

**ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД  
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ ТА ЦИФРОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ  
кафедра теорії ймовірностей і математичного аналізу**



**РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ**

**ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА**

Рівень вищої освіти      перший (бакалаврський)

Галузь знань	01-освіта, педагогіка
Спеціальність	014.04-середня освіта (математика)
Освітня програма	Математика, інформатика
Статус дисципліни	обов'язкова
Мова навчання	українська

**Ужгород 2025**

Робоча програма навчальної дисципліни «**Теорія ймовірностей та математична статистика**» для здобувачів вищої освіти:  
галузі знань **01-освіта/педагогіка**, спеціальності **014.04-середня освіта (математика)**, освітньої програми - **математика, інформатика**.

**Розробники:**

Слюсарчук П.В. , канд. фіз.-мат. наук, доцент, професор кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу.

Робочу програму розглянуто та затверджено на засіданні кафедри *теорії ймовірностей і математичного аналізу*

протокол № 10 від 3 червня 2025 р.

Завідувач кафедри  Ганна СЛИВКА-ТИЛИЦАК

Схвалено науково-методичною комісією факультету математики та цифрових технологій

Протокол № 10 від 26 червня 2025 р.

Голова науково-методичної комісії  Наталія ЮРЧЕНКО

© Слюсарчук П.В., 2025р.

© ДВНЗ «Ужгородський національний університет», 2025 р.

## 1. ОПИС НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

<b>Найменування показників</b>	<b>Розподіл годин за навчальним планом</b>	
	Денна форма навчання	Заочна форма навчання
Кількість кредитів ЄКТС –6	Рік підготовки:	
Загальна кількість годин –180	3	4
Кількість модулів – 2	Семестр:	
Тижневих годин для денної форми навчання: аудиторних – 5 самостійної роботи студента – 5	5	7-8
	Лекції:	
	40	16
	Практичні (семінарські):	
	50	14
Вид підсумкового контролю: екзамен – 5 сем.	Лабораторні:	
Форма підсумкового контролю: усна	Самостійна робота:	
	90	150

# 1. МЕТА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Метою вивчення навчальної дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика» є оволодіти:

основні поняття про випадкові події; ймовірність випадкової події; випадкові величини, їх розподіли та числові характеристики; основні ймовірнісні нерівності; різні типи збіжностей випадкових величин; властивості різних типів збіжностей та їх взаємозв'язок; закон великих чисел; характеристичні функції; граничні теореми; випадкові процеси; основні поняття базових елементів математичної статистики: вибірка, емпірична функція розподілу, основні характеристики вибірки, статистичні оцінки та їх властивості, статистичні оцінки для математичного сподівання та дисперсії, моментів; асимптотична нормальність емпіричних моментів, ефективні оцінки; нерівність Крамера-Рао; достатні статистики; методи одержання статистичних оцінок; поняття довірчого інтервалу; поняття статистичної гіпотези і статистичного критерію; основні поняття базових елементів математичної статистики: вибірка, емпірична функція розподілу, основні характеристики вибірки, статистичні оцінки та їх властивості; поняття асимптотичної нормальності емпіричних моментів, нерівність Крамера-Рао; достатні статистики; методи одержання статистичних оцінок; етапи статистичного дослідження; основні способи подання даних.

Відповідно до освітньої програми «Математика, інформатика», вивчення дисципліни сприяє формуванню у здобувачіввищої освіти таких компетентностей:

## Загальні компетентності(ЗК)

**ЗК-1.** Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу на основі логічних аргументів з метою виявлення педагогічних проблем і виробляти рішення щодо їх усунення;

**ЗК-2.** Здатність застосовувати знання на практиці;

**ЗК-4.** Здатність до опанування нових знань та продовження професійного розвитку;

**ЗК-7.** Знання та розуміння з предметної області у професії викладача математики та інформатики;

**ЗК-9.** Набуття гнучкого мислення, відкритість до застосування математичних знань та знань з інформатики та компетентностей в широкому діапазоні можливих місць роботи та повсякденному житті;

**ЗК-14.** Здатність до критичного мислення, навички обдумування.

## Спеціальні (фахові,предметні) компетентності

**ФК-1.** Здатність ефективно працювати в областях педагогіки, психології, математики та інформатики;

**ФК-2** Здатність працювати з інформацією і знаннями з освітніх проблем;

**ФК-7.** Здатність демонструвати глибокі знання з математики та інформатики;

**ФК-11.** Володіти основними поняттями математики, інформатики і вміти застосовувати їх під час практичної роботи в школі;

**ФК-15.** Здатність демонструвати знання фундаментальних і суміжних прикладних розділів спеціальних дисциплінбакалаврської програми, знання загальнометодичного характеру, знання історії розвитку інформатики, методики викладання математики, інформатики та ІТ;

## Програмні результати навчання

**ПРН-1.** Знати основні етапи історичного розвитку математичних знань і парадигм, розуміти сучасні тенденції в математиці.

**ПРН-2.** Здатність розуміти основні поняття, принципи, теорії та результати математики; володіння спеціальною математичною термінологією та вміння її передавати з використанням математичних позначень.

**ПРН-3.** Знання основних понять та теоретичних положень математичного аналізу, алгебри і теорії чисел, аналітичної геометрії, лінійної алгебри, теорії диференціальних рівнянь, функцій комплексної змінної, теорії міри, теорії ймовірностей та математичної статистики, дискретної математики та елементарної математики.

