МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
Математичний факультет
Кафедра кібернетики і прикладної математики

Кондрук Н. Е., Маляр М.М., Повідайчик М.М.

СТИСЛИЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з курсу «*Вища математика*»
для студентів ІІ-го курсу хімічного факультету

Частина 1

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТІ.

ВИПАДКОВІ ПОДІЇ ТА ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Ужгород – 2012

В основу конспекту включено стисло увесь теоретичний матеріал розділів теорія ймовірності: випадкові події та випадкові величини ілюстрований прикладами, з курсу «Вища математика» для студентів ІІ-го курсу хімічного факультету.

Укладачі:

Кондрук Н.Е., к.т.н., доцент кафедри кібернетики і прикладної математики;

Маляр М.М., к.т.н., доцент, завідувач кафедри кібернетики і прикладної математики;

Повідайчик М.М., доцент кафедри кібернетики і прикладної математики.

Рецензенти:

Ніколенко В.В., к. ф.-м. н., доцент, доцент кафедри кібернетики і прикладної математики.

Рекомендовано кафедрою кібернетики і прикладної математики протокол № 7 від 7 березня 2012 року.

Рекомендовано Вченою Радою математичного факультету протокол № 8 від 21 березня 2012 року.

Стислий конспект лекцій з курсу «Вища математика» для студентів 2-го курсу хімічного факультету. Теорія ймовірності. Випадкові події та випадкові величини / Розробники: Н.Е. Кондрук, М.М. Маляр, М.М. Повідайчик – Ужгород, Вид-во , 2012. – 48 с.

Зміст

ВСТУП

Курс «Вища математика» служить теоретичним і практичним фундаментом при вивченні всіх природничих навчальних дисциплін, які викладаються у вищих навчальних закладах.

Програма даного курсу складена у відповідності до сучасних програм Міністерства науки і освіти, молоді та спорту України. Водночас слід відмітити, що порядок викладання окремих розділів такий, що враховує специфіку слухачів-студентів напрямів підготовки - 6.070301 - Хімія, 6.040106 – Екологія, охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування.

Мета навчальної дисципліни «Вища математика»: засвоєння теоретичного та практичного матеріалу з курсу «Вища математика» з ціллю застосування одержаних знань при вивченні всіх навчальних дисциплін даних спеціальностей.

Курс «Вища математика» читається протягом трьох семестрів, з яких перший та другий семестри закінчуються екзаменом, а третій - заліком.

Вивчення дисципліни потребує використання знань студентів з математики, що були надані в загальноосвітній середній школі.

Основними завданнями, що мають бути вирішені у процесі викладання дисципліни, є надання студентам знань з основних розділів вищої математики; вивчення означень, теорем, методів та алгоритмів; доведення основних теорем; формування умінь самостійного опрацювання математичної літератури; розвиток логічного і алгоритмічного мислення.

Структура курсу включає 6 змістових модулів. До даного конспекту лекцій включено основний теоретичний матеріал 1-го та частини 2-го модулю 3-го семестру викладання, який проілюстровано прикладами: теорія ймовірності: випадкові події та випадкові величини.

ЗМІСТ НАВЧАЛЬНОГО КУРСУ

III семестр

Модуль 1. *ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ.*

Змістовий модуль №1. *ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ.*

Лекція 1 (2/2 год)

Предмет теорії ймовірностей, основні поняття. Випробування, події. Елементи комбінаторики, біном Ньютона. Алгебра подій.

Лекція 2 (2/2 год)

Класичне означення ймовірності. Обмеження класичного означення ймовірності. Геометричне означення ймовірності.

Лекція 3 (2/2 год)

Теорема додавання несумісних подій. Протилежні події. Принцип практичної неможливості малоймовірних подій. Повна система подій. Теорема множення ймовірностей. Незалежні та залежні події. Теорема множення ймовірностей незалежних подій. Теорема додавання сумісних подій. Ймовірності появи хоча б однієї події. Умовна ймовірності. Теорема множення ймовірностей залежних подій.

Лекція 4 (2/2 год)

Формула повної ймовірності. Ймовірність гіпотез. Формула Бейєса.

Лекція 5 (2/2 год)

Повторні випробування. Формула Бернуллі. Найімовірніше число появи події при повторних випробуваннях. Локальна теореми Лапласа.

Лекція 6 (2/2 год)

Відносна частота. Стійкість відносної частоти. Статистична ймовірності. Інтегральна теореми Лапласа.

Лекція 7 (2/2 год)

Ймовірність відхилення відносної частоти від постійної ймовірності в незалежних випробуваннях. Формула Пуассона.

<u>Модуль 2.</u> ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ.
<u>Змістовий модуль №2.</u> ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ.

<u>Лекція 8 (2/2 год)</u>

Випадкові величини. Закон розподілу дискретних випадкових величин. Закон біноміального розподілу ймовірностей. Закон Пуассона. Числові характеристики дискретних випадкових величин. Математичне сподівання. ймовірнісний зміст математичного сподівання. Властивості математичного сподівання. Математичне сподівання числа появи події в незалежних випробуваннях. Дисперсія дискретної випадкової величини. Формула обчислення дисперсії. Властивості дисперсії дискретної випадкової величини. Дисперсія числа появи події в незалежних випробуваннях. Середнє квадратичне відхилення.

<u>Лекція 9 (2/2 год)</u>

Закон великих чисел. Теорема Чебишева, її значення для практики. Теорема Бернуллі. Неперервні випадкові величини. Інтегральна функція розподілу, її властивості. Графік інтегральної функції.

<u>Лекція 10 (2/2 год)</u>

Диференціальна функція розподілу, її властивості. Імовірнісний зміст диференціальної функції розподілу. Закон рівномірного розподілу. Числові характеристики неперервних випадкових величин.

<u>Лекція 11 (2/1 год)</u>

Закон нормального розподілу. Нормальна крива. Параметри нормального розподілу. Обчислення ймовірності заданого відхилення нормально розподіленої випадкової величини. Правило трьох сигм.

1. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ

1.1. Предмет теорії ймовірності. Види подій

Всі події які ми спостерігаємо діляться на: достовірні, неможливі та випадкові.

Достовірною подією Ω називається така подія яка при виконанні певних умов обов'язково відбудеться.

Неможливою подією ϕ називається така подія яка при виконанні певних умов обов'язково не відбудеться.

Випадковою подією називають таку подію яка може відбутися або не відбутися.

Кожна випадкова подія є наслідком великої кількості випадкових причин які врахувати немає можливості оскільки число їх дуже велике і закони їхні невідомі. Тому теорія ймовірності не ставить перед собою завдання спрогнозувати те, що одна випадкова подія відбудеться або не відбудеться. Вона і не в силі це зробити. Інша мова коли йдеться про масові однорідні випадкові події які багаторазово спостерігаються при виконанні певних умов. Виявляється, що достатня кількість однорідних випадкових подій, не залежно від їх конкретної природи, підпорядковується певним законам, а саме встановленням ймовірностей цих законів і займається теорія ймовірності.

Методи теорії ймовірності широко застосовуються в різних галузях природознавства і техніці. Перші роботи із теорії ймовірності виникли із спроб створення азартних ігор з XIV по XVIIст.

Предметом теорії ймовірності є моделі експериментів з випадковим результатом.

Розглядатимемо тільки такі експерименти які можна повторити при незмінних певних умовах довільну кількість раз. Будь-який результат що спостерігатиметься інтерпретуємо як випадковий результат випробуваного експерименту, тобто випадкову подію.

Подія – це результат випробування. Їх позначають: $A,\ B,\ C,\ D$.

Події називаються несумісними якщо поява однієї із них виключає появу інших в одному і тому ж випробуванні.

Події називаються єдино можливими якщо поява в результаті випробування однієї і тільки однієї з них є достовірною подією. Такі події складають сукупність елементарних ситуацій Ω.

Під множиною елементарних результатів розумітимемо таку множину взаємовиключаючих результатів, що результатом випробування завжди є один і тільки один результат.

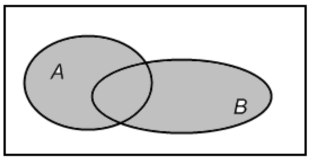
1.2. Алгебра подій

Нехай є дві події *A* і *B*. Якщо з того, що настала подія *A* слідує, що настане подія *B*, то подія *B* є *частинним випадком* події *A*, тобто $B \subset A$.

Якщо $B \subset A$ і $A \subset B$, тоді ці події називають *рівними*.

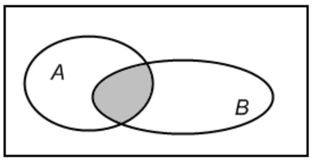
Операції над подіями

1. *Сумою двох подій A і B* називається подія *A+B*, яка полягає в появі хоча б однієї з них.



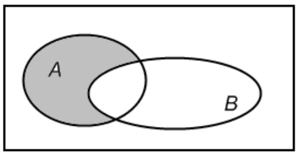
A+B

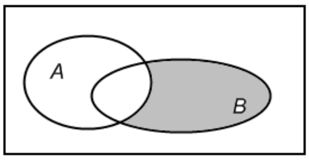
2. *Добутком двох подій A і B* називається подія *A·B*, яка полягає в одночасній появі цих подій.



A·B

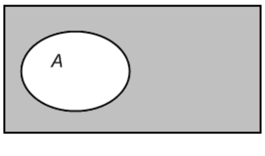
3. *Різницею двох подій A і B* називається подія *A-B (A/B)*, яка полягає в появі події А і не появі події *B*.





A-B B-A

4. *Протилежною до події A* називається подія $\overline{A}$, яка полягає в ненастанні події *A*.



$\overline{A}$

Основні властивості:

1) $\overline{A} = \Omega - A$, 2) $A - B = A \cdot \overline{B}$, 3) $A - B \neq B - A$,

4) $\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$, 5) $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$, 6) $\overline{\overline{A}} = A$.

Позначимо 0 – подія не виконалась, 1 – подія виконалась. Тоді можна скласти таблицю значень для всіх операцій над подіями.

A	*B*	$\overline{A}$	$\overline{B}$	*A+B*	*A*B*	*A-B*	*B-A*
0	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**
1	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**
1	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**

Множину подій $S = \{A, B, C, \ldots\}$ називають *алгеброю подій*, якщо:

1) для довільних подій A, B із множини S, $A+B,\ A \cdot B,\ A - B,\ \overline{A}$ також належать множині S;

2) $\Omega, \phi \in S$.

Приклад

Проаналізувати подію: $A \cdot (B - C) + \overline{C}$.

Розв'язання:

A	*B*	*C*	$\overline{C}$	*B-C*	$A \cdot (B - C)$	$A \cdot (B - C) + \overline{C}$
0	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**
0	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**
0	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**
1	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**

Отже, подія $A \cdot (B - C) + \overline{C}$ полягає в тому, що події *A, B, C* не виконались, або *A, C* не виконались і В виконалась, або *B, C* не виконались і *A* виконалась, або *B* не виконалась і *A* виконалась, або *A, B* виконались, а *C* – ні.

Тобто, $A \cdot (B - C) + \overline{C} = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}C + AB\overline{C}$.

1.3. Елементи комбінаторики

Нехай дано n елементів.

1. Всі впорядковані сукупності з n елементів називаються перестановками. Число перестановок із n елементів позначають $P_n = n!$, де $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.
2. Числом комбінацій із n елементів по k називається сполуки, кожна із яких містить k елементів взятих із даних n елементів, і відрізняється від іншої хоча б одним елементом.

Число комбінацій обчислюється за формулою: $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

3. Числом розміщень із n елементів по k називається сполуки, кожна із яких містить k елементів взятих із даних n елементів, і відрізняється від іншої або елементами або порядком елементів.

Число розміщень позначається: $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Приклади

1. Розклад одного дня містить 5 уроків. Визначити кількість таких розкладів при виборі із 11 дисциплін.
2. Скількома способами модна вибрати трьох чергових із групи 20-ти чоловік?
3. Знайти кількість можливих слів, які можна утворити із 4 букв (під словом будемо розуміти будь-який набір цих букв).

Розв'язання:

1. Так як порядок слідування уроків в розкладі важливий, то потрібно скористатись числом розміщень: $A_{11}^5 = \dfrac{11!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 = 55440$.

