення функції в замкненій області.	2	-
1	Задачі, що приводять до подвійних інтегралів, означення подвійного інтегралу. Інтегральні суми, верхня і нижня суми Дарбу. Умови існування подвійного інтеграла. Властивості подвійного інтегралу.	2	-
2	Зведення подвійного інтеграла до повторного, обчислення подвійного інтеграла (випадок прямокутної області, випадок довільної області).	2	-
3	Заміна змінних у подвійних інтегралах. Подвійний інтеграл в полярних координатах. Подвійний інтеграл в узагальненій полярній системі координат.	2	-
4	Застосування подвійних інтегралів до задач геометрії. Застосування подвійного інтеграла до задач механіки.	4	-
5	Поняття потрійного інтеграла, умови його існування, властивості. Обчислення потрійного інтегралу в декартових координатах.	3	-
6	Заміна змінних у потрійному інтегралі. Потрійний інтеграл у циліндричних та сферичних координатах. Узагальнені циліндрична і сферична системи координат.	3	-
7	Застосування потрійного інтеграла до задач геометрії. Об'єм тіла. Застосування потрійного інтеграла до задач механіки.	4	-
8	Криволінійні інтеграли першого роду (за довжиною дуги), їх властивості, обчислення. Застосування криволінійного інтеграла першого роду для плоских кривих до задач геометрії та механіки.	3	-
9	Криволінійні інтеграли другого роду, їх властивості. Обчислення криволінійного інтеграла другого роду. Зв'язок між	3	-

	криволінійними інтегралами першого й другого роду. Формула Гріна.		
10	Застосування криволінійного інтеграла другого роду. Умови незалежності криволінійного інтеграла другого роду від форми шляху інтегрування. Інтегрування повних диференціалів.	4	-
11	Поняття поверхневого інтеграла першого роду (за площею поверхні), його властивості. Обчислення поверхневого інтеграла першого роду. Застосування поверхневого інтеграла першого роду. Поверхневий інтеграл другого роду, його властивості, обчислення, застосування. Формули Стокса, Остроградського-Гаусса.	3	-
12	Поверхневий інтеграл другого роду, його властивості, обчислення, застосування. Формули Стокса, Остроградського-Гаусса.	3	-
<b>Разом за семестр</b>		60	-
<b>Всього</b>		110	-

#### 6.4. Самостійна робота

№ з/п	Назва теми	Кількість годин	
		денна	заочна
1	Відкриті та замкнені множини. Поняття метричного простору. Приклади метричних просторів. Зв'язні множини. Обмежені множини. Поняття границі в $\mathbb{R}^n$ .	4	
2	Функції багатьох змінних. Задачі, що приводять до поняття функції багатьох змінних. Границя функції багатьох змінних. Неперервні функції. Необхідна та достатня умови неперервності. Повторні границі. Неперервність функції багатьох змінних, властивості неперервних функцій.	8	-
3	Частинні похідні функції багатьох змінних. Геометричний зміст частинних похідних.	4	-
4	Диференційованість функції багатьох змінних. Необхідні і достатні умови диференційованості. Похідна складеної функції багатьох змінних.	4	-
5	Диференціал функції багатьох змінних. Означення повного та частинних диференціалів функції багатьох змінних. Диференціал складеної функції багатьох змінних, інваріантність форми диференціала функцій багатьох змінних. Застосування повного диференціала для наближених обчислень.	8	-
6	Частинні похідні вищих порядків функцій багатьох змінних, теорема про мішані похідні. Диференціали вищих порядків функцій багатьох змінних, порушення інваріантності.	8	-
7	Скалярне поле. Вектор-функція скалярного аргументу, її диференціювання.	4	-
8	Дотична площина та нормаль до поверхні. Геометричний зміст диференціала. Похідна за напрямком, градієнт. Оператор набла.	8	-
9	Формула Тейлора для функції двох змінних.	4	-
10	Неявні функції. Теореми про існування неявної функції однієї і багатьох змінних. Неявні функції, що визначаються системою рівнянь.	8	-
11	Екстремум функції багатьох змінних. Необхідні і достатні умови локального екстремуму функції багатьох змінних.	8	-