**ПРН-8.** Уміння формулювати означення, аксіоми і теореми з математики, обґрунтовувати та доводити основні теореми та вміти застосовувати їх при розв'язуванні конкретних математичних та прикладних задач.

**ПРН-9.** Здатність формувати в учнів розуміння основ математичного моделювання, готовність до застосування моделювання при розв'язуванні задач і доцільно використовувати пакети математичних програм.

**ПРН-23.** Уміння встановлювати міжпредметні та внутрішньо предметні зв'язки під час вивчення конкретних тем, вищої математики, шкільного курсу математики.

## **2. ПЕРЕДУМОВИ ДЛЯ ВИВЧЕННЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ**

Передумовами вивчення навчальної дисципліни «**Теорія ймовірностей та математична статистика**» є опанування таких навчальних дисциплін (НД) освітньої програми (ОП):

ОК5 – Математичний аналіз функції однієї змінної,

ОК6 – Математичний аналіз функції багатьох змінних.

## **3. ОЧІКУВАНІ РЕЗУЛЬТАТИ НАВЧАННЯ**

Відповідно до освітніх програм «**математика, інформатика**», вивчення навчальної дисципліни повинно забезпечити досягнення здобувачами вищої освіти таких програмних результатів навчання (ПРН):

**ПРН-2.** Здатність розуміти основні поняття, принципи, теорії та результати математики; володіння спеціальною математичною термінологією та вміння її передавати з використанням математичних позначень.

**ПРН-3.** Знання основних понять та теоретичних положень математичного аналізу, алгебри і теорії чисел, аналітичної геометрії, лінійної алгебри, теорії диференціальних рівнянь, функцій комплексної змінної, теорії міри, теорії ймовірностей та математичної статистики, дискретної математики та елементарної математики.

**ПРН-8.** Уміння формулювати означення, аксіоми і теореми з математики, обґрунтовувати та доводити основні теореми та вміти застосовувати їх при розв'язуванні конкретних математичних та прикладних задач.

**ПРН-9.** Здатність формувати в учнів розуміння основ математичного моделювання, готовність до застосування моделювання при розв'язуванні задач і доцільно використовувати пакети математичних програм.

**ПРН-23.** Уміння встановлювати міжпредметні та внутрішньо предметні зв'язки під час вивчення конкретних тем, вищої математики, шкільного курсу математики.

## **4. ЗАСОБИ ДІАГНОСТИКИ ТА КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ НАВЧАННЯ**

**Засоби оцінювання та методи демонстрування результатів  
навчання**

Накопичувальна бально-рейтингова система, що передбачає оцінювання студентів за усі види аудиторної та поза аудиторної навчальної діяльності, спрямованої на опанування навчального навантаження з освітньої програми: поточний, модульний, підсумковий контроль - екзамен.

### Форми контролю та критерії оцінювання результатів навчання

Форми поточного контролю: виконання практичних завдань, самостійні та контрольні роботи, колоквиуми.

Форма модульного контролю: модульна контрольна робота.

Форма підсумкового семестрового контролю: екзамен.

### Розподіл балів, які отримують здобувачі вищої освіти (модуль 1)

Поточне оцінювання та самостійна робота									Модульна контрольна робота	Сума
T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	50	100
6	6	6	6	6	5	5	5	5		

T1, T2 ... – теми

### Розподіл балів, які отримують здобувачі вищої освіти (модуль 2)

Поточне оцінювання та самостійна робота									Модульна контрольна робота	Сума
T10	T11	T12	T13	T14	T15	T16	T17	T18	50	100
5	5	6	6	6	6	6	5	5		

### Оцінювання окремих видів навчальної роботи з дисципліни

Кожен модуль оцінюється за наступною схемою:

Вид діяльності здобувача вищої освіти	Модуль 1-4	
	Кількість	Максимальна кількість балів (сумарна)
Самостійна робота (виконання та захист)	2	40
Активність під час занять		10
Модульна контрольна робота	1	50
<b>Разом</b>		<b>100</b>

### Критерії оцінювання модульної контрольної роботи

Кожна модульна контрольна робота проводиться у вигляді колоквиуму з теоретичних питань, загальна оцінка модульної контрольної роботи – 50 балів. В модульній контрольній роботі міститься п'ять теоретичних питань. Кожне з питань оцінюється в 10 балів і виставляється кількість балів, пропорційна відсотку правильної відповіді.

### Критерії оцінювання підсумкового семестрового контролю

Екзаменаційний білет складається із двох теоретичних питань і двох задач, кожне оцінюється по 25 балів. Загальна оцінка виконаних завдань – 100 балів. За кожне питання виставляється кількість балів, пропорційна відсотку правильної відповіді.