2. Так як порядок чергових не є важливим, то користуємось числом комбінацій: $C_{20}^3 = \dfrac{20!}{17! \cdot 3!} = \dfrac{18 \cdot 19 \cdot 20}{2 \cdot 3} = 1140$.

3. Кількість все можливих слів визначається кількістю можливих перестановок 4-ох букв: $P_4 = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Біном Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^n b^n.$$

C_n^k – біноміальний коефіцієнт.

Властивості

а) $C_n^k = C_n^{n-k}$.

$$C_{16}^{12} = C_{16}^4 = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 1820$$

б) $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

Трикутник Паскаля

1 1	
1 2 1	C_2^k
1 3 3 1	C_3^k
1 4 6 4 1	C_4^k
1 5 10 10 5 1	C_5^k

1.4. Класичне означення ймовірності

Ймовірність це число, що характеризує можливість появи події і є одним із головних понять теорії ймовірності. Є декілька означень цього поняття.

Приклад

В урні є 10 кульок, 2 з них червоні, 3 – сині та 5 – білих . Яка ймовірність того, що з урни буде витягнуто синю кульку?

Розв'язання:

Подію яка полягає в тому що з урни буде вийнято синю кульку позначимо A.

Ω = {ч; ч; с; с; с; б; б; б; б; б;}

Подія A, що може наступити при вийняті синьої кульки A = {с; с; с;}.

Легко бачити що всі елементарні результати є рівно можливими і єдино можливими. Ті елементарні результати в яких подія A наступить назвемо сприятливими. У нас є 3 сприятливих результати, всіх – 10.

Відношення числа сприятливих до всіх результатів і оцінює можливість вийняти кульку синього кольору, $P(A) = \frac{3}{10}$.

Ймовірністю події A називають відношення числа сприятливих появ події A до числа всіх несумісних рівно можливих і єдино можливих результатів випробування.

Позначають $P(A) = \frac{m}{n}$, де n - число всіх можливих результатів випробування, а m - число сприятливих появ події A.

Властивості:

1. Ймовірність достовірної події дорівнює 1.
2. Ймовірність неможливої події дорівнює 0.

3. Ймовірність випадкової події більше 0 і менше 1: $0 \le P(A) \le 1$.

Приклади

I) Монету підкидують три рази. Знайти ймовірності того що:

а) A - герб випаде 1 раз;

б) B - ні разу не випаде цифра;

в) C - герб випаде більше раз ніж цифра.

II) Підкидують два гральних кубика. Знайти ймовірність того, що сума очок на двох випавших гранях дорівнює 7.

III) В ящику є 15 деталей, серед них 10 пофарбованих. Збиральник навмання виймає 3 деталі, Яка ймовірність того, що вийняті деталі будуть пофарбовані?

IV) В групі 15 студентів, серед яких 7 відмінників. По списку навмання вибирають 6 студентів. Знайти ймовірність того, що серед вибраних студентів будуть 4 відмінники.

V) В ящику є 6 пронумерованих кубиків. З ящика виймають всі кубики по черзі. Знайти ймовірність того, що кубики виймуться в зростаючому порядку.

VI) Група з 8 осіб займає місця за круглим столом випадковим чином. Яка ймовірність того, що дві певні особи сядуть поруч?

Розв'язання:

I) а) A - герб випаде 1 раз;

$P(A) = \frac{m}{n}$; Ω = {г,г,г; г,г,ц; г,ц,г; ц,г,г; г,ц,ц; ц,г,ц; ц,ц,г; ц,ц,ц;}

n=8 , m=3 , $P(A) = \frac{3}{8}$.

б) B - ні разу не випаде цифра;

n=8 , m=1 , $P(B) = \frac{1}{8}$.

в) C – герб випаде 2-а або 3 рази;

$P(C) = \frac{4}{8}$.

II) A - подія, яка полягає в тому, що сума на двох випавши гранях дорівнює 7.

1+6=7, 2+5=7, 3+4=7, 4+3=7, 5+2=7, 6+1=7.

n=36 , m=6 , $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

III) A - вийняті деталі пофарбовані.

$$P(A)=\frac{m}{n}\ ,\ \ n=C_{15}^{3}\ ,\ m=C_{10}^{3}\ .$$

$$P(A)=\frac{C_{10}^{3}}{C_{15}^{3}}=\frac{10!}{3!*7!}*\frac{3!*12!}{15!}=\frac{24}{91}$$

IV) A - серед 6-ти вибраних студентів 4 відмінники.

$$P(A)=\frac{m}{n}\ ,\ \ n=C_{15}^{6}\ ,\ m=C_{17}^{4}*C_{8}^{2}\ .$$

$$P(A)=\frac{C_{7}^{4}*C_{8}^{2}}{C_{15}^{6}}=\frac{7!}{4!*3!}*\frac{8!}{2!*6!}*\frac{6!*9!}{15!}=\frac{28}{143}$$

V) A - кубики виймуться в зростаючому порядку.

$$P(A)=\frac{m}{n}\ ,\ n=P_{6}=6!\ ,\ m=1. \qquad P(A)=\frac{1}{720}\,.$$

VI) A - дві певні особи сядуть поруч.

$$P(A)=\frac{m}{n}\ ,\ n=P_{8}=8!\ ,\ m=2*8*P_{6}\,.$$

$$P(A)=\frac{2*8*P_{6}}{P_{8}}=\frac{2*8*6!}{8!}=\frac{2}{7}\,.$$

Відносна частота. Стійкість відносної частоти. Обмеження класичного означення ймовірності

Відносною частотою – називається відношення числа випробувань в яких подія A настала до числа всіх проведених випробувань, $W(A)=\frac{M}{N}$.

M - число випробувань коли подія A настала;

N - число всіх випробувань.

Приклад

Відділ технічного контролю виявив у партії, з 80 деталей, 3 браковані деталі. Знайти відносну частоту бракованих деталей.

Очевидно, що : $W(A)=\frac{3}{80}$.

Довготривалі спостереження показали що, якщо в однорідних умовах проводити досліди в кожному з яких число випробувань достатньо велике то $W(A)$ виявляє так

звану властивість стійкості. Ця властивість полягає в тому що, якщо випробування проводилися різними дослідниками то $W(A)$ коливається біля деякого числа. Виявляється це число рівне ймовірності.

Класичне означення передбачає обмеження кількості результатів випробування. На практиці це число може дорівнювати ∞, а це і є обмеженість.

Цей недолік легко подолати перейшовши до границі.

Не завжди можна представити результати випробувань у вигляді сукупності елементарних результатів, але ще важче вказати основи, що дозволять вважати елементарні результати рівно можливими.

Тому поряд з класичною ймовірністю вводять статистичну ймовірність. За статистичну ймовірність приймають відносну частоту.

1.5. Геометричне означення ймовірності

Нехай задано деяку алгебру подій $F = \{A, B, C, \ldots, \Omega, \phi\}$.

Кожній події із множини F поставимо у відповідність деяку підмножину деякого простору, наприклад, по схемі: виберемо деяку область G і поставимо їй у відповідність достовірну подію, а довільній випадковій події $A -$ область $g_A \subset G$.

Нехай в G задана міра підмножини. Міру довжини множини (області) g позначимо $mes(g)$.

Введемо наступний **постулат**. *Для кожної події A ймовірність цієї події пропорційна мірі множини g_A, причому:*

$P(B) = K \cdot mes(g_B)$, $P(A) = K \cdot mes(g_A)$. (*)

Враховуючи, що ймовірність достовірної події рівна 1 ($P(\Omega) = 1$) і (*), отримаємо $P(\Omega) = k \cdot mes(G) = 1$. Тобто, $k = \dfrac{1}{mes(G)}$.

Тоді враховуючи (*) геометричне означення ймовірності буде виражатись формулою: $P(A) = \dfrac{mes(g_A)}{mes(G)}$.

Приклади

1) *Задача про зустріч*. Дві особи домовились зустрітись в межах однієї години. Враховуючи, що обидві особи зайняті, то кожен буде чекати 20 хв. на місці зустрічі. Знайти ймовірність їх зустрічі.

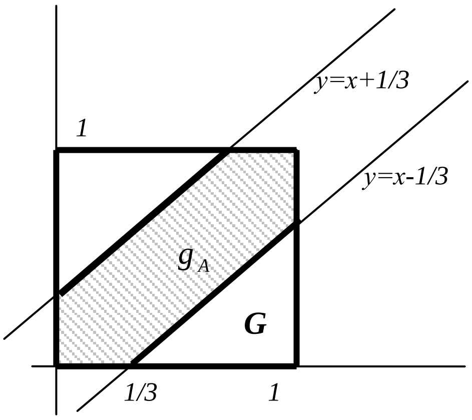
2) На відрізку [-1,1] навмання вибирають два дійсних числа. Знайти *P(A), P(B), P(AB), P(A/B), P(A+B),* якщо подія *A={сума вибраних чисел більша одиниці}*, *B={добуток вибраних чисел менший 1/2}*.

Розв'язання:

1) Позначимо подію *A,* що полягає в тому, що дві особи зустрілись.

Позначимо x – момент прибуття на місце зустрічі першої особи, y – другої особи. Очевидно, що $G=\{(x,y)|0\le x,y\le 1\}$ – квадрат, що визначає достовірну подію Ω.

$g_A=\left\{(x,y)\middle| |x-y|\le\frac{1}{3}\right\}$ – умова, що визначає подію *A*.



Тобто, $\frac{1}{3}\le x-y\le\frac{1}{3}$,

$$\begin{cases} y\ge x-\frac{1}{3} \\ y\le x+\frac{1}{3} \end{cases},$$

$$P(A)=\frac{mes(g_A)}{mes(G)}=\frac{\text{площа}(g_A)}{\textit{площа}(G)}\ P(A)=\frac{1-\frac{4}{9}}{1}=\frac{5}{9}.$$

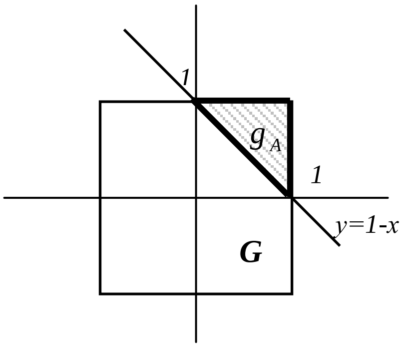
2) Нехай x, y – вибрані числа, тоді G – множина точок квадрату: $G=\{(x,y)|-1\le x\le 1,\ -1\le y\le 1\}$. А події, ймовірності яких треба знайти визначаються множинами:

$g_A=\{(x,y)|(x,y)\in G,\ x+y>1\}$, $g_B=\{(x,y)|(x,y)\in G,\ x\cdot y<1/2\}$,

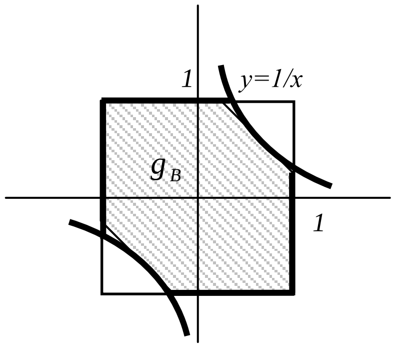
$g_{A+B}=\{(x,y)|(x,y)\in G,\ x+y>1\ \text{або}\ \text{x}\cdot\text{y}<1/2\}$,

$g_{A\cdot B}=\{(x,y)|(x,y)\in G,\ x+y>1\ i\ \text{x}\cdot\text{y}<1/2\}$

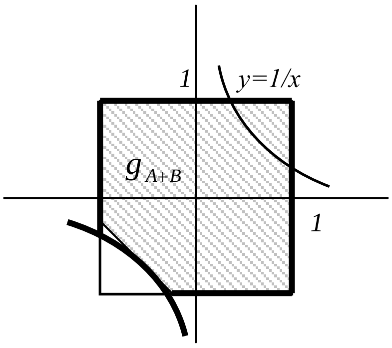
$g_{A/B}=\{(x,y)|(x,y)\in G,\ x+y>1\ i\ \text{x}\cdot\text{y}\ge 1/2\}$.



