МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ ТА ЦИФРОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ

ДЕЯКІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

методичні рекомендації для студентів спеціальностей
«Дошкільна освіта», «Початкова освіта» та «Середня освіта»

УЖГОРОД – 2022

Деякі методи розв’язування раціональних нерівностей: методичні рекомендації для студентів спеціальностей «Дошкільна освіта», «Початкова освіта» та «Середня освіта» / М.М. Повідайчик, П.П. Мулеса, М.С. Герич, М.П. Шулла, А.О. Попович – Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2022. – 47 с.

Рецензенти:

Козубовська І.В., д.п.н., професор, завідувач кафедри загальної педагогіки та педагогіки вищої школи;

Сігетій І.П., к.п.н., старший викладач кафедри природничо-математичної освіти та інформаційних технологій Закарпатського інституту післядипломної педагогічної освіти

Розглянуто і схвалено науково-методичною комісією ФМЦТ УжНУ.

Протокол №7 від 29.03.2022 р.

Рекомендовано до друку Вченою радою ФМЦТ УжНУ.

Протокол №8 від 30.03.2022 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Навчальна програма «Математика» для учнів 5-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів [1] затверджена Наказом Міністерства освіти і науки України від 07.06.2017 № 804. В основу побудови змісту та організації процесу навчання математики покладено компетентнісний підхід, відповідно до якого кінцевим результатом навчання предмета є сформовані певні компетентності, як здатності учня застосовувати свої знання в навчальних і реальних життєвих ситуаціях, повноцінно брати участь в житті суспільства, нести відповідальність за свої дії. Навчання математики в основній школі передбачає формування предметної математичної компетентності. Формування зазначеної компетентності підпорядковується реалізації загальних завдань шкільної математичної освіти, серед яких є «забезпечення оволодіння учнями мовою алгебри, уміннями здійснювати перетворення алгебраїчних виразів, розв'язувати рівняння, *нерівності* та їх системи, моделювати за допомогою рівнянь реальні ситуації, пояснювати здобуті результати» [1].

Найбільш повно поняття «нерівність» розкривається у двох темах курсу алгебри за 9 клас: «Тема 1. Нерівності (14 год)» та «Тема 2. Квадратична функція (20 год)». Так, зміст навчального матеріалу теми 1 передбачає вивчення числових нерівностей, основних властивостей числових нерівностей, нерівностей зі змінними, лінійних нерівностей з однією змінною, числових проміжків, рівносильних нерівностей, систем лінійних нерівностей з однією змінною. У темі 2 передбачається вивчення властивостей квадратичної функції, а також квадратичних нерівностей.

Навчальною програмою з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (*рівень стандарту*) передбачено подальше вивчення нерівностей. У старшій школі розширюються класи рівнянь, нерівностей, їх систем, методи розв'язування, сфери застосування. вивчення цього матеріалу пов'язується з властивостями відповідних функцій. так, у «Темі 1. Показникова та логарифмічна функції (16 год)» передбачено вивчення найпростіших показникових та логарифмічних рівнянь і нерівностей.

Профільний рівень у різних темах передбачає вивчення таких підтем:

- Нерівності. Метод інтервалів.
- Ірраціональні рівняння. Ірраціональні нерівності.
- Ірраціональні рівняння, нерівності з параметрами.
- Тригонометричні нерівності. Тригонометричні рівняння і нерівності з параметрами. Рівняння і нерівності, які містять обернені тригонометричні функції.
- Застосування похідної для розв'язування рівнянь та доведення нерівностей.
- Показникові та логарифмічні рівняння і нерівності та їх системи, зокрема з параметрами.
- Методи розв'язування нерівностей з однією змінною (рівносильні перетворення, метод інтервалів, заміна змінної, застосування властивостей функцій тощо).

У підручнику [14] приводяться такі означення нерівності зі змінною, розв'язку нерівності зі змінною, області допустимих значень (ОДЗ) та рівносильних нерівностей.

Якщо два вирази зі змінною сполучити одним із знаків $<, >, \leq, \geq$, то одержуємо *нерівність зі змінною*.

Розв'язком нерівності з однією змінною називають значення змінної, яке перетворює задану нерівність на правильну числову нерівність.

Розв'язати нерівність – означає знайти всі її значення або довести, що їх немає.

Областю допустимих значень (або областю визначення) *нерівності* називається спільна область визначення для функцій $f(x)$ і $g(x)$, що стоять у лівій і правій частині нерівності.

Дві нерівності називаються *рівносильними* на деякій множині, якщо на цій множині вони мають одні і ті ж розв'язки.