### Шкала оцінювання: вузу, національна та ECTS

Оцінка ECTS	Оцінка в балах	Оцінка за національною шкалою		
		для екзамену, диференційованого заліку курсового проекту(роботи)		для заліку
A	90 – 100	5	<b>Відмінно</b>	<b>Зараховано</b>
B	82-89	4	<b>Добре</b>	
C	74-81			
D	64-73	3	<b>Задовільно</b>	
E	60-63			
FX	35-59	2	<b>Незадовільно</b> з можливістю повторного складання	<b>Не зараховано</b> з можливістю повторного складання
F	1-34	1	<b>Незадовільно</b> з обов'язковим повторним вивченням дисципліни	<b>Не зараховано</b> з обов'язковим повторним вивченням дисципліни

### Критерій оцінювання з дисципліни

— **"відмінно" А** (90 та вище балів) заслуговує студент, який виявив всебічне і глибоке знання програмового матеріалу, вміння вільно виконувати завдання, передбачені програмою, засвоїв основну і ознайомився з додатковою літературою, розуміє взаємозв'язок головних понять дисципліни та їх значення для майбутньої професії;

— **"добре" В** (82-89 балів) заслуговує студент, який виявив повне знання програмного матеріалу, успішно виконує передбачені програмою завдання, засвоїв основну літературу рекомендовану програмою, виявив систематичний характер знань з дисциплін і здатний до самостійного доповнення, але під час відповіді допустив деякі неточності;

— **"добре" С** (74-81 балів) заслуговує студент, що виявив не цілком повне знання програмного матеріалу, не завжди успішно виконує передбачені програмою завдання, частково засвоїв основну літературу, рекомендовану програмою, виявив не систематичний характер знань з дисциплін і не завжди здатний до їх самостійного доповнення і під час відповіді допускає деякі неточності;

— **"задовільно" D** (64-73 балів) заслуговує студент, що виявив знання основного програмного матеріалу в обсязі, необхідному для подальшого навчання та майбутньої роботи за професією, вміє виконувати завдання, передбачені програмою, знайомий з основною рекомендованою літературою. Як правило, оцінка "задовільно" виставляється студентам, що допустили помилки у відповіді на екзамені та при виконанні екзаменаційних завдань, але які володіють необхідними знаннями для їх усунення за допомогою викладача;

— **"задовільно" E** (60-63 балів) заслуговує студент, що виявив часткове знання основного програмового матеріалу в обсязі, необхідному для подальшого навчання та майбутньої роботи за професією, не завжди вміє виконувати завдання, передбачені програмою, знайомий лише частково з основною рекомендованою літературою. Як правило, оцінка "достатньо" виставляється студентам, що допустили грубі помилки у відповіді на екзамені та при виконанні екзаменаційних завдань, але які частково володіють необхідними знаннями для їх усунення за допомогою викладача.

— **"незадовільно" FX** (35-59 балів) з можливістю повторного складання виставляється студенту, який виявив суттєві прогалини в знаннях основного програмового матеріалу, допустив принципові помилки у виконанні передбачених програмою завдань.

— **"незадовільно" F** (1-34 балів) з обов'язковим повторним вивченням дисципліни виставляється студенту коли протягом семестру він допустив грубі помилки у виконанні передбачених програмою завдань.

При виставленні оцінки можуть враховуватися результати навчальної роботи студента протягом семестру.

Іспит виставляється (без складання) у випадку набору кількості балів, що відповідає мінімальній оцінці "достатньо" (E).

Протягом семестру проводиться не менше двох модулів чи контрольних робіт або інших видів контролю. Максимальна кількість балів, яка встановлюється для цих видів контролю, а також відповідність оцінок FX та F у шкалі ECTS, у балах та національній шкалі визначається Вченими радами факультетів або кафедрами, які забезпечують викладання відповідних дисциплін.

## **2 ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ**

### **2.1. Зміст навчальної дисципліни**

### **Семестр 5**

#### **Модуль 1.**

Тема 1. Предмет і методи теорії ймовірностей. Використання ймовірнісних методів в науці, техніці, економіці. Стохастичний експеримент, випадкові події, простір елементарних подій, алгебра і  $\sigma$ -алгебра подій. Частота настання події, статистичне означення ймовірності. Класичне означення ймовірності. Геометричні ймовірності.

Тема 2. Аксиоматичне означення ймовірності (аксіоми Колмогорова), наслідки із аксіом. Ймовірнісний простір. Теорема додавання ймовірностей. Теорема про неперервність ймовірності.

Тема 3. Умовні ймовірності. Теорема множення ймовірностей. Залежні і незалежні події. Формула повної ймовірності. Формули Байеса.

Тема 4. Схема Бернуллі, найімовірніше число настання події. Граничні теореми в схемі Бернуллі: теорема Пуасона, локальна гранична теорема, інтегральна гранична теорема Лапласа. Наслідки. Поняття про оцінки відхилень частоти від ймовірності.

Тема 5. Випадкові величини як вимірні функції на просторі елементарних подій, їх розподіли. Функція розподілу випадкової величини, властивості. Дискретні і неперервні випадкові величини, щільність розподілу випадкової величини. Три типи розподілів. Конкретні розподіли випадкових величин: біномний розподіл, розподіл Пуасона, геометричний розподіл, гіпергеометричний, показниковий, рівномірний і нормальний розподіли. Розподіли деяких функцій від випадкових величин.

Тема 6. Випадковий вектор. Функція розподілу випадкового вектора, щільність розподілу випадкового вектора. Многовимірні дискретні випадкові величини. Незалежні випадкові величини. Розподіл функцій від векторних величин. Суми випадкових величин, згортка розподілів. Розподіл добутку, частки, випадкових величин. Розподіли  $\chi^2$ , Стюдента, Фішера.