	Достатні умови екстремуму функції двох змінних. Локальні екстремуми функції $n$ змінних.		
12	Геометричні застосування неявних функцій. Умовний екстремум функції багатьох змінних, метод Лагранжа.	8	-
13	Найбільше та найменше значення функції в замкненій області.	4	-
<b>Разом</b>		106	-
1	Задачі, що приводять до подвійних інтегралів, означення подвійного інтегралу. Інтегральні суми, верхня і нижня суми Дарбу. Умови існування подвійного інтеграла. Властивості подвійного інтегралу.	5	-
2	Зведення подвійного інтеграла до повторного, обчислення подвійного інтеграла (випадок прямокутної області, випадок довільної області).	5	-
3	Заміна змінних у подвійних інтегралах. Подвійний інтеграл в полярних координатах. Подвійний інтеграл в узагальненій полярній системі координат.	4	-
4	Застосування подвійних інтегралів до задач геометрії. Застосування подвійного інтеграла до задач механіки.	6	-
5	Поняття потрійного інтеграла, умови його існування, властивості. Обчислення потрійного інтегралу в декартових координатах.	6	-
6	Заміна змінних у потрійному інтегралі. Потрійний інтеграл у циліндричних та сферичних координатах. Узагальнені циліндрична і сферична системи координат.	6	-
7	Застосування потрійного інтеграла до задач геометрії. Об'єм тіла. Застосування потрійного інтеграла до задач механіки.	8	-
8	Криволінійні інтеграли першого роду (за довжиною дуги), їх властивості, обчислення. Застосування криволінійного інтеграла першого роду для плоских кривих до задач геометрії та механіки.	6	-
9	Криволінійні інтеграли другого роду, їх властивості. Обчислення криволінійного інтеграла другого роду. Зв'язок між криволінійними інтегралами першого й другого роду. Формула Гріна.	6	-
10	Застосування криволінійного інтеграла другого роду. Умови незалежності криволінійного інтеграла другого роду від форми шляху інтегрування. Інтегрування повних диференціалів.	8	-
11	Поняття поверхневого інтеграла першого роду (за площею поверхні), його властивості. Обчислення поверхневого інтеграла першого роду. Застосування поверхневого інтеграла першого роду. Поверхневий інтеграл другого роду, його властивості, обчислення, застосування. Формули Стокса, Остроградського-Гаусса.	6	-
12	Поверхневий інтеграл другого роду, його властивості, обчислення, застосування. Формули Стокса, Остроградського-Гаусса.	6	-
<b>Разом</b>		120	-
<b>Всього</b>		226	-

### 6.5. Індивідуальні завдання

Навчальним планом математичного факультету ДВНЗ “Ужгородський національний університет” індивідуальне навчально-дослідне завдання не передбачено.

## 7. Орієнтований перелік питань до екзамену

### **Змістовий модуль 1. Диференціальне числення функцій багатьох змінних.**

1. Поняття метрики і метричного простору, приклади. Множини точок метричного простору, обмежені множини, гранична точка множини. Відкриті і замкнені множини.
2. Функції багатьох змінних. Границя багатьох змінних, властивості. Повторні границі.
3. Неперервність функції, властивості неперервних функцій.
4. Частинні похідні функції багатьох змінних, диференційовність функції, умови диференційовності, неперервність диференційовної функції.
5. Диференціал функції багатьох змінних. Означення повного та частинних диференціалів функції багатьох змінних.
6. Диференціал складної функції багатьох змінних, інваріантність форми диференціала функцій багатьох змінних.
7. Частинні похідні складної функції багатьох змінних.
8. Диференціал складної функції багатьох змінних, інваріантність форми диференціала функцій багатьох змінних.
9. Дотична площина та нормаль до поверхні. Геометричний зміст диференціала.
10. Похідна за напрямком, градієнт.
11. Частинні похідні вищих порядків функцій багатьох змінних, теорема про мішані похідні.
12. Диференціали вищих порядків функцій багатьох змінних, порушення інваріантності.
13. Формула Тейлора для функцій багатьох змінних.
14. Екстремум функції багатьох змінних. Необхідні і достатні умови локального екстремуму функції багатьох змінних.
15. Достатні умови екстремуму функції двох змінних.
16. Умовний екстремум функції багатьох змінних, метод Лагранжа.

### **Змістовий модуль 2. Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли.**

1. Задачі, що приводять до подвійних інтегралів, означення подвійного інтегралу.
2. Інтегральні суми, верхня і нижня суми Дарбу, їх властивості. Умови існування подвійного інтеграла.
3. Властивості подвійного інтегралу.
4. Обчислення подвійного інтеграла, випадок прямокутної області.
5. Заміна змінних у подвійних інтегралах, полярні координати.
6. Геометричні застосування подвійних інтегралів.
7. Застосування подвійних інтегралів до задач механіки.
8. Потрійні інтеграли, умови існування, властивості.
9. Обчислення потрійного інтегралу.
10. Заміна змінних у потрійному інтегралі, циліндричні і сферичні координати.
11. Застосування потрійних інтегралів.
12. Криволінійні інтеграли 1-го роду, властивості, обчислення, застосування.
13. Криволінійні інтеграли 2-го роду, властивості, обчислення, застосування.
14. Формула Гріна, обчислення площ.
15. Незалежність криволінійного інтегралу від шляху інтегрування (випадок плоскої кривої).
16. Елементи теорії поверхонь, перша квадратична форма, площа поверхні, орієнтація поверхні.
17. Поверхневий інтеграл 1-го роду, властивості, обчислення, застосування.