Тут же приводиться загальна схема *методу інтервалів* – базового методу розв'язування нерівностей виду $f(x) \gtreqless 0$ (під символом «$\gtreqless$» будемо розуміти один зі знаків нерівності: $<, >, \leq, \geq$):

1. Знайти ОДЗ.

2. Знайти нулі функції $f(x) = 0$.

3. Позначити нулі на ОДЗ і знайти знак $f(x)$ у кожному проміжку, на які розбивається ОДЗ.

4. Записати відповідь, враховуючи знак заданої нерівності.

Метою даної роботи є систематизація методів розв'язування раціональних нерівностей, а також застосування цих методів до розв'язування задач, зокрема тих, які використовувалися при проведенні Зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО) з математики попередніх років.

1. ОСНОВНІ ВИДИ РАЦІОНАЛЬНИХ НЕРІВНОСТЕЙ ТА МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1.1. Лінійні раціональні нерівності.

Розглянемо лінійну нерівність виду

$$ax + b \gtreqless 0, \tag{1.1}$$

де $a, b \in \mathbb{R}$ – коефіцієнти.

Розв'язком нерівності (1.1) називають множину значень змінної x, при яких вона перетворюється у правильну числову нерівність.

Лінійні раціональні нерівності розв'язуються методом рівносильних перетворень. При цьому розв'язки нерівності залежать від знаку коефіцієнта a (табл. 1.1).

Таблиця 1.1.

Розв'язки лінійної нерівності ($a \neq 0$)

$a < 0$		$a > 0$	
Знак нерівності	Розв'язки нерівності	Знак нерівності	Розв'язки нерівності
$<$	$x \in \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$	$<$	$x \in \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$
$\leq$	$x \in \left[-\frac{b}{a}; +\infty\right)$	$\leq$	$x \in \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right]$
$>$	$x \in \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$	$>$	$x \in \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$
$\geq$	$x \in \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right]$	$\geq$	$x \in \left[-\frac{b}{a}; +\infty\right)$

Якщо $a = 0$, то розв'язки нерівності залежать від знаку коефіцієнта b (табл. 1.2).

Таблиця 1.2.

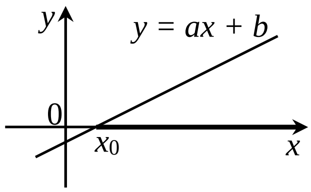
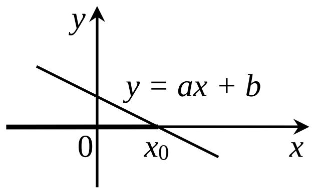
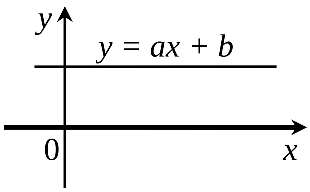
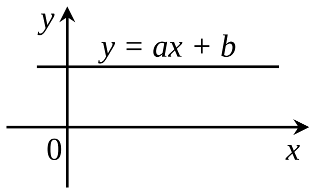
Розв'язки лінійної нерівності ($a = 0$)

$b < 0$		$b = 0$		$b > 0$	
Знак нерівності	Розв'язки нерівності	Знак нерівності	Розв'язки нерівності	Знак нерівності	Розв'язки нерівності
$<$	$x \in \mathbb{R}$	$<$	$x \in \emptyset$	$<$	$x \in \emptyset$
$\leq$	$x \in \mathbb{R}$	$\leq$	$x \in \mathbb{R}$	$\leq$	$x \in \emptyset$
$>$	$x \in \emptyset$	$>$	$x \in \emptyset$	$>$	$x \in \mathbb{R}$
$\geq$	$x \in \emptyset$	$\geq$	$x \in \mathbb{R}$	$\geq$	$x \in \mathbb{R}$

Розв’язки лінійної нерівності мають просту графічну ілюстрацію – це проміжок на осі абсцис, для якого графік лінійної функції $y = ax + b$ знаходиться вище/нижче осі *Ox*, у залежності від знаку нерівності (табл. 1.3).

Таблиця 1.3.

Графічна ілюстрація розв’язків деяких лінійних нерівностей

$ax + b > 0;$ $a > 0, b < 0, x_0 = -\frac{b}{a};$ $x \in (x_0; +\infty)$ 	$ax + b \geq 0;$ $a < 0, b > 0, x_0 = -\frac{b}{a};$ $x \in (-\infty; x_0]$ 
$ax + b > 0;$ $a = 0, b > 0;$ $x \in (-\infty; +\infty)$ 	$ax + b \leq 0;$ $a = 0, b > 0;$ $x \in \emptyset$ 

Приклад 1. (ЗНО’15). Розв’яжіть нерівність $0{,}2x - 54 < 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 27)$	$(270; +\infty)$	$(-\infty; 2{,}7)$	$(-\infty; 270)$	$(10{,}8; +\infty)$

Розв’язання.

$$0{,}2x - 54 < 0;$$

$$0{,}2x < 54;$$

$$x < 270.$$

Відповідь: Г.