Тема 7. Числові характеристики випадкових величин. Математичне сподівання випадкових величин, властивості. Дисперсія випадкової величини. Мода, медіана. Моменти випадкових величин. Нерівність Ляпунова. Нерівність Чебишова. Кореляційна матриця випадкового вектора, коефіцієнт кореляції двох випадкових величин. Умовні розподіли. Умовне математичне сподівання, випадок нормального розподілу.

Тема 8. Збіжність послідовності випадкових величин за ймовірністю, з ймовірністю 1, в середньому квадратичному, за розподілом. Співвідношення між типами збіжностей.

Тема 9. Закон великих чисел. Теореми Чебишова, Бернуллі. Нерівність Колмогорова, посилений закон великих чисел, теорема Бореля.

#### **Модуль 2.**

Тема 10. Характеристичні функції, їх властивості. Формули обернення. Граничні теореми для характеристичних функцій. Слаба збіжність розподілів і її еквівалентність збіжності характеристичних функцій.

Тема 11. Центральна гранична теорема, умова Ліндерберга її ймовірнісний смисл. Теорема Ліндеберга. ЦГТ для послідовності серій. ЦГТ для однаково розподілених випадкових величин. Теорема Ляпунова, як наслідок із теореми Ліндерберга. Грагчасті розподіли. Локальна гранична

теорема для гратчастих розподілів. Поняття про граничні закони відмінні від нормального, безмежно подільні, стійкі закони.

Тема 12. Вибірковий метод в статистиці. Вибірка, варіаційний ряд, емпірична функція розподілу. Теорема Глівенко як застосування закону великих чисел. Теорема Колмогорова (без доведення). Основні вибіркові характеристики, асимптотична нормальність вибіркових моментів.

Тема 13. Статистичні оцінки параметрів розподілу. Незміщеність оцінки. Спроможність оцінки. Ефективність оцінки, нерівність Крамера-Рао. Метод моментів, метод максимальної правдоподібності одержання оцінок.

Тема 14. Інтервальне оцінювання параметрів розподілу. Довірчі інтервали для ймовірності, довірчі інтервали для параметрів нормального розподілу.

Тема 15. Перевірка статистичних гіпотез, критична область, рівень значущості. Критерії для перевірки відповідності результатів дослідів із теоретичними гіпотезами про вигляд розподілу: критерій Колмогорова, критерій  $\chi^2$  (Пірсона). Перевірка гіпотез про ймовірності. Перевірка гіпотез про рівність математичних сподівань двох нормальних випадкових величин. Перевірка гіпотез про рівність дисперсій двох нормальних випадкових величин. Перевірка гіпотез про однорідність вибірок, про незалежність випадкових величин. Байєсівський підхід до розрізнення гіпотез.

Тема 16. Кореляційний і регресійний аналізи. Вибірковий коефіцієнт кореляції, лінійна регресія. Метод найменших квадратів знаходження параметрів рівняння регресії. Нелінійна регресія. Поняття про множинну регресію.

Тема 17. Ланцюги Маркова. Однорідні ланцюги, ергодична теорема Маркова.

Тема 18. Випадкові процеси, скінченно-вимірні розподіли випадкового процесу, моментні функції, класифікація процесів. Процеси з незалежними приростами, процеси Пуасона. Поняття вінерівського стаціонарного, марковського процесів.

## 6.2. Структура навчальної дисципліни

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин					
	Денна форма навчання					
	Усього	у тому числі				
лек		лаб	прак	Інд	сам	
1	2	3	4	5	6	7
<b>Семестр 5</b>						
<b>Модуль 1</b>						
<b>Тема 1.</b> Предмет і методи теорії ймовірностей. Використання ймовірнісних методів в науці, техніці, економіці. Стохастичний експеримент, випадкові події, простір елементарних подій, алгебра і $\sigma$ -алгебра подій Частота настання подій, статистичне означення ймовірності. Класичне означення ймовірності. Геометричні ймовірності.	12	2	–	4	–	6
<b>Тема 2.</b> Аксиоматичне означення ймовірності (аксіоми Колмогорова), наслідки із аксіом. Ймовірнісний простір. Теорема про неперервність ймовірності.	8	2	–	2	–	4