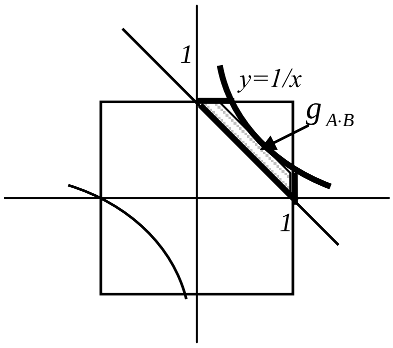
Подія *A*



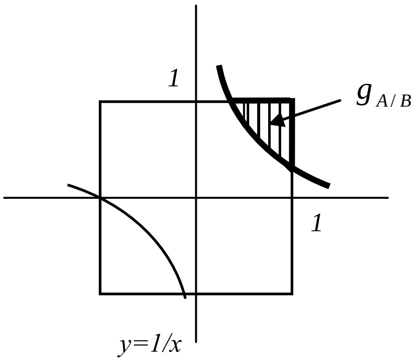
Подія *B*



Подія *A+B*



Подія *AB*



Подія *A/B*

На рисунках графічно зображено всі множини, що відповідають шуканим подіям.

$S_G = 2*2 = 4$ од.^{2}, $\quad S_{g_A} = \frac{1}{2}*1*1 = \frac{1}{2}$ од.^{2},

$$S_{g_B} = 4 - 2\int_{1/2}^{1}\left(1-\frac{1}{x}\right)dx = 4 - 2(x - \ln x)\Big|_{1/2}^{1} = 4 - 2(1/2 - \ln 2) = 3 - 2\ln 2$$

$$S_{g_{A+B}} = 4 - \int_{1/2}^{1}\left(1-\frac{1}{x}\right)dx = 4 - (x - \ln x)\Big|_{1/2}^{1} = 4 - (1 - 1/2 - \ln 2) = \frac{3}{2} - \ln 2$$

$$S_{g_{A\cdot B}} = \frac{1}{2} - \int_{1/2}^{1}\left(1-\frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \ln 2 = \ln 2,$$

$$S_{g_{A/B}} = \int_{1/2}^{1}\left(1-\frac{1}{x}\right)dx = (x - \ln x)\Big|_{1/2}^{1} = (1 - 1/2 - \ln 2) = \frac{1}{2} - \ln 2 \cdot$$

Отже, $P(A) = \frac{S_{g_A}}{S_G} = \frac{1/2}{4} = \frac{1}{8}$, $P(B) = \frac{S_{g_B}}{S_G} = \frac{3 - 2\ln 2}{4}$,

$$P(A+B) = \frac{S_{g_{A+B}}}{S_G} = \frac{3/2 - \ln 2}{4} = \frac{3 - 2\ln 2}{8},$$

$$P(AB) = \frac{S_{g_{AB}}}{S_G} = \frac{\ln 2}{4},\ P(A/B) = \frac{S_{g_{A/B}}}{S_G} = \frac{1/2 - \ln 2}{4} = \frac{3 - 2\ln 2}{8}.$$

1.6. Теореми додавання ймовірностей

подій

Сумою подій A і B називають таку подію C, яка полягає у появі хоча б однієї з них.

Для несумісних подій: сумою подій A і B називають таку подію C, яка полягає у появі події або A, або B.

Теорема додавання несумісних подій

Ймовірність появи хоча б однієї із двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій: $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Доведення:

Позначимо m_1 - число появ події A;

m_2 - число появ події B;

Тоді m_1+m_2 - число появ події або A, або B;

n - число всіх результатів випробувань.

$$P(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=P(A)+P(B).$$

Теорема доведена.

Ця теорема має місце і для будь якої нескінченної кількості попарно несумісних подій.

Теорема додавання сумісних подій

Ймовірність появи хоча б однієї із двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх одночасної появи: $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$.

Протилежні події

Дві несумісні та єдино можливі події називаються протилежними, та позначаються A і $\overline{A}$, або протилежною до події A називається подія $\overline{A}$, яка полягає в ненастанні події A.

Для протилежних подій має місце т**еорема.**

Сума ймовірностей двох протилежних подій дорівнює 1: $P(A)+P(\overline{A})=1$.

Доведення

Оскільки за означенням A і $\overline{A}$ єдино можливі і несумісні то, поява однієї з них є достовірною подією: $P(A+\overline{A})=1$.

За теоремою додавання несумісних подій маємо $P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})=1$,

$P(A)=p$; $P(\overline{A})=q$; $P(\overline{A})=1-p$; $q=1-p$.

Принцип практичної неможливості

малоймовірних подій

При розв'язуванні практичних задач часто зустрічається події з малою ймовірністю. Чи можна вважати що малоймовірна подія в одному випробуванні не відбудеться? Такого висновку зробити не можна. Хоча тривалі дослідження показали, що малоймовірні події в своїй більшості в одному випробуванні, як правило, не наступають. У зв'язку з цим прийнятий принцип практичної неможливості малоймовірних подій.

Якщо випадкова подія має дуже малу ймовірність, то можна вважати що в одному випробуванні ця подія не настане.

Істотно виникає питання на скільки малою може бути ця ймовірність? Це визначається в кожному окремому прикладі.

Розглянемо дві такі задачі:

1. Поїзд М-В запізнюється з ймовірністю 0,01. Тоді, очевидно, можна вважати що поїзд не запізниться?
2. Ймовірність того що парашут не відкриється рівна 0,01. Тоді в цьому прикладі ця ймовірність буде великою.

Повна система подій

Система подій A_1, A_2,.., A_n називається повною, якщо в результаті випробування наступить одна і тільки одна з цих подій.

З цього означення випливає, що ці події єдино можливі, рівно можливі, попарно несумісні.

Теорема

Для повної системи сума ймовірності, що утворюють повну систему дорівнює 1, тобто - $P(A_1)+P(A_2)+..+P(A_n)=1$.

Доведення:

З означення випливає, що подія $E=A_1+A_2+...+A_n$ є достовірною. Тоді

$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = 1$. За теоремою додавання попарно несумісних подій $P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1$.

Теорема доведена.

Дві події називаються незалежними, якщо ймовірність однієї з них не залежить від появи або не появи іншої.

1.7. Теорема множення ймовірностей незалежних подій

Добутком подій A і B називається подія $C = A \cdot B$, що полягає у сумісній появі подій A і B. Аналогічно дається означення добутку для декількох подій.

Теорема

Ймовірність сумісної появи двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій: $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

Доведення:

Нехай n число всіх елементарних результатів випробування в яких подія A наступить або не наступить, n_1 - число появ події A, m - число всіх елементарних результатів випробування в яких подія B наступить або не наступить, m_1 - число появ події B. $n_1 \le n$, $m_1 \le m$.

Очевидно що загальна кількість $m \cdot n$.

$$P(A \cdot B) = \frac{n_1 \cdot m_1}{n \cdot m} = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{m_1}{m} = P(A) \cdot P(B).$$

Доведено.

Щоб узагальнити цю теорему для більшої кількості подій потрібно ввести поняття незалежних подій у сукупності.

Події називаються незалежними у сукупності, якщо кожна з них та будь-яка комбінація інших подій є незалежними подіями.

Тобто, A_1, A_2, A_3 – незалежні, якщо A_1 і A_2; A_1 і A_3; A_2 і A_3; $A_1 A_2$ і A_3; $A_1 A_3$ і A_2; $A_2 A_3$ і A_1 - незалежні події.

Наслідок

Ймовірність сумісної появи декількох подій незалежних в сукупності дорівнює добутку ймовірностей цих подій: $P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$.

Приклад

Студент розшукує потрібну йому формулу у трьох довідниках. Ймовірність того, що формула міститься у першому довіднику дорівнює 0,6, у другому 0,7, в третьому 0,8. Знайти ймовірність того, що формула міститься:

а) тільки в одному довіднику; б) тільки в двох довідниках; в) в усіх трьох довідниках; г) хоча б в одному із довідників.

Розв'язання:

Нехай A_1 - подія яка полягає в тому, що формула міститься в першому довіднику.

A_2 - подія яка полягає в тому, що формула міститься в другому довіднику.

A_3 - подія яка полягає в тому, що формула міститься в третьому довіднику

$P(A_1) = 0{,}6$; $P(A_2) = 0{,}7$; $P(A_3) = 0{,}8$.

а) B - подія яка полягає в тому, що формула міститься тільки в одному довіднику.

$B = A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3$; За теоремами додавання і множення можна записати:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A}_3) + \\ + P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(A_3) =$$

$$= 0{,}6 * (1 - 0{,}7) * (1 - 0{,}8) + (1 - 0{,}6) * 0{,}7 * (1 - 0{,}8) + \\ + (1 - 0{,}6) * (1 - 0{,}7) * 0{,}8 = 0{,}188 .$$

б) C - подія яка полягає в тому, що формула міститься тільки в двох довідниках.

$C = A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3$;

$$P(C) = P(A_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(A_3) + P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) =$$

$$= 0{,}6 * (1 - 0{,}7) * 0{,}8 + 0{,}6 * 0{,}7 * (1 - 0{,}8) + \\ + (1 - 0{,}6) * 0{,}7 * 0{,}8 = 0{,}452 .$$

в) D - подія яка полягає в тому, що формула міститься в трьох довідниках.

$D = A_1 * A_2 * A_3$; $P(D) = P(A_1) * P(A_2) * P(A_3) = 0{,}6 * 0{,}7 * 0{,}8 = 0{,}336$.

г) E - подія яка полягає в тому, що формула міститься хоча б в одному із довідників. $E = A + B + C$;

$P(E) = P(A) + P(B) + P(C) = 0{,}188 + 0{,}452 + 0{,}336 = 0{,}976$

Ймовірність появи хоча б однієї події

Теорема

Ймовірність появи хоча б однієї з подій $A_1,\ A_2, ..., A_n$ незалежних в сукупності дорівнює різниці між одиницею і добутком ймовірностей протилежних подій $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2, ...,\ \overline{A}_n$, тобто $P(A) = 1 - P(\overline{A}_1) * P(\overline{A}_2) * ... * P(\overline{A}_n)$;
$P(A) = 1 - q_1 * q_2 * ... * q_n$.

Доведення:

Нехай A поява хоча би однієї з подій $A_1,\ A_2, \ldots, A_n$, протилежною подією буде $\overline{A} = \overline{A}_1 * \overline{A}_2 * \ldots * \overline{A}_n$. За теоремою про протилежні події $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

Отримуємо $P(A) = 1 - P(\overline{A}_1) * P(\overline{A}_2) * ... * P(\overline{A}_n)$.

Доведено.

Наслідок

Якщо події $A_1,\ A_2, ..., A_n$ - рівно можливі тоді $P(A) = 1 - q^n$.

Приклад

Стрілець стріляє по цілі 6 разів, ймовірність попадання в ціль дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що хоча б раз стрілець влучить в ціль.

Розв'язання:

$$P(A) = 1 - q^n = 1 - 0{,}2^6 = 1 - 0{,}000064 = 0{,}999936.$$

1.9. Теорема множення залежних подій. Умовна ймовірність

Нехай події A і B залежні, тоді випливає, що ймовірність появи однієї з них залежить від ймовірності появи або не появи іншої.

<u>Умовною ймовірністю</u> $P_B(A)$ називається ймовірність події A обчислена при умові, що подія B відбулась.

Нехай події A і B залежні, причому ймовірності $P(A)$ і $P_A(B)$ відомі. Знайти ймовірність сумісної появи подій A і B.

Теорема множення залежних подій.

Ймовірність сумісної появи двох залежних подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них та умовній ймовірності другої обчисленій при умові, що перша подія вже наступила: $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$.

Доведення:

Нехай n число всіх можливих результатів випробування в яких подія A настала або не настала. n_1 - число всіх сприятливих результатів появі події A, m - число результатів випробування в яких наступила подія B в припущенні що подія A вже наступила.

$$P(A*B)=\frac{m}{n}=\frac{m}{n}*\frac{n_1}{n_1}=\frac{n_1}{n}*\frac{m}{n_1}=P(A)*P_A(B).$$

Доведено.