18. Поверхневий інтеграл 2-го роду, властивості, обчислення, застосування.
19. Формула Стокса.
20. Формула Остроградського-Гауса.
21. Незалежність криволінійного інтегралу від шляху інтегрування (випадок просторової кривої).

## **8. РЕКОМЕНДОВАНІ ДЖЕРЕЛА ІНФОРМАЦІЇ**

### **Основна література**

1. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз: Підручник: У двох частинах. Частина 2.– К.: Либідь, 1993.– 320 с.
2. Денисюк В. П. Вища математика. Модульна технологія навчання: навч. посіб. У 4 ч. Ч. 2. / В. П. Денисюк, В. К. Репета: – 4-те вид., стереотип. – К.: Вид-во Нац. авіац. ун-ту «НАУ-друк», 2009. – 276 с.
3. Диференціальне та інтегральне числення функцій кількох змінних. Диференціальні рівняння. Конспект лекцій. (І курс II семестр) / Уклад.: В. О. Гайдей, Л. Б. Федорова, І. В. Алексєєва, О. О. Диховичний, – К.: НТУУ «КПІ», 2013. – 144 с.
4. Диференціальне та інтегральне числення функцій кількох змінних. Диференціальні рівняння. Практикум. (І курс II семестр) / Уклад.: І. В. Алексєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова. – К.: НТУУ «КПІ», 2014. –190 с.
5. Жалдак М. І., Михалін Г. О., Деканов С. Я. Математичний аналіз. Функції багатьох змінних: Навчальний посібник. – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2007. – 430 с.
6. Збірник задач з математичного аналізу. Функції кількох змінних. М. О. Денисьєвський, А. В. Чайковський / – К.: ВПЦ "Київський університет", 2012. – 276 с.
7. Методичні вказівки до лабораторних робіт з математичного аналізу для студентів математичного факультету. Частина IV. Функції багатьох змінних / Уклад.: А. І. Моца, Г. А. Наконечна, М. І. Немеш, Ю. А. Хоменко. – Ужгород: Вид-во УжНУ, 2002. – 40 с.
8. Сиявська О. О., Слюсарчук П. В. Ряди Фур'є. Навчальний посібник для студентів спеціальностей математика, прикладна математика, статистика. – Ужгород, 2015. – 70 с.
9. Шкіль М.І. Математичний аналіз / Шкіль М.І. – К., 1994-1995. Ч. 1, 2.

### **Допоміжна література**

1. Дюженкова, Л.І. Вища математика: приклади і задачі: посібник / Л.І. Дюженкова, О.Ю. Дюженкова, Г.О. Михалін; ред. Г. О. Михалін. – Київ : Академія, 2003. – 623 с.
2. Заболоцький М.В., Сторож О.Г., Тарасюк С.І., Математичний аналіз, К.: Знання, 2008.
3. Ляшко І.І., Ємельянов В.Ф., Боярчук О.К, Математичний аналіз, К.: Вища школа, 1993.

### **Інформаційні ресурси в мережі Інтернет**

1. <http://www.nbuv.gov.ua> – Національна бібліотека України імені В. І. Вернадського.
2. <http://mechmat.univ.kiev.ua/ua/study/library.php> – електронна бібліотека механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка.
3. <https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/> – Електронний репозитарій ДВНЗ "УжНУ"

...

**Результати перегляду  
робочої програми навчальної дисципліни**

Робоча програма перезатверджена на 20\_\_\_ / 20\_\_\_ н.р. без змін; зі змінами (Додаток \_\_\_).  
(потрібне підкреслити)

протокол № \_\_\_ від «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20 \_\_\_ р. Завідувач кафедри \_\_\_\_\_  
(підпис) (Прізвище ініціали)

Робоча програма перезатверджена на 20\_\_\_ / 20\_\_\_ н.р. без змін; зі змінами (Додаток \_\_\_).  
(потрібне підкреслити)

протокол № \_\_\_ від «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20 \_\_\_ р. Завідувач кафедри \_\_\_\_\_  
(підпис) (Прізвище ініціали)

Робоча програма перезатверджена на 20\_\_\_ / 20\_\_\_ н.р. без змін; зі змінами (Додаток \_\_\_).  
(потрібне підкреслити)

протокол № \_\_\_ від «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20 \_\_\_ р. Завідувач кафедри \_\_\_\_\_  
(підпис) (Прізвище ініціали)

Робоча програма перезатверджена на 20\_\_\_ / 20\_\_\_ н.р. без змін; зі змінами (Додаток \_\_\_).  
(потрібне підкреслити)

протокол № \_\_\_ від «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20 \_\_\_ р. Завідувач кафедри \_\_\_\_\_  
(підпис) (Прізвище ініціали)