<b>Тема 3.</b> Умовні ймовірності. Теорема множення ймовірностей. Залежні і незалежні події. Формула повної ймовірності. Формули Байеса.	12	2	–	4	–	6
<b>Тема 4.</b> Схема Бернуллі, найімовірніше число настання події. Граничні теореми в схемі Бернуллі: теорема Пуасона, локальна гранична теорема, інтегральна гранична теорема Лапласа. Наслідки. Поняття про оцінки відхилень частоти від ймовірності.	8	2	–	2	–	4
<b>Тема 5.</b> Випадкові величини як вимірні функції на просторі елементарних подій, їх розподіли. Функція розподілу випадкової величини, властивості. Дискретні і неперервні випадкові величини, щільність розподілу випадкової величини. Три типи розподілів. Конкретні розподіли випадкових величин: біномний розподіл, розподіл Пуасона, геометричний розподіл, гіпергеометричний, показниковий, рівномірний і нормальний розподіли. Розподіли деяких функцій від випадкових величин.	16	4		4	–	8
<b>Тема 6.</b> Випадковий вектор. Функція розподілу випадкового вектора, щільність розподілу випадкового вектора. Многовимірні дискретні випадкові величини. Незалежні випадкові величини. Розподіл функцій від векторних величин. Суми випадкових величин, згортка розподілів. Розподіл добутку, частки, випадкових величин. Розподіли $\chi^2$ , Стьюдента, Фішера.	8	2	–	2	–	4
<b>Тема 7.</b> Числові характеристики випадкових величин. Математичне сподівання випадкових величин, властивості. Дисперсія випадкової величини. Мода, медіана. Моменти випадкових величин. Нерівність Ляпунова. Нерівність Чебишова. Кореляційна матриця випадкового вектора, коефіцієнт кореляції двох випадкових величин. Умовні розподіли. Умовне математичне сподівання, випадок нормального розподілу.	12	2	–	4	–	6
<b>Тема 8.</b> Збіжність послідовності випадкових величин за ймовірністю, з ймовірністю 1, в середньому, за розподілом. Співвідношення між типами збіжностей. Лема Бореля-Кантеллі.	8	2	–	2	–	4
<b>Тема 9.</b> Закон великих чисел. Теореми Чебишова, Бернуллі. Нерівність Колмогорова. Посилений закон великих чисел, теорема Бореля.	8	2	–	2	–	4
Модульна контрольна робота						
Разом за модуль 1	92	20		26		46
<b>Модуль 2</b>						
<b>Тема 10.</b> Характеристичні функції, їх властивості. Формули обернення. Граничні теореми для характеристичних функцій. Слаба збіжність розподілів і її еквівалентність збіжності характеристичних функцій.	8	2	–	2	–	4
<b>Тема 11.</b> Центральна гранична теорема, умова Ліндберга її імовірнісний смисл. Теорема Ліндеберга. ЦГТ для послідовності серій. ЦГТ для однаково розподілених випадкових величин.	8	2	–	2	–	4

Теорема Ляпунова, як наслідок із теореми Ліндерберга. Гратчасті розподіли. Локальна гранична теорема для гратчастих розподілів. Поняття про граничні закони відмінні від нормального, безмежно подільні, стійкі закони.						
<b>Тема 12.</b> Вибірковий метод в статистиці. Вибірка, варіаційний ряд, емпірична функція розподілу. Теорема Глівенко як застосування закону великих чисел. Теорема Колмогорова (без доведення). Основні вибіркові характеристики, асимптотична нормальність вибіркових моментів.	16	4	–	4	–	8
<b>Тема 13.</b> Статистичні оцінки параметрів розподілу. Незсуненість оцінки. Спроможність оцінки. Ефективність оцінки, нерівність Крамера-Рао. Метод моментів, метод максимальної правдоподібності одержання оцінок.	10	2	–	2	–	6
<b>Тема 14.</b> Інтервальне оцінювання параметрів розподілу. Довірчі інтервали для ймовірності, довірчі інтервали для параметрів нормального розподілу.	8	2	–	2	–	4
<b>Тема 15.</b> Перевірка статистичних гіпотез, криптична область, рівень значущості. Критерії для перевірки відповідності результатів досліду із теоретичними гіпотезами про вигляд розподілу: критерій Колмогорова, критерій згоди $\chi^2$ (Пірсона). Перевірка гіпотез про ймовірності. Перевірка гіпотез про рівність математичних сподівань двох нормальних випадкових величин. Перевірка гіпотез про рівність дисперсій двох нормальних випадкових величин. Перевірка гіпотез про однорідність вибірок, про незалежність випадкових величин. Байєсівський підхід до розрізнення гіпотез.	12	2	–	4	–	6
<b>Тема 16.</b> Кореляційний і регресійний аналізи. Вибірковий коефіцієнт кореляції, лінійна регресія. Метод найменших квадратів знаходження параметрів рівняння регресії.	12	2	–	4	–	6
<b>Тема 17.</b> Ланцюги Маркова. Однорідні ланцюги, ергодична теорема Маркова.	8	2	–	2	–	4
<b>Тема 18.</b> Випадкові процеси, скінченно-вимірні розподіли випадкового процесу, моментні функції, класифікація процесів. Процеси з незалежними приростами, процеси Пуасона. Поняття вінерівського стаціонарного, марковського процесів. Випадкові процеси, скінченно-вимірні розподіли випадкового процесу, моментні функції, класифікація процесів. Процеси з незалежними приростами, процеси Пуасона. Поняття вінерівського стаціонарного, марковського процесів.	8	2	–	2	–	4
Модульна контрольна робота						
Разом за модуль 2	88	20	–	24	–	46
<b>УСЬОГО ГОДИН .</b>	<b>180</b>	<b>40</b>		<b>50</b>		<b>90</b>