Зауважимо:

$$A*B=B*A;\ P(A*B)=P(A)*P_A(B),\ P(B*A)=P(B)*P_B(A).$$

$$P(A*B)=P(A)*P_A(B)=P(B)*P_B(A).$$

Наслідок

Для декількох залежних подій теорему можна записати: $P(A*B*C)=P(A)*P_A(B)*P_{A*B}(C)$.

Приклад

Із цифр 1, 2, 3, 4, 5 вибирають по черзі 2 цифри. Знайти ймовірність того, що: а) два рази випала парна цифра; б) другий раз випала парна цифра; с) парна цифра буде вибрана.

Розв'язання:

Позначимо A_1 - перша цифра парна. A_2 - друга цифра парна.

Тоді $\overline{A}_1$ - перша цифра непарна, $\overline{A}_2$ - друга цифра непарна.

а) $P(A_1*A_2)=P(A_1)*P_{A_1}(A_2)=\frac{2}{5}*\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$.

б) $B=A_1*A_2+\overline{A}_1*A_2$;

$$P(B)=P(A_1)*P_{A_1}(A_2)+P(\overline{A}_1)*P_{\overline{A}_1}(A_2)=\frac{1}{10}+\frac{3}{5}*\frac{2}{4}=\frac{2}{5}$$

с) $C=A_1*A_2+\overline{A}_1*A_2+A_1*\overline{A}_2$;

$$P(C)=P(A_1)*P_{A_1}(A_2)+P(\overline{A}_1)*P_{\overline{A}_1}(A_2)+P(A_1)*P_{A_1}(\overline{A}_2)=$$

$$=\frac{2}{5}+\frac{2}{5}*\frac{3}{4}=\frac{7}{10}.$$

Приклад

Студент знає 20 із 25 питань програми. Залік вважається зданим якщо студент відповість на 3-и із 4-ох питань в білеті. Глянувши на 1-ше питання студент виявив що він його знає. Яка ймовірність того, що студент здасть залік?

Розв'язання:

A - подія яка полягає в тому, що студент знає 2-ге питання;

B - подія яка полягає в тому, що студент знає 3-тє питання;

C - подія яка полягає в тому, що студент знає 4-те питання.

$$D = A*B*C + A*B*\overline{C} + A*\overline{B}*C + \overline{A}*B*C;$$

$$P(D) = P(A)*P_A(B)*P_{A*B}(C) + P(A)*P_A(B)*P_{A*B}(\overline{C}) +$$
$$+ P(A)*P_A(\overline{B})*P_{A*\overline{B}}(C) + P(\overline{A})*P_{\overline{A}}(B)*P_{\overline{A}*B}(C) =$$
$$= \frac{19}{24}*\frac{18}{23}*\frac{17}{22} + \frac{19}{24}*\frac{18}{23}*\frac{5}{22} + \frac{19}{24}*\frac{5}{23}*\frac{18}{22} + \frac{5}{24}*\frac{19}{23}*\frac{17}{22} = \frac{228}{253}$$

1.9. Формула повної ймовірності

Нехай подія A є такою, що може відбутися тільки тоді коли настане одна із подій $B_1, B_2, \ldots, B_n$ які утворюють повну систему подій.

Теорема

Ймовірність появи події A, яка може наступити тільки при умові що наступить одна і тільки одна із подій B_1, B_2, ..., B_n, які утворюють повну систему подій, дорівнює сумі добутків ймовірностей події B_1, B_2, ..., B_n на відповідні умовні ймовірності події A.

Доведення:

$$A = B_1*A + B_2*A + \ldots + B_n*A;$$

$$P(A) = P(B_1)*P_{B_1}(A) + P(B_2)*P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)*P_{B_n}(A);$$

$$P(B_1) + P(B_2) + \ldots + P(B_n) = 1.$$

Теорема доведена.

Приклад

В групі спортсменів: 20 – лижників, 6 – велосипедистів і 4 – бігуни. Ймовірність виконання кваліфікаційної норми лижника – 0,9, велосипедиста - 0,8, бігуна – 0,75. Знайти ймовірність того, що спортсмен викликаний на удачу виконає норму.

Розв'язання:

A - спортсмен викликаний на удачу виконає норму.

B_1 - лижник; B_2 - велосипедист; B_3 - бігун.

$P(B_1)=\dfrac{2}{3}$, $P(B_2)=\dfrac{1}{5}$, $P(B_3)=\dfrac{2}{15}$. $P_{B_1}(A)=0{,}9$, $P_{B_2}(A)=0{,}8$, $P_{B_3}(A)=0{,}75$.

$$P(A)=P(B_1)*P_{B_1}(A)+P(B_2)*P_{B_2}(A)+P(B_3)*P_{B_3}(A)=$$
$$=\frac{2}{3}*0{,}9+\frac{1}{5}*0{,}8+\frac{2}{15}*0{,}75=0{,}86.$$

1.10. Формула Байеса

Розглянемо подію A яка може відбутися тільки тоді коли настане одна із подій $B_1, B_2, \ldots, B_n$, які утворюють повну систему подій. Події $B_1, B_2, \ldots, B_n$ називаються <u>гіпотезами.</u> Нехай подія A уже наступила. Потрібно переоцінити ймовірності появи гіпотези при умові, що подія A наступила.

Запишемо формулу повної ймовірності:

$$P(A)=P(B_1)*P_{B_1}(A)+P(B_2)*P_{B_2}(A)+\ldots+P(B_n)*P_{B_n}(A).$$

$$P(A*B_1)=P(B_1*A);$$

$$P(B_1)*P_{B_1}(A)=P(A)*P_A(B_1);$$

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)*P_{B_1}(A)}{P(A)}$$ – <u>Формула Байеса</u>, де

$$P(A)=P(B_1)*P_{B_1}(A)+P(B_2)*P_{B_2}(A)+\ldots+P(B_n)*P_{B_n}(A)$$

Приклад

Відомо, що 5% всіх чоловіків і 0,25% жінок дальтоніки. На обстеження прийшла однакова кількість чоловіків і жінок. Навмання вибрана особа виявилась дальтоніком. Яка ймовірність того, що це є чоловік?

Розв'язання:

A - навмання вибрана особа дальтонік;

B_1 - вибраний для обстеження чоловік;

B_2 - вибрана для обстеження жінка.

$P(A)=P(B_1)*P_{B_1}(A)+P(B_2)*P_{B_2}(A)$, умовні ймовірності відомі $P_{B_1}(A)=0{,}05$, $P_{B_2}(A)=0{,}0025$, $P(B_1)=0{,}5$, $P(B_2)=0{,}5$.

$$P(A)=0{,}5*0{,}05+0{,}5*0{,}0025=0{,}02625$$

Скористаємось формулою Байеса:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) * P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{0{,}5 * 0{,}05}{0{,}02625} = \frac{100}{105}.$$

1.11. Повторні випробування

Формула Бернуллі

Нехай проводяться n незалежних випробувань в кожному з яких ймовірність появи події відома, ця ймовірність може бути як різною так і однаковою. Ми будемо розглядати такі випробування в яких ймовірність $p \quad (0 < p < 1)$ однакова.

Потрібно знайти ймовірність появи події рівно k раз в n незалежних випробуваннях. На це питання дає відповідь формула Бернуллі.

Теорема

Ймовірність появи події рівно k раз в n незалежних випробуваннях, в яких в кожному випробуванні ймовірність появи дорівнює $p \quad (0 < p < 1)$ обчислюється за формулою :

$$P_n(k) = C_n^k * p^k * q^{n-k},\ C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},\ q = 1 - p.$$

Доведення:

Нехай проводяться три випробування ймовірність появи події в кожному випробуванні дорівнює $p \quad (0 < p < 1)$. Знайти ймовірність того, що подія наступить рівно 2 рази в цих випробуваннях. Скористаємось теоремою додавання і множення ймовірностей.

Нехай A_1 - I-ше випробування; A_2 - II-ге випробування; A_3 - III-тє випробування; A - подія наступить лише у двох випробуваннях.

$A = A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3 + A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3 + \overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3;$

$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = p,$

$P(A) = p \cdot p \cdot q + p \cdot q \cdot p + q \cdot p \cdot p = C_3^2 \cdot p^2 \cdot q^{3-2}.$

Доведено.

Цією формулою користуються у випадку невеликої кількості випробувань. У випадку ж великої кількості випробувань використовується формула Лапласа.

Приклади

1) Ймовірність того, що витрати електроенергії протягом доби не перевищили норму дорівнює 0,75. Знайти ймовірність того, що у найближчі 6 діб витрати електроенергії на протязі 4 днів не перевищать норму.

***Розв'язання*:**

$p = 0{,}75$; $n = 6$; $k = 4$; $q = 0{,}25$.

Потрібно знайти: $P_6(4)$.

$$P_6(4) = C_6^4 * p^4 * q^2 = \frac{6!}{4!*2!} * \left(\frac{3}{4}\right)^4 * \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 0{,}296.$$

2) Два рівні шахісти грають в шахи, що ймовірніше виграти 2 партії із 4, або 3 із 6 партій.

***Розв'язання*:**

$p = 0{,}5$; $q = 0{,}5$; I.) $n = 4$; $k = 2$. II.) $n = 6$; $k = 3$.

I. $P_4(2) = C_4^2 * 0{,}5^2 * 0{,}5^2 = 0{,}375.$

II. $P_6(3) = C_6^3 * 0{,}5^3 * 0{,}5^3 = 0{,}31.$

Отже ймовірніше виграти дві партії із чотирьох.

Локальна та інтегральна теореми Лапласа

Нехай проводяться n незалежних випробувань в кожному з яких ймовірність появи події є постійною і дорівнює p $(0 < p < 1)$ і нехай кількість випробувань є достатньо великою. Для того, щоб знайти ймовірність появи події рівно k разів в цих випробуваннях, користуватись формулою Бернуллі немає змісту. Тому користуються наближеною формулою.

Теорема Муавра-Лапласа (локальна теорема Лапласа)

Ймовірність появи події в n незалежних випробуваннях, в кожному з яких її ймовірність дорівнює p $(0 < p < 1)$, рівно k разів дорівнює: $P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} * \varphi(x)$, де

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ - *диференційна функція Лапласа, значення якої наведені в таблиці додатку 1, а* $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Теорема

Функція $\varphi(x)$ є парною: $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Приклад

Ймовірність попадання в ціль при одному пострілі дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що із 100 пострілів буде влучено в ціль рівно 75 разів.

Розв'язання:

$p = 0,8;\ n = 100;\ k = 75;\ q = 0,2$.

Скористаємось локальною теоремою Лапласа.

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{n*p*q}}*\varphi(x),\ x = \frac{k-n*p}{\sqrt{n*p*q}}.$$

$$x = \frac{75-100*0,8}{\sqrt{100*0,8*0,5}} = -1,25,\ P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{100*0,8*0,2}}*\varphi(-1,25) = \frac{1}{4}*\varphi(1,25) = 0,0456.$$

Інтегральна теорема Лапласа

Нехай проводяться n незалежних випробувань в кожному з яких ймовірність появи події є постійною і дорівнює p $(0 < p < 1)$. Для того, щоб обчислити ймовірність появи події в цих випробуваннях від k_1 до k_2 разів користуються інтегральною теоремою Лапласа. Значення інтегральної функції Лапласа наведені в таблиці 2.

Інтегральна теорема Лапласа

Ймовірність появи події в n незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність появи події є постійною і дорівнює p $(0 < p < 1)$ від k_1 до k_2 раз обчислюється за формулою: $P_n(k_1,k_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, де $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Для інтегральної функції Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, значення x в додатках наведені тільки до $x = 5$, при всіх x більше 5-ти – $\Phi(x) = 0,5$.

Зауваження

Інтегральна функція Лапласа є непарною: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Нехай $k_1 < m < k_2$, тоді

$$P\left(\frac{k_1 - n*p}{\sqrt{n*p*q}} < \frac{m - n*p}{\sqrt{n*p*q}} < \frac{k_2 - n*p}{\sqrt{n*p*q}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx .$$

Приклад

Ймовірність попадання в ціль при одному пострілі дорівнює 0,8 проведено 100 пострілів. Знайти ймовірність того, що:

а) влучено буде неменше 75 разів і не більше 90 разів; б) влучено буде неменше 75 разів; в) влучено буде не більше 74 разів.