### 6.3. Теми практичних занять

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин
1	2
<b>Тема 1.</b> Предмет і методи теорії ймовірностей. Використання ймовірнісних методів в науці, техніці, економіці. Стохастичний експеримент, випадкові події, простір елементарних подій, алгебра і $\sigma$ -алгебра подій Частота настання події, статистичне означення ймовірності. Класичне означення ймовірності. Геометричні ймовірності.	4
<b>Тема 2.</b> Аксиоматичне означення ймовірності (аксіоми Колмогорова), наслідки із аксіом. Ймовірнісний простір. Теорема про неперервність ймовірності.	4
<b>Тема 3.</b> Умовні ймовірності. Теорема множення ймовірностей. Залежні і незалежні події. Формула повної ймовірності. Формули Байєса.	2
<b>Тема 4.</b> Схема Бернуллі, найімовірніше число настання події. Граничні теореми в схемі Бернуллі: теорема Пуасона, локальна гранична теорема, інтегральна гранична теорема Лапласа. Наслідки. Поняття про оцінки відхилень частоти від ймовірності.	2
<b>Тема 5.</b> Випадкові величини як вимірні функції на просторі елементарних подій, їх розподіли. Функція розподілу випадкової величини, властивості. Дискретні і неперервні випадкові величини, щільність розподілу випадкової величини. Три типи розподілів. Конкретні розподіли випадкових величин: біномний розподіл, розподіл Пуасона, геометричний розподіл, гіпергеометричний, показниковий, рівномірний і нормальний розподіли. Розподіли деяких функцій від випадкових величин.	4
<b>Тема 6.</b> Випадковий вектор. Функція розподілу випадкового вектора, щільність розподілу випадкового вектора. Многовимірні дискретні випадкові величини. Незалежні випадкові величини. Розподіл функцій від векторних величин. Суми випадкових величин, згортка розподілів. Розподіл добутку, частки, випадкових величин. Розподіли $\chi^2$ , Стьюдента, Фішера.	2
<b>Тема 7.</b> Числові характеристики випадкових величин. Математичне сподівання випадкових величин, властивості. Дисперсія випадкової величини. Мода, медіана. Моменти випадкових величин. Нерівність Ляпунова. Нерівність Чебишова. Кореляційна матриця випадкового вектора, коефіцієнт кореляції двох випадкових величин. Умовні розподіли. Умовне математичне сподівання, випадок нормального розподілу.	4
<b>Тема 8.</b> Збіжність послідовності випадкових величин за ймовірністю, з ймовірністю 1, в середньому, за розподілом. Співвідношення між типами збіжностей. Лема Бореля-Кантеллі.	2
<b>Тема 9.</b> Закон великих чисел. Теореми Чебишова, Бернуллі. Нерівність Колмогорова. Посилений закон великих чисел, теорема Бореля.	2
<b>Тема 10.</b> Характеристичні функції, їх властивості. Формули обернення. Граничні теореми для характеристичних функцій. Слаба збіжність розподілів і її еквівалентність збіжності характеристичних функцій.	2
<b>Тема 11.</b> Центральна гранична теорема, умова Ліндберга її ймовірнісний смисл. Теорема Ліндеберга. ЦГТ для послідовності серій. ЦГТ для однаково розподілених випадкових величин. Теорема Ляпунова, як наслідок із теореми Ліндберга. Гратчасті розподіли. Локальна гранична теорема для гратчастих розподілів. Поняття про граничні закони відмінні від нормального, безмежно подільні, стійкі закони.	2
<b>Тема 12.</b> Вибірковий метод в статистиці. Вибірка, варіаційний ряд, емпірична функція розподілу. Теорема Глівенко як застосування закону великих чисел. Теорема Колмогорова (без доведення). Основні вибіркові характеристики, асимптотична нормальність вибіркових моментів.	4
<b>Тема 13.</b> Статистичні оцінки параметрів розподілу. Незсуненість оцінки. Спроможність оцінки. Ефективність оцінки, нерівність Крамера-Рао. Метод моментів, метод максимальної правдоподібності одержання оцінок.	2
<b>Тема 14.</b> Інтервальне оцінювання параметрів розподілу. Довірчі інтервали для ймовірності, довірчі інтервали для параметрів нормального розподілу.	2
<b>Тема 15.</b> Перевірка статистичних гіпотез, критична область, рівень значущості. Критерії для перевірки відповідності результатів дослідів із теоретичними гіпотезами про	4

вигляд розподілу: критерій Колмогорова, критерій згоди $\chi^2$ (Пірсона). Перевірка гіпотез про ймовірності. Перевірка гіпотез про рівність математичних сподівань двох нормальних випадкових величин. Перевірка гіпотез про рівність дисперсій двох нормальних випадкових величин. Перевірка гіпотез про однорідність вибірок, про незалежність випадкових величин. Байєсівський підхід до розрізнення гіпотез.	
<b>Тема 16.</b> Кореляційний і регресійний аналізи. Вибірковий коефіцієнт кореляції, лінійна регресія. Метод найменших квадратів знаходження параметрів рівняння регресії.	4
<b>Тема 17.</b> Ланцюги Маркова. Однорідні ланцюги, ергодична теорема Маркова.	2
<b>Тема 18.</b> Випадкові процеси, скінченно-вимірні розподіли випадкового процесу, моментні функції, класифікація процесів. Процеси з незалежними приростами, процеси Пуасона. Поняття вінерівського стаціонарного, марковського процесів.	2
<b>УСЬОГО ГОДИН</b>	<b>50</b>