***Розв'язання*:**

$$P_n(k_1, k_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

а) Дано: $p = 0{,}8$; $n = 100$; $q = 0{,}2$; $k_1 = 75$; $k_2 = 90$. Знайти: $P_{100}(75{,}90)$.

$$x_1 = \frac{75 - 80}{4} = -1{,}25,\ x_2 = \frac{90 - 80}{4} = 2{,}5;$$

$$P_{100}(75{,}90) = \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25) = 0{,}8882 .$$

б) Дано: $p = 0{,}8$; $n = 100$; $q = 0{,}2$; $k_1 = 75$; $k_2 = 100$. Знайти: $P_{100}(75{,}100)$.

$$x_1 = \frac{75 - 80}{4} = -1{,}25,\ x_2 = \frac{100 - 80}{4} = 5;$$

$$P_{100}(75{,}100) = \Phi(5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(5) + \Phi(1{,}25) = 0{,}5 + 0{,}3944 = 0{,}8944 .$$

в) Дано: $p = 0{,}8$; $n = 100$; $q = 0{,}2$; $k_1 = 0$; $k_2 = 74$. Знайти: $P_{100}(0{,}74)$.

Події неменше 75 разів і не більше 74 разів є протилежні, тому $P_{100}(0{,}74) = 1 - P_{100}(75{,}100) = 1 - 0{,}8994 = 0{,}1056$.

Ймовірність відхилення відносної частоти від постійної ймовірності в незалежних випробуваннях

Знайти ймовірність відхилення відносної частоти від постійної ймовірності. Обчислимо ймовірність того, що відносна частота відхилиться від постійної ймовірності на величину ε, тобто $P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\}$.

$$-\varepsilon < \frac{m}{n} - p < \varepsilon;\ -\varepsilon < \frac{m - n*p}{n} < \varepsilon;$$

$$-\varepsilon * \sqrt{\frac{n}{p*q}} < \frac{m - n*p}{n} * \sqrt{\frac{n}{p*q}} < \varepsilon * \sqrt{\frac{n}{p*q}};$$

$$-\varepsilon*\sqrt{\frac{n}{p*q}}<\frac{m-n*p}{\sqrt{n*p*q}}<\varepsilon*\sqrt{\frac{n}{p*q}};$$

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=P\left\{-\varepsilon*\sqrt{\frac{n}{p*q}}<\frac{m-n*p}{n}<\varepsilon*\sqrt{\frac{n}{p*q}}\right\};$$

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=2\Phi\left(\varepsilon*\sqrt{\frac{n}{p*q}}\right).$$

Приклад

Ймовірність того, що деталь не є стандартною дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що серед виготовлених 400 деталей відносна частота появи нестандартної деталі відхиляється від ймовірності 0,1 не більше ніж на 0,03.

***Розв'язання*:**

$$P\left\{\left|\frac{m}{400}-0{,}1\right|<0{,}03\right\}=2\Phi\left(0{,}03*\sqrt{\frac{400}{0{,}1*0{,}9}}\right)=2\Phi(2)=2*0{,}4772=0{,}9544$$

Закон Пуассона

Нехай проводиться n незалежних випробувань в кожному з яких ймовірність появи події є постійною і дорівнює p $(0<p<1)$. Обчислити ймовірність появи події рівно k раз в цих незалежних випробуваннях у випадку малої ймовірності. Очевидно, користуватись формулою Бернуллі немає можливості.

Скористаємось формулою Бернуллі для виведення формули Пуассона.

$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ введемо позначення $np=\lambda$, звідки $p=\frac{\lambda}{n}$, $q=1-p=1-\frac{\lambda}{n}$.

Тоді $P_n(k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}*\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k*\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$ перейдемо до границі при $n\to\infty$.

$$P_n(k)\approx\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{k!(n-k)!}*\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k*\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}=$$

$$=\frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\frac{n*(n-1)\ldots(n-(k-1))}{n^k}*\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}=$$

$$=\frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}*\frac{n-1}{n}*\ldots*\frac{n-(k-1)}{n}*\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}*\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n=$$

$$=\frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}1*\left(1-\frac{1}{n}\right)*\left(1-\frac{2}{n}\right)*\ldots*\left(1-\frac{k-1}{n}\right)*\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}*\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n=$$

$$==\frac{\lambda^k}{k!}\frac{\lim}{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n=\frac{\lambda^k}{k!}\frac{\lim}{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}}\right]^{(-\lambda)}=\frac{\lambda^k}{k!}*e^{-\lambda}.$$

$P_n(k)\approx\frac{\lambda^k}{k!}*e^{-\lambda}$, $np=\lambda$ – формула Пуассона.

Приклади

1) Завод відправив на базу 5 тисяч якісних виробів, які з ймовірністю 0,0002 в дорозі зіпсуються. Яка ймовірність того, що на базу приїде 3 зіпсованих вироби?

2) Комутатор обслуговує 100 абонентів, ймовірність того, що на протязі хвилини абонент подзвонить на комутатор дорівнює 0,01. Знайти ймовірність того, що на протязі хвилини :

а) подзвонить 3 абонента;

б) подзвонить менше 3 абонентів;

в) подзвонить більше 3 абонентів;

г) подзвонить хоча б один абонент;

Розв'язання:

1) $n=5000$, $p=0{,}0002$, $P_5(3)$ - ?

$$P_n(k)\approx\frac{\lambda^k}{k!}*e^{-\lambda},\quad \lambda=5000*0{,}0002=1.$$

$$P_{5000}(3)=\frac{1^3*e^{-1}}{3!}=\frac{1}{6*e}\approx 0{,}06\,.$$

2) $n=100$, $p=0{,}01$, $\lambda=n*p=100*0{,}01=1$, $P_n(k)\approx\frac{\lambda^k}{k!}*e^{-\lambda}$;

а) $P_{100}(3)=\frac{1^3*e^{-1}}{3!}=\frac{1}{6*e}\approx 0{,}06\,.$

б) $P_{100}(0)+P_{100}(1)+P_{100}(2)=\frac{1}{e}+\frac{1}{e}+\frac{1}{2e}=\frac{5}{2e}\approx 0{,}9197\,.$

в) $P+Q=1$,

$$P=1-Q=1-(P_{100}(0)+P_{100}(1)+P_{100}(2)+P_{100}(3))=$$
$$=1-(0{,}9197+0{,}06)=0{,}019$$

г) $Q_1=1-P_{100}(0)=1-\frac{1}{e}=1-0{,}36788=0{,}632.$

2. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Випадковою величиною називають таку величину, яка в результаті випробування прийме одне і тільки одне з можливих значень наперед невідоме і залежне від випадкових причин, які попередньо не можуть бути враховані. Ми будемо розглядати дискретні та неперервні випадкові величини.

Дискретною випадковою величиною називають таку випадкову величину, яка приймає точкові (ізольовані) значення (які можна порахувати) із усіх можливих.

Неперервною випадковою величиною називають таку величину, яка приймає всі свої можливі значення з деякого проміжку.

2.1. Дискретні випадкові величини

Для будь-якої випадкової величини недостатньо відомостей про їх можливі значення потрібно, ще знати імовірність появи цих значень.

X	P
x_1	p_1
x_2	p_2
..	..
..	..
x_n	p_n

Перелік всіх випадкових значень дискретної випадкової величини та їх відповідних ймовірностей називається закон розподілу дискретних випадкових величин.

При чому $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

Приклади

1. У лотереї випущено 1000 білетів розігруються: 1 виграш по 1000 гривень, 4 – 500 гр., 5 – 400 гр., 10 – 1000 гр. Знайти закон розподілу вартості виграшів для володаря 1 лотерейного білету.

***Розв'язання*:**

X	P
1000	0,001
500	0,004
400	0,005
100	0,010
0	0,980

$x_1 = 1000$ $\quad$ $p_1 = 0{,}001$

$x_2 = 500$ $\quad$ $p_2 = 0{,}004$

$x_3 = 400$ $\quad$ $p_3 = 0{,}005$

$x_4 = 100$ $\quad$ $p_4 = 0{,}010$

$x_5 = 0$ $\quad$ $p_5 = 0$

$$p_5 = 1 - \left(p_1 + p_2 + p_3 + p_4\right) = 0{,}980$$

2. Скласти закон розподілу для випадкової величини x^2, якщо відомо закон розподілу для випадкової величини x.

X	P	x^2	P
x_1	p_1	${x_1}^2$	p_1
x_2	p_2	${x_2}^2$	p_2
..	..	..	..
..	..	..	..
x_n	p_n	${x_n}^2$	p_n

***Розв'язання*:**

Випадкова величина x^2 прийме своє значення ${x_1}^2$ тоді і тільки тоді, коли випадкова величина x прийме своє значення x_1 із імовірності p_1.

Біноміальний закон розподілу

Нехай ймовірність прийняття деяких значень дискретної випадкової величини обчислюється за формулою Бернуллі тоді очевидно, що всі ці значення імовірності є членами розладу Бінома – Ньютона.

$$\left(p+q\right)^n = C_n^{\ n} p^{\ n} + C_n^{\ n-1} p^{n-1} q + C_n^{\ n-2} p^{n-2} q^2 + \ldots + C_n^{\ 0} q^n .$$

Приклад

Монету підкидують 4 рази необхідно знайти закон розподілу ймовірності випадкової величини числа випадання герба.

***Розв'язання*:**

x	0	1	2	3	4
p	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

$$p_4(0) = C_4^{\ 0} p^0 g^4 = \frac{1}{16},\ p_4(1) = C_4^{\ 1} p^1 g^3 = \frac{1}{4},\ p_4(2) = C_1^{\ 2} p^2 g^2 = \frac{3}{8},$$

$$p_4(3) = C_3^{\ 2} p^3 g^3 = \frac{1}{4}.$$

Закон розподілу Пуассона

Якщо для деякої дискретної випадкової величини ймовірність прийняття деякого можливого значення обчислюється за формулою Пуассона то її закон розподілу називається законом Пуассона.

Задача.

Приклад

1. Комутатор деякого підприємства обслуговує 100 клієнтів, імовірність дзвінка за 1 хвилину на комутатор дорівнює 0,01. Записати закон розподілу кількості дзвінків на комутатор протягом 1 хвилини.

***Розв'язання*:**

X	0	1	2	3	…
P	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{2e}$	$\frac{1}{6!}$	…

2. Екзаменатор задає студентам додаткові питання імовірність того, що студенти знатимуть відповідь на будь – яке питання дорівнює 0,9. Використовуючи припущення, що іспит закінчиться, якщо студент не знає запропоноване питання знайти закон розподілу числа заданих додаткових запитань екзаменатором.

Розв'язання:

$x_1 = 1$ $\quad$ $p_1 = 0{,}9$

$x_2 = 2$ $\quad$ $p_2 = 0{,}1*0{,}9 = 0{,}09$

$x_3 = 3$ $\quad$ $p_3 = 0{,}9*0{,}9*0{,}1 = 0{,}081$

X	1	2	3	…
p	0,9	0,09	0,081	…

Числові характеристики дискретних випадкових величин

Відомо що закон розподілу повністю описує випадкову дискретну величину, тобто закон розподілу невідомо і приходиться обмежуватись меншими відомостями але інколи навіть вигідно користуватися числами, які описують випадкову величину сумарно. Такі числа називаються числовими характеристиками випадкової величини.

До них відносяться математичне сподівання $M(x)$, дисперсія $D(x)$ та середньоквадратичне відхилення $\sigma(x)$.

Математичне сподівання та його властивості

Математичне сподівання дискретної випадкової величини число, що дорівнює

$M(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$, де x_i - значення випадкової величини,

p_i - відповідно імовірності.

Приклад 1

x	2	3	5	7
p	0,1	0,3	0,4	0,2

$M(x)$ =2*0,1+3*0,3+5*0,4+7*0,2=0,2+0,9+2,0+1,4=4,7

Приклад 2

Знайти математичне сподівання числа появи події A в одному випробуванні, якщо імовірність появи події A в одному випробуванні дорівнює p.