#### 6.4. Самостійна робота

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин
1	2
<b>Тема 1.</b> Предмет і методи теорії ймовірностей. Використання ймовірнісних методів в науці, техніці, економіці. Стохастичний експеримент, випадкові події, простір елементарних подій, алгебра і $\sigma$ -алгебра подій Частота настання події, статистичне означення ймовірності. Класичне означення ймовірності. Геометричні ймовірності.	6
<b>Тема 2.</b> Аксиоматичне означення ймовірності (аксіоми Колмогорова), наслідки із аксіом. Ймовірнісний простір. Теорема про неперервність ймовірності.	6
<b>Тема 3.</b> Умовні ймовірності. Теорема множення ймовірностей. Залежні і незалежні події. Формула повної ймовірності. Формули Байєса.	4
<b>Тема 4.</b> Схема Бернуллі, найімовірніше число настання події. Граничні теореми в схемі Бернуллі: теорема Пуасона, локальна гранична теорема, інтегральна гранична теорема Лапласа. Наслідки. Поняття про оцінки відхилень частоти від ймовірності.	4
<b>Тема 5.</b> Випадкові величини як вимірні функції на просторі елементарних подій, їх розподіли. Функція розподілу випадкової величини, властивості. Дискретні і неперервні випадкові величини, щільність розподілу випадкової величини. Три типи розподілів. Конкретні розподіли випадкових величин: біномний розподіл, розподіл Пуасона, геометричний розподіл, гіпергеометричний, показниковий, рівномірний і нормальний розподіли. Розподіли деяких функцій від випадкових величин.	8
<b>Тема 6.</b> Випадковий вектор. Функція розподілу випадкового вектора, щільність розподілу випадкового вектора. Многовимірні дискретні випадкові величини. Незалежні випадкові величини. Розподіл функцій від векторних величин. Суми випадкових величин, згортка розподілів. Розподіл добутку, частки, випадкових величин. Розподіли $\chi^2$ , Стюдента, Фішера.	4
<b>Тема 7.</b> Числові характеристики випадкових величин. Математичне сподівання випадкових величин, властивості. Дисперсія випадкової величини. Мода, медіана. Моменти випадкових величин. Нерівність Ляпунова. Нерівність Чебишова. Кореляційна матриця випадкового вектора, коефіцієнт кореляції двох випадкових величин. Умовні розподіли. Умовне математичне сподівання, випадок нормального розподілу.	6
<b>Тема 8.</b> Збіжність послідовності випадкових величин за ймовірністю, з ймовірністю 1, в середньому, за розподілом. Співвідношення між типами збіжностей. Лема Бореля-Кантеллі.	4
<b>Тема 9.</b> Закон великих чисел. Теореми Чебишова, Бернуллі. Нерівність Колмогорова. Посилений закон великих чисел, теорема Бореля.	4
<b>Тема 10.</b> Характеристичні функції, їх властивості. Формули обернення. Граничні теореми для характеристичних функцій. Слаба збіжність розподілів і її еквівалентність	4

збіжності характеристичних функцій.	
<b>Тема 11.</b> Центральна гранична теорема, умова Ліндерберга її імовірнісний смисл. Теорема Ліндеберга. ЦГТ для послідовності серій. ЦГТ для однаково розподілених випадкових величин. Теорема Ляпунова, як наслідок із теореми Ліндерберга. Грагчасті розподіли. Локальна гранична теорема для гратчастих розподілів. Поняття про граничні закони відмінні від нормального, безмежно подільні, стійкі закони.	4
<b>Тема 12.</b> Вибірковий метод в статистиці. Вибірка, варіаційний ряд, емпірична функція розподілу. Теорема Глівенко як застосування закону великих чисел. Теорема Колмогорова (без доведення). Основні вибіркові характеристики, асимптотична нормальність вибіркових моментів.	8
<b>Тема 13.</b> Статистичні оцінки параметрів розподілу. Незсуненість оцінки. Спроможність оцінки. Ефективність оцінки, нерівність Крамера-Рао. Метод моментів, метод максимальної правдоподібності одержання оцінок.	6
<b>Тема 14.</b> Інтервальне оцінювання параметрів розподілу. Довірчі інтервали для ймовірності, довірчі інтервали для параметрів нормального розподілу.	4
<b>Тема 15.</b> Перевірка статистичних гіпотез, криптична область, рівень значущості. Критерії для перевірки відповідності результатів дослідів із теоретичними гіпотезами про вигляд розподілу: критерій Колмогорова, критерій згоди $\chi^2$ (Пірсона). Перевірка гіпотез про ймовірності. Перевірка гіпотез про рівність математичних сподівань двох нормальних випадкових величин. Перевірка гіпотез про рівність дисперсій двох нормальних випадкових величин. Перевірка гіпотез про однорідність вибірок, про незалежність випадкових величин. Байєсівський підхід до розрізнення гіпотез.	6
<b>Тема 16.</b> Кореляційний і регресійний аналізи. Вибірковий коефіцієнт кореляції, лінійна регресія. Метод найменших квадратів знаходження параметрів рівняння регресії.	6
<b>Тема 17.</b> Ланцюги Маркова. Однорідні ланцюги, ергодична теорема Маркова.	4
<b>Тема 18.</b> Випадкові процеси, скінченно-вимірні розподіли випадкового процесу, моментні функції, класифікація процесів. Процеси з незалежними приростами, процеси Пуасона. Поняття вінерівського стаціонарного, марковського процесів.	4
<b>УСЬОГО ГОДИН</b>	<b>90</b>

## 7. ІНСТРУМЕНТИ, ОБЛАДНАННЯ ТА ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ, ВИКОРИСТАННЯ ЯКИХ ПЕРЕДБАЧАЄ НАВЧАЛЬНА ДИСЦИПЛІНА

Використовуються комп'ютери при дистанційній формі.

## 8. РЕКОМЕНДОВАНІ ДЖЕРЕЛА ІНФОРМАЦІЇ

### Основна література

1. Барковський В. В., Барковська Н. В., Лопатін О. К. Теорія ймовірностей та математична статистика. – Київ: ЦУЛ, 2002. – 448 с.
2. Гнеденко Б. В. Курс теорії ймовірностей. Підручник. – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2010. – 410с.
3. Гіхман Й.І., Скороход А.В., Ядренко М.Й. Теорія ймовірностей та математична статистика. – Київ: Вища школа, 1988. -567с
4. Дороговцев П. Л., Сільвестров Д. С., Скороход А. В., Ядренко М. Й. Теорія ймовірностей (збірник задач).– К.: Вища шк.,1977.
5. Єлейко Я.І., Копитко Б.І., Трищ Б.М. Теорія ймовірностей. Теореми, приклади і задачі. Навчально-методичний посібник.- Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2009.-260с.
6. Зайцев Є. П. Теорія ймовірностей і математична статистика. Базовий курс з індивідуальними завданнями і розв'язками типових варіантів. 2-ге видання, стереотипне. – Київ.: Алєрта, 2017. – 440 с.

7. Кармелюк Г. І. Теорія ймовірностей та математична статистика. Посібник з розв'язування задач. – Київ.: Центр учбової літератури, 2007. – 576с.
8. Карташов М. В. Теорія ймовірностей і математична статистика. – Київ: ТВіМС, 2004. – 307с.
9. Сеньо П. С. Теорія ймовірностей та математична статистика. – Київ: Знання, 2007. – 556 с.
10. Скаськів О.Б. Теорія ймовірностей. – Львів: Число, 2012
11. Слюсарчук П. В. Теорія ймовірностей та математична статистика. – Ужгород: Карпати, 2005. –

### Допоміжна література

1. Вишенський В.А., Перестюк М.О. Комбінаторика. Перші кроки. Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2010. – 325с.
2. Вища математика: Модульна технологія навчання : У 4 ч. : навч. посіб. У Ч. 4. Теорія ймовірностей і математична статистика / В. П. Денисюк, В. М. Бобков, Т. А. Погребецька, В. К. Репета. – 2-ге вид. доопрац. – К. : Вид-во Нац. авіац. ун-ту «НАУ-друк». – 2009. – 256 с.
3. Каніовська І.Ю. Теорія ймовірностей в прикладах і задачах. – Київ: Політехніка НТУУ, 2004. – 154с.
4. Карташов М. В. Імовірність, процеси, статистика. – Київ: ВПЦ Кивський університет, 2007. – 494 с.
5. Приймак В.І., Голубник О.Р. Теорія ймовірностей та математична статистика: підручник.- Львів: ЛНУ ім. Івана Франка, 2011.-556с.
6. Скороход А. В. Елементи теорії ймовірностей та випадкових процесів. – К.: Вища шк., 1975.
7. Сливка-Тилищак Г. І. Теорії ймовірностей і математична статистика: Методичний посібник. – Ужгород, 2011.
8. Слюсарчук П. В., Поляк І. Й. Методичні вказівки до самостійної роботи студентів з теорії ймовірностей та математичної статистики для студентів математичного факультету. – Ужгород, 2005.
9. Синявська О.О. Методичні вказівки та варіанти типово-розрахункових робіт з теорії ймовірностей для студентів математичного факультету. – Ужгород: ДВНЗ “УжНУ”, 2019. – 58 с.
10. Турчин В.М. Теорія ймовірностей. – Київ: АСК. 2004. – 206с.
11. Турчин В.М. Математична статистика. – Київ: Академія. - !999. – 225с.
12. Черняк О.І., Обушна О.М., Ставицький А.В. Теорія ймовірностей та математична статистика. Збірник задач. – Київ: Знання, 2002. – 199с.
13. Чорней Р. К. Практикум з теорії ймовірностей та математичної статистики. – Київ, 2006. – 328 с.

### Інформаційні ресурси в мережі Інтернет

1. <http://www.nbuv.gov.ua> – Національна бібліотека України імені В. І. Вернадського.
2. <http://mechmat.univ.kiev.ua/ua/study/library.php> – електронна бібліотека механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

**Додаток 2**

### Результати перегляду робочої програми навчальної дисципліни

Робоча програма перезатверджена на 20\_\_\_ / 20\_\_\_ н.р. без змін; зі змінами (Додаток \_\_\_).  
(потрібне підкреслити)

протокол № \_\_\_ від «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_\_ р. Завідувач кафедри \_\_\_\_\_  
(підпис) (Прізвище ініціали)

Робоча програма перезатверджена на 20\_\_\_ / 20\_\_\_ н.р. без змін; зі змінами (Додаток \_\_\_).  
(потрібне підкреслити)

протокол № \_\_\_\_ від « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20 \_\_\_\_ р. Завідувач кафедри \_\_\_\_\_  
(підпис) (Прізвище ініціали)