Якщо проводиться одне випробування.

x	0	1
p	q	p

$M(x) = 1p + 0q = p$

Властивості математичного сподівання

1. Математичне сподівання сталої дорівнює самій сталій.

$M(c)=c$.

2. Сталу можна винести за знак математичного сподівання.

$M(cx)=cM(x)$.

Доведення:

x	x_1	x_2
p	p_1	p_2
cx	cx_1	cx_2
p	p_1	p_2

$$M(cx)=c x_1 p_1 + c x_2 p_2 = c(x_1 p_1 + x_2 p_2) = cM(x)$$

Випадкова величина cx прийме своє значення тільки тоді коли випадкова величина x прийме своє значення x_1 з імовірності p_1.

Отже імовірність прийняти значення $x_1 = p_1$

Доведено.

3. Ймовірність суми двох випадкових величин математичного сподівання суми дорівнює сумі математичного сподівання.

$$M(x+y)=M(x)+M(y)$$

x	x_1	x_2
p	p_1	p_2

y	y_1	y_2
p	q_1	q_2

$x+y$	x_1+y_1	x_1+y_2	x_2+y_1	x_2+y_2
p	p_{11}	p_{12}	p_{21}	p_{22}

Доведення:

$$M(x+y)=(x_1+y_1)\,p_{11}+(x_1+y_2)\,p_{12}+(x_2+y_1)\,p_{21}+(x_2+y_2)\,p_{22}=x_1\,p_{11}+y_1\,p_{11}+x_1\,p_{12}+$$

$$+y_2\,p_{12}+x_2\,p_{21}+y_1\,p_{21}+x_2\,p_{22}+y_2\,p_{22}=x_1(p_{11}+p_{12})+x_2(p_{21}+p_{22})+y_1(p_{11}+p_{21})+$$
$$+y_2(p_{12}+p_{22})=(x_1p_1+x_2p_2)+(y_1q_1+y_2q_2)=M(x)+M(y).$$

Доведемо, що $p_{11}+p_{12}=p_1$

Подія, яка полягає в тому, що випадкова величина x прийме значення x_1 з імовірністю p_1, тягне за собою подію, яка полягає в тому, що випадкова величина $x+y$ прийме значення x_1 або y_1 або x_1+y_2 з імовірністю p_{11} і p_{12}. Тобто з імовірності $p_{11}+p_{12}$ (за теоремою додавання ймовірностей)і навпаки.

Аналогічно доводиться ($p_{21}+p_{22}$), ($p_{11}+p_{21}$), ($p_{12}+p_{22}$).

Доведено.

4) Математичне сподівання добутку двох незалежних величин дорівнює добутку математичного сподівання цих величин.

$$M(x\cdot y)=M(x)\cdot M(y)$$

Доведення:

Нехай нам відомо, закони розподілу випадкових величин x та y.

x	x_1	x_2
p	p_1	p_2

y	y_1	y_2
p	q_1	q_2

xy	x_1y_1	x_1y_2	x_2y_1	x_2y_2
p	p_1q_1	p_1q_2	p_2q_1	p_2q_2

$$M(xy)=x_1y_1p_1q_1+x_1y_2p_1q_2+x_2y_1p_2q_1+x_2y_2p_2q_2=x_1p_1(y_1q_1+y_2q_2)+x_2p_2(y_1q_1+y_2q_2)=$$

$$=(x_1p_1+x_2p_2)(y_1q_1+y_2q_2)=M(x)M(y).$$

Доведено.

Ймовірнісний зміст математичного сподівання

Нехай проводяться n незалежних випробування, в яких випадкова величина x прийме m_1 раз значення x_1, x_2 - m_2 рази, x_k - m_k раз. Причому $m_1 + m_2 + ... + m_k = n$.

Сума всіх значень x дорівнює $x_1 m_1 + x_2 m_2 + ... + x_k m_k$.

Знайдемо середнє арифметичне значення x:

$$\overline{X} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + ...+ x_k m_k}{n} = x_1 \frac{m_1}{n} + x_2 \frac{m_2}{n} + x_k \frac{m_k}{n} = x_1 w_1 + x_2 w_2 + ... + x_k w_k,$$

Причому

$$W_1 = \frac{m_1}{n} = p_1, \quad W_2 = \frac{m_2}{n} = p_2, \quad W_k = \frac{m_k}{n} = p_k$$

$$\overline{X} \approx x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_k p_k = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = M(x).$$

Отже, математичне сподівання визначає середнє арифметичне значення випадкової величини.

Дисперсія. Відхилення випадкової математичної величини від свого математичного сподівання

Теорема

Математичне сподівання відхилення випадкової величини від свого математичного сподівання $M(x)$ дорівнює 0.

Доведення:

Скористаємося властивістю математичного сподівання

$$M(x - M(x)) = 0 \quad M(x) - M(M(x)) = M(x) - M(x) = 0$$

За властивістю 3 маємо:

$$M(x) + M(-M(x)).$$

Доведено.

Для того, щоб оцінити розсіювання випадкової величини навколо свого математичного сподівання потрібно відхилення брати по модулю або враховувати квадрати відхилень.

За дисперсію приймемо математичне сподівання: $D(x) = M[(x - M(x^2))]$

$$D(x) = M[(x - M(x))^2] = M[x^2 - 2xM(x) + M^2(x)] = M(x^2) - 2M(x)M(x) + M^2(x) =$$

$$= M(x^2) - M^2(x),$$

$$D(x) = M(x^2) - M^2(x).$$

Властивості дисперсії

1) Дисперсія сталої дорівнює 0.

Доведення:

За означенням: $D(c) = M[(c - M(c))^2] = M[(c - c)^2] = 0$.

Доведено.

2) Сталу у квадраті можна винести за знак дисперсії: $D(cx) = c^2 D(x)$.

Доведення:

$$D(cx) = M[(cx - M(cx))^2] = M[(cx - cM(x))^2] = M[(c(x - M(x)))^2] = M[(c^2(x - M(x)))^2] =$$

$$= c^2 M[(x - M(x))^2] = c^2 D(x).$$

Доведено.

3) Дисперсія суми двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсії цих величин: $D(x+y) = D(x) + D(y)$.

Доведення:

Скористаємося формулою:

$$D(x) = M(x^2) - M^2(x)$$

$$D(x+y) = M[(x+y)^2] - M^2(x+y) = M(x^2 + 2xy + y^2) - [M(x+y)]^2 = M(x^2) + 2M(x)M(y) +$$
$$+ M(y^2) - [M(x) + M(y)]^2 = M(x^2) + 2M(x)M(y) + M(y^2) - M^2(x) - 2M(x)M(y) - M^2(y) =$$
$$= [.M(x^2) - M^2(x)] + [M(y^2) - M^2(y)] = D(x) + D(y).$$

Доведено.

Наслідки

1) $D(c+x) = D(x)$

2) $D(x+y+z) = D(x) + D(y) + D(z)$.

Середньоквадратичне відхилення

Середньоквадратичним відхиленням називається корінь з дисперсії: $G(x) = \sqrt{D(x)}$.

Приклади

1. За заданим законом розподілу дискретної випадкової величини знайти дисперсію та середньоквадратичне відхилення.

Розв'язання:

X	P	XP	X^2	X^2P
2	0,1	0,2	4	0,4
3	0,2	0,6	9	1,8
5	0,4	2,0	25	10,0
8	0,2	1,6	64	12,8
9	0,1	0,9	81	8,1
27	1,0	5,7	183,0	33,1

$M(x) = 5{,}3$

$D(x) = 33{,}1 - (5{,}3)^2 = 5{,}01$

$\sigma(x) = \sqrt{5 * 0{,}1} = 2{,}23$

2. Знайти дисперсію числа появи події в одному випробуванні імовірність появи події випробування p.

Розв'язання:

Математичне сподівання появи події A знайдено в попередньому прикладі.

$M(x) = p$

За формулою $D(x) = M(x^2) - M^2(x)$,

$$D(x) = 0^2 q + 1^2 p - p^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

3. Нехай проводяться n незалежних випробувань, в кожному з яких імовірність появи події A $(0 < p < 1)$. Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини числа події A в цих випробування.

Розв'язання:

Позначимо:

A_1 – подія, яка полягає у тому, що подія A наступить в 1 випробуванні.

A_2 – подія, яка полягає у тому, що подія A наступить в 2 випробуванні.

A_3 – подія, яка полягає у тому, що подія A наступить в 3 випробуванні.

…

A_n – подія, яка полягає у тому, що подія A наступить n випробуванні

Число появи події A в кожному з випробувань дорівнює:

$$M(x) = M(x_1) + M(x_2) + ... + M(x_n) = p + p + ... + p = n\,p$$

Математичне сподівання числа події A в n незалежних випробуваннях дорівнює np.

Аналогічно дисперсія:

$$D(x) = D(x_1) + D(x_2) + ... + D(x_n) = n\,p\,q$$

$$D(x_1) = D(x_2) = ... = D(x_n) = pq$$

4. Підкидується кубик 10 разів. Знайти математичне сподівання та дисперсію появи 6 очок на випавшій грані.

Розв'язання:

Дано: $n = 10,\ \ p = \frac{1}{6},\ \ q = \frac{5}{6}$.

$$M(x) = np = \frac{10}{6} = \frac{5}{6};\quad D(x) = n\,p\,q = 10\,\frac{1}{6}\,\frac{5}{6} = \frac{25}{18}.$$

2.2. Неперервні випадкові величини. Інтегральна функція розподілу випадкової величини

Розглянемо випадкову величину x, значення якої належить деякому проміжку $x \in [a;b]$, перелік можливих значень для такої випадкової величини неможливий. Це вказує на доцільність дати загальний спосіб задання типів випадкових величин. З цією метою і вводиться так звана інтегральна функція розподілу $F(x)$.

Нехай x дійсне число. Функція, що визначає ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення менше x назвемо <u>інтегральною функцією розподілу</u>: $P(X < x) = F(x)$.

Отже $F(x)$ - це дійсно функція.

Геометрично це означає, що $F(x)$ ймовірність того, що X прийме значення лівіше x маленького.

Випадкова величина X називається <u>неперервною</u> випадковою величиною, якщо її інтегральна функція є неперервною.

Властивості інтегральної функції розподілу

1) $0 \le F(x) \le 1$

Множина значень інтегральної функції є проміжком [0,1], тому що вона є ймовірністю, а будь – яка ймовірність не може бути більшою 1 і не може бути від'ємною.

2) Інтегральна функція є неспадною: $x_2 > x_1 \Rightarrow F(x_2) \ge F(x_1)$.

Доведення:

Нехай $x_2 > x_1$ подія, яка полягає у тому, що $x < x_2$ визначається як події які полягають в тому $x < x_1$ $x_1 \le x \le x_2$. За теоремою додавання ймовірностей:

$$P(x < x_2) = P(x < x_1) + P(x_1 \le x < x_2);$$

$$P(x < x_2) - P(x \le x_1) = P(x_1 \le x < x_2);$$

Так як $P(x_1 \le x < x_2) \ge 0$, $P(x < x_2) - P(x - x_1) \ge 0$, $P(x - x_2) \ge P(x < x_1)$, то $F(x_2) \ge F(x_1)$.

Доведено.

Наслідки

1) $P(a \le x \le b) = F(b) - F(a)$

Ймовірність прийняття випадкової величини на проміжку $[a;b]$ дорівнює різниці інтегральних функцій на кінцях проміжку.

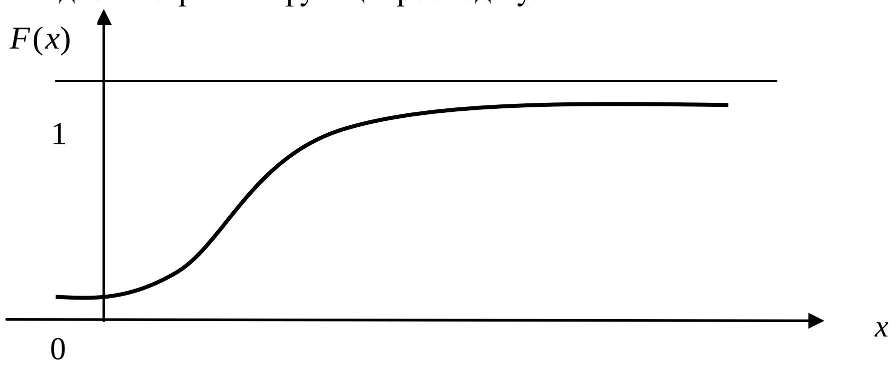
2) $P(x = x_1) = 0$ для неперервних випадкових величин.

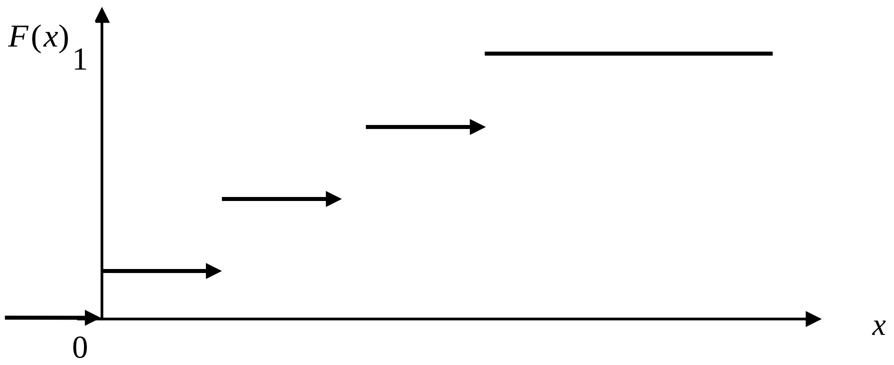
3) $P(a \le x \le b) = P(a < x < b) = P(a < x \le b) = P(a \le x \le b)$

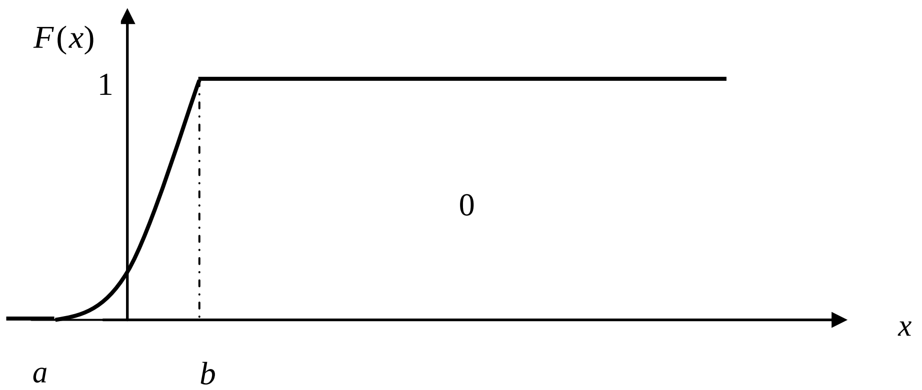
4) Якщо $x \in [a;b]$ тоді $F(x) = 0$, при $x < a$ і $F(x) = 1$, при $x > b$;

якщо ж $x \in (-\infty;\infty)$ тоді $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ і $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Виходячи із вищеозначених властивостей можна схематично показати, як графічно виглядає інтегральна функція розподілу.







Приклади

1. За заданим законом розподілу побудувати інтегральну функцію розподілу $F(x)$.

x	1	3	4	6

p	0,1	0,3	0,4	0,2

Розв'язання:

$F(x) = P(X < x)$

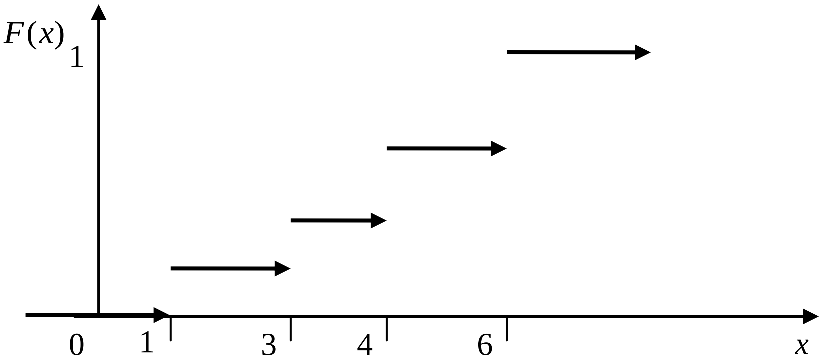
1) $x < 1 \quad P(X < x) = F(x) = 0$,

2) $1 \le x \le 3, \quad P(X < x) = F(x) = 0{,}1$,

3) $3 \le x < 4, \quad F(x) = 0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}4$,

4) $4 \le x < 6, \quad F(x) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}4 = 0{,}7$,

5) $x \ge 6, \quad F(x) = 1.$



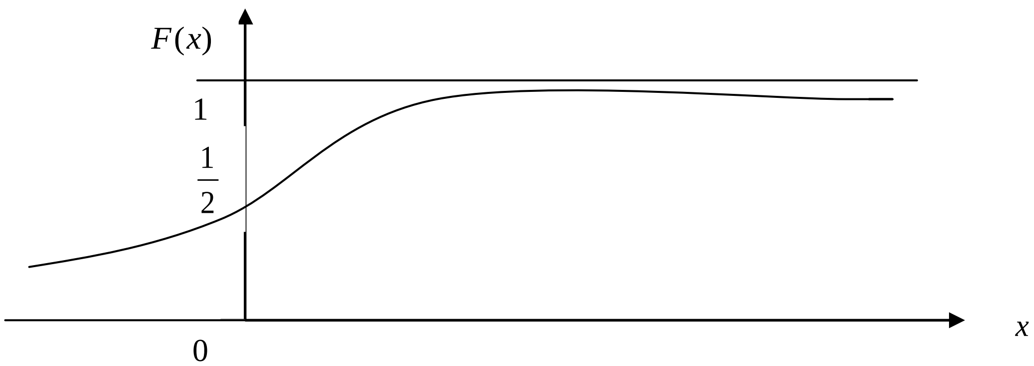
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x < 1 \\ 0{,}1, & \textit{при} \quad 1 \le x < 3 \\ 0{,}4, & \textit{при} \quad 3 \le x < 4 \\ 0{,}8, & \textit{при} \quad 4 \le x < 6 \\ 1, & \textit{при} \quad x \ge 6 \end{cases}$$

2. Дано інтегральну функцію розподілу: $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctgx$.

Знайти $P(-1 < x < \sqrt{3})$ та побудувати графік.

Розв'язання:

$$P(-1 < x < \sqrt{3}) = F(\sqrt{3}) - F(-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} arctg\sqrt{3} - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} arctg(-1)) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{7}{12}$$



$\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$,

$\lim\limits_{x \to -\infty} (\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctgx) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot (-\frac{\pi}{2}) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctgx) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1$

Диференціальна функція розподілу ймовірностей

Диференціальною функцією розподілу $f(x)$ називають першу похідну від інтегральної функції розподілу: $f(x)=F'(x)$. Диференціальна функція не визначається для дискретної випадкової величини.

Теорема

Ймовірність того, що неперервна випадкова величина X попаде в проміжок [a,b] визначається з формули: $P(a<X<b)=\int\limits_{b}^{a} f(x)dx$.

Доведення:

$P(a<x<b)=F(b)-F(a)$

Якщо $f(x)$ є похідною від $F(x)$ то $F(x)$ є первісною для $f(x)$.

$F(b)-F(a)=\int\limits_{a}^{b} F'(x)\,dx=\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$.

Доведено.

Наслідок

Із цієї теореми можна встановити формулу для знаходження інтегральної функції за диференціальною функцією розподілу тобто :

$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx=P(X<x)$.

Властивості диференціальної функції розподілу

1. Диференціальна функція є невід'ємною: $f(x)\geq 0$.

Доведення:

$F(x)$ - є неспадною тому її похідна є невід'ємною.

Доведено.

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,d(x)=1$

Графік диференціальної функції розподілу може мати точки розриву.

Приклади

1. Дано $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad \mathrm{x}\leq\text{-2} \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{x}{2}, & -2<x<2 \\ 1, & \text{при} \quad \mathrm{x}\geq 2 \end{cases}$.

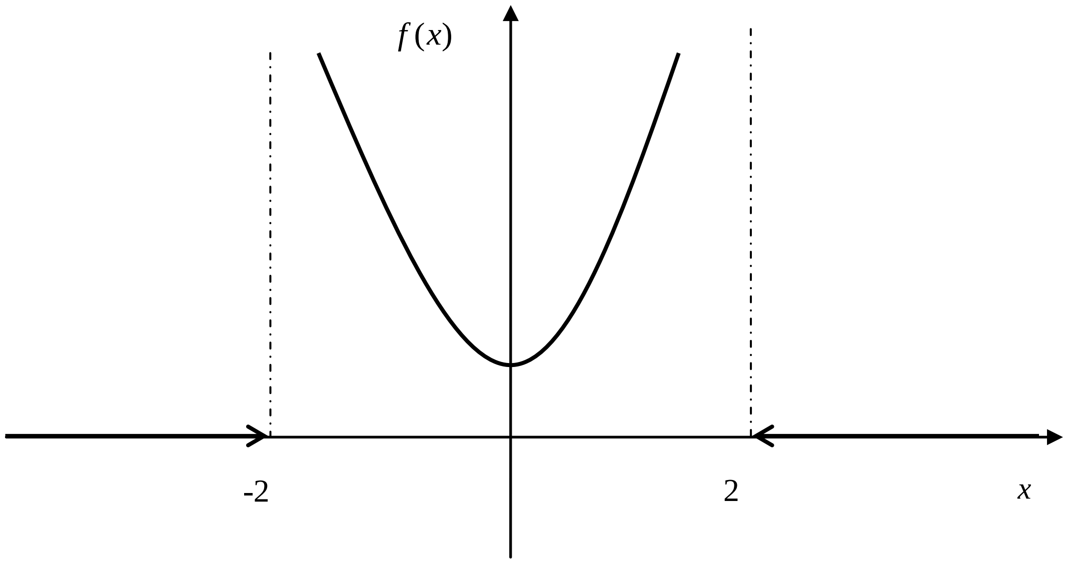
Знайти:

1. $P(-1<x<1)$,
2. $f(x)$,
3. Побудувати графік.

Розв'язання:

$$P(-1<x<1)=F(1)-F(-1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{1}{2}-(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin(-\frac{1}{2}))=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{1}{3}$$

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -2\\ \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}\cdot\frac{1}{2}, & -2<x<2\\ 0, & x\ge 2\end{cases},\quad f(x)=\begin{cases}0, & x\le -2\\ \frac{1}{\pi\sqrt{4-\pi^2}}, & -2<x<2\\ 0, & x\ge 2\end{cases}.$$



2. Дано $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ c\sin 3x, & 0<x\le\frac{\pi}{3}\\ 0, & x\ge\frac{\pi}{3}\end{cases}.$

Знайти:

1. c - ?,
2. $P(\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{4})-?$,
3. $f(x)-?$

Розв'язання:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,d(x)=1,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{\infty}^{0} 0\,dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} c\sin 3x\,dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\infty} 0\,dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} c\sin 3x\,dx=1,$$

$$c\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\sin 3x\,dx=1,$$

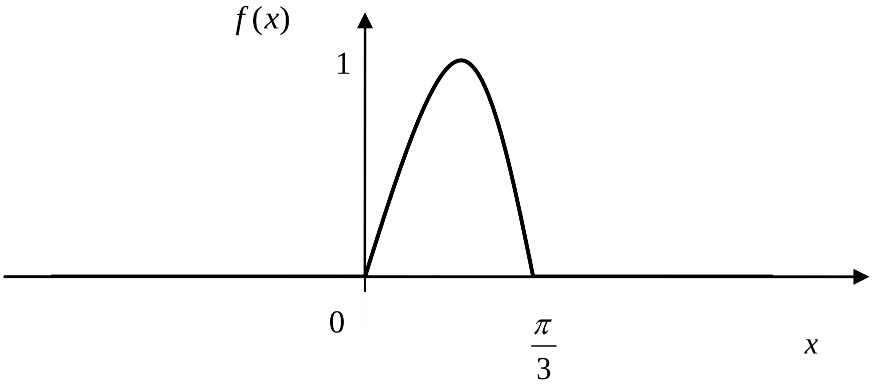
$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x\, dx = \frac{1}{3}\cos 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{3}(-1+1) = \frac{2}{3},$$

$$c = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2},$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{3}{2}\sin 3x, & 0 < x < \frac{\pi}{3} \\ 0, & x \ge \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)\, dx,$$

$$P\left(\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4}\right) = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{3}{2}\sin 3x\, dx = -\frac{1}{2}\cos 3x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2}\cos\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}\cos\frac{3\pi}{6} = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}.$$



$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx$$

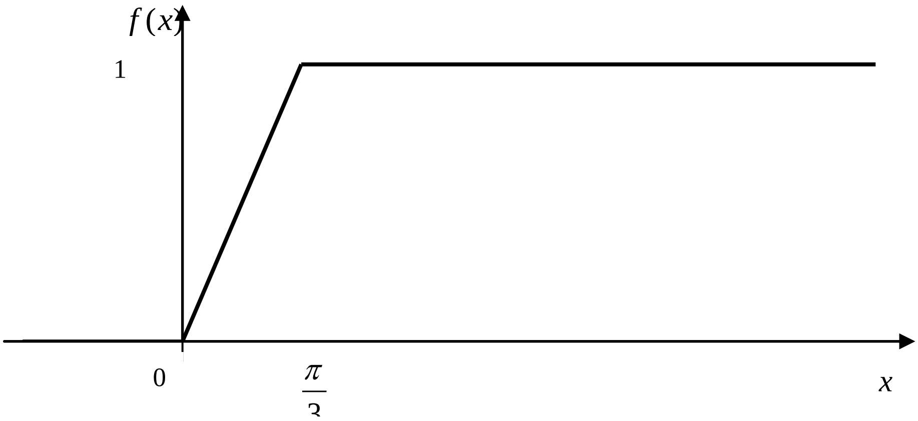
1) $x \le 0, \quad f(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 dx = 0$

2) $0 < x < \frac{\pi}{3},$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} 0 dx + \int_0^x \frac{3}{2}\sin 3x\, dx = -\frac{1}{2}\cos 3x\Big|_0^x = -\frac{1}{2}\cos 3x + \frac{1}{2}1 = \frac{1}{2}(1 - \cos 3x).$$

3) $x \ge \frac{\pi}{3}; \qquad f(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{3}{2}\sin 3x\, dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{x} 0 dx = 1$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{1}{2}(1-\cos 3x), & 0<x<\frac{\pi}{3}\\ 1, & x\ge\frac{\pi}{3}\end{cases}$$



Числові характеристики неперервної випадкової величини

По аналогії із дискретною випадковою величиною для неперервної випадкової величини розглядають такі числові характеристики як математичне сподівання $M(x)$, дисперсію $D(x)$ та середньоквадратичне відхилення $\sigma(x)$.

$$M(x)=\int_{-\infty}^{\infty} x\ f(x)\,dx,$$

$$D(x)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2\ f(x)-M^2(x),$$

$$\sigma(x)=\sqrt{D(x)}.$$

Зауваження

Якщо випадкова величина X прийме всі свої значення з проміжку $[a;b]$, то математичне сподівання і дисперсія запишеться таким чином:

$$M(x)=\int_a^b x\ f(x)\,dx, \qquad D(x)=\int_a^b x^2 f(x)-M^2(x).$$

Приклади

1. Інтегральна функція неперервної випадкової величини x часу не відключення деякого пристрою дорівнює:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-\frac{x}{T}}, & x\ge 0\end{cases}$$

Знайти $M(x)$.

Розв'язання:

T - фіксований час роботи пристрою

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{T}e^{-\frac{x}{T}}, & x\ge 0.\end{cases}$$

$$M(x)=\int_0^{\infty} x\frac{1}{T}e^{-\frac{x}{T}}dx=\frac{1}{T}\int_0^{\infty} xe^{-\frac{x}{T}}dx=\frac{1}{T}\lim_{A\to\infty}\int_0^{A} xe^{-\frac{x}{T}}dx=\lim_{A\to\infty}\frac{-T-A}{e^{\frac{A}{T}}}-T=\lim_{A\to\infty}\frac{0-1}{e^{\frac{A}{T}}\frac{1}{T}}+T=T$$

2. Задана диференціальна функція розподілу $f(x)=\begin{cases}0, & x\le -\frac{\pi}{2}\\ c\cos^2 x, & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\\ 0, & x\ge \frac{\pi}{2}\end{cases}$.

Знайти $M(x)$.

Розв'язання:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} c\cos^2 x\,dx=1,\quad c=\frac{1}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx},$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)dx=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi)-\frac{1}{2}(-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin(-\pi))=\frac{\pi}{2},$$

Отже,

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -\frac{\pi}{2}\\ \frac{2}{\pi}\cos^2 x, & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\\ 0, & x\ge \frac{\pi}{2}\end{cases}.$$

$$M(x)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\frac{2}{\pi}\cos^2 x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\,2\cos^2 x\,dx=\frac{1}{\pi}(x(x+\frac{1}{2}\sin 2x))\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x+\frac{1}{2}\sin 2x)dx=$$

$$=-\frac{\pi^2}{2}-\frac{1}{4}+(\frac{\pi^2}{2}-\frac{1}{4})=-\frac{1}{2}.$$

3. Задано диференціальну функцію розподілу $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ c(\sqrt{x}+x), & 0<x<4\\ 0, & x\ge 4\end{cases}$.

Знайти $M(x),\quad D(x)$.

Розв'язання:

$$\int_4^0 c\,(\sqrt{x}+x)\,dx=1,\ c=\frac{1}{\int_0^4(\sqrt{x}+x)\,dx},$$

$$\int_0^4(\sqrt{x}+x)\,dx=(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{x^2}{2})\Big|_0^4=\frac{40}{3},\ c=\frac{1}{32}.$$

$$M(x)=\int_0^4 x\frac{3}{40}(\sqrt{x}+x)\,dx=\frac{3}{40}\int_0^4(x^{\frac{3}{2}}+x^2)\,dx=\frac{3}{40}(\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{x^3}{3})\Big|_0^4=\frac{64}{25}.$$

$$D(x)=\int_0^4 x^2\frac{3}{40}(\sqrt{x}+x)\,dx-(\frac{64}{25})^2=\frac{3}{40}\int_0^4(x^{\frac{5}{2}}+x^3)-(\frac{64}{25})^2\,dx=\frac{3}{40}(\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{7}+\frac{x^4}{4})\Big|_0^4=$$

$$=\frac{4096}{625}-\frac{3}{40}.$$

1.3. Нормальний розподіл

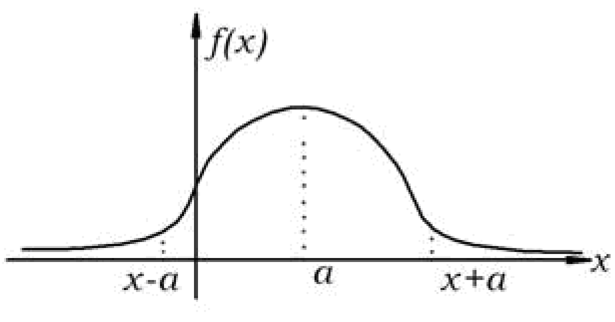
Нормальний закон розподілу (який ще називається законом Гауса) відіграє виключно важливу роль в теорії ймовірностей і займає серед інших законів розподілу особливий стан. Це закон, який найчастіше зустрічається на практиці. Головна особливість, яка виділяє нормальний закон серед інших законів, полягає в тому, що він є граничним законом, до якого наближаються інші закони розподілу.

Так, наприклад, велика кількість гарматних пострілів, здійснених в різних умовах, показує, що розсіювання снарядів на площині при пострілі з однієї гармати при встановленому прицілі підлягає нормальному закону.

«Універсальність» нормального закону пояснюється тим, що будь-яка випадкова величина, яка є сумою великої кількості окремих числових значень, кожне з яких підпорядковується різним законам розподілу і несуттєво впливає на суму, розподілена майже за нормальним законом.

Більшість випадкових величин, таких, наприклад, як похибки вимірювань, похибки гарматних пострілів і т. д. можуть бути подані як суми великої кількості малих доданків - елементарних похибок, кожна з яких визначається дією окремої причини, яка не залежить від інших. Яким би законам розподілу не підпорядковувались окремі елементарні похибки, особливості цих розподілів в сумі великої кількості доданків нівелюються і сума підпорядковується закону, що близький до нормального. Підсумовані похибки в загальній сумі повинні грати відносно малу роль.

Змінна величина X має нормальний закон розподілу, якщо диференціальна функція цієї випадкової величини має наступний вигляд: $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$.



Можна довести, що $M(x)=a$; $D(x)=\sigma^2$; $\sigma(x)=\sigma$.

Ймовірність попадання в заданий проміжок нормально розподіленої випадкової величини:

$$P(\alpha<X<\beta)=\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_\alpha^\beta e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx=$$

$$\frac{x-a}{\sigma}=t\ , \qquad x-a=\sigma t\ , \quad x=\sigma\cdot t+a, \qquad dx=\sigma dt, \quad \alpha\to\frac{\alpha-a}{\sigma}\ ,\ \beta\to\frac{\beta-a}{\sigma}\ .$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma\, dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Отже, $P(\alpha<X<\beta)=\Phi(\frac{\beta-a}{\sigma})-\Phi(\frac{\alpha-a}{\sigma})$.

Знайдемо ймовірність того, що відхилення випадкової величини X від свого математичного сподівання a менше за деяку величину $\varepsilon: P(|X-a|<\varepsilon)$.

$|X-a|<\varepsilon,\ -\varepsilon<X-a<\varepsilon,$

$-\varepsilon+a<X<\varepsilon+a,$

$$P(-\varepsilon+a<X<\varepsilon+a)=\Phi\left(\frac{\varepsilon+a-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-\varepsilon+a-a}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right),$$

$$P(|X-a|<\varepsilon)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Правило трьох сигм

Розглянемо:

$P(|X-a|<\varepsilon)=2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma})$, позначимо $\frac{\varepsilon}{\sigma}=t$.

1) Якщо $t=1$ тоді $P(|X-a|<\sigma)=2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma})=2\,\Phi(1)=2*0.3413=0.6826$,

2) Якщо $t=2$ тоді $P(|X-a|<2\sigma)=2\Phi(2)=2*0.4772=0.9544$,

3) Якщо $t=3$ тоді $P(|X-a|<3\sigma)=2\Phi(3)=2*0.49865=0.9973$.

Одержаний факт означає: якщо випадкова величина підпорядковується нормальному закону розподілу, то можна стверджувати, що з імовірністю 0,9973 в. в. X знаходиться в інтервалі $[a-3\sigma;\ a+3\sigma]$.

Дана ймовірність наближається до одиниці, тому вважають, що значення нормально розподіленої в. в. X практично не виходять за границі інтервалу $[a-3\sigma;\ a+3\sigma]$. Цей факт називають “правилом трьох сигм”.

Для нормально розподіленої в. в. X всі відхилення (з точністю 0,9973) знаходяться на інтервалі $[a-3\sigma;\ a+3\sigma]$.

З правила трьох сигм випливає спосіб визначення середнього квадратичного відхилення: беруть максимальне практично можливе відхилення від середнього і ділять на три. Таке грубе обчислення рекомендують у випадку, коли немає інших способів визначення σ .

Література

1. Жлуктенко В.І., Наконечний С.І. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч.-метод. Посібник: У 2-х ч. – Ч.І. Теорія ймовірностей. – К.: КНЕУ, 2000. – 304 с.

2. Жлуктенко В.І., Наконечний С.І., Савіна С.С. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч.-метод. Посібник: У 2-х ч. – Ч.ІІ. Математична статистика. – К.: КНЕУ, 2001. – 336 с.

3. Волошенко А.Б., Джалладова І.А. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. Метод. Посібник для самостійного вивчення дисципліни.: К.: КНЕУ, 2003. – 256 с.

4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятности и математической статистике. Учеб. Пособие для втузов. М.: «Высш. школа», 1975. – 333 с.

ДЛЯ НОТАТОК