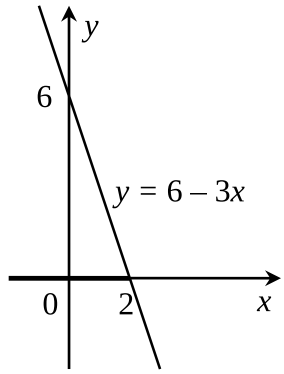
Приклад 2. (ЗНО’10). Розв’яжіть нерівність $10 - 3x > 4$.

А	Б	В	Г	Д
$(-2; +\infty)$	$(2; +\infty)$	$(-3; +\infty)$	$(-\infty; -2)$	$(-\infty; 2)$

Розв'язання.

$$10 - 3x > 4;$$

$$-3x > -6;\ x < 2.$$



Оскільки початкова нерівність рівносильна такій $6 - 3x > 0$, то для графічної ілюстрації розглянемо графік функції $y = 6 - 3x$ і інтервал, на якому графік вище осі *Ox*. Отже, $x \in (-\infty; 2)$.

Відповідь: Д.

3. Розв'яжіть нерівність $a - x < x + 2a$.

А	Б	В	Г
$\left(-\frac{a}{2}; +\infty\right)$	$\left(-\frac{3a}{2}; +\infty\right)$	$\left(-\infty; -\frac{3a}{2}\right)$	$\left(-\infty; -\frac{a}{2}\right)$

Розв'язання.

$$-x - x < 2a - a;$$

$$-2x < a;\ x > -\frac{a}{2};$$

$$x \in \left(-\frac{a}{2}; +\infty\right).$$

Відповідь: А.

Завдання для самостійної роботи.

1. Розв'яжіть нерівність $-x - 5 \geq 0$.

А	Б	В	Г
$(-\infty; -5]$	$(-\infty; 5]$	$[-5; +\infty)$	$[5; +\infty)$

2. Розв'яжіть нерівність $\frac{1}{2}x - 2{,}5 \leq 0{,}5x - \frac{5}{2}$.

А	Б	В	Г
$(-\infty; -2{,}5]$	$(-\infty; +\infty)$	$[2{,}5; +\infty)$	$\emptyset$

3. Установіть відповідність між нерівністю (1-3) та її розв'язками (А-Д).

	Нерівність		*Розв'язки нерівності*
1	$4x - 2{,}5 \leq 5{,}5$	А	$(-\infty; 2]$
2	$-4x - 2{,}5 \leq -4{,}5$	Б	$[0{,}5; +\infty)$
3	$4x - 2 > 4x$	В	$(2; +\infty)$
		Г	$\mathbb{R}$
		Д	$\emptyset$

4. Розв'яжіть нерівність $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} \leq \frac{3}{4}$. У відповідь запишіть кількість натуральних розв'язків.

1.2. Квадратичні раціональні нерівності.

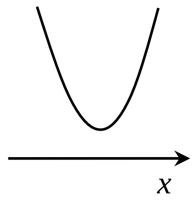
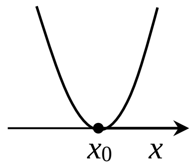
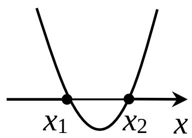
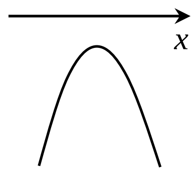
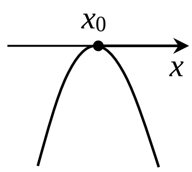
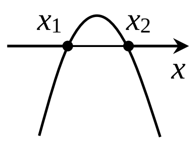
Розглянемо нерівність виду

$$ax^2 + bx + c \gtrless 0, \tag{1.2}$$

де $a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}$ – коефіцієнти. При $a = 0$ отримуємо лінійну нерівність. Якщо $a \neq 0$, то нерівність (1.2) називається квадратичною. Розв’язки квадратичної нерівності залежать від знаку коефіцієнта a, який визначає напрямок гілок квадратичної функції (параболи) $y = ax^2 + bx + c$, та кількості її нулів (залежно від знаку дискримінанта D). У табл. 1.4 приведені розв’язки квадратичної нерівності на основі схематичного графіку параболи.

Таблиця 1.4.

Розв’язки квадратичної нерівності ($a \neq 0$)

Знак нерівності	$a > 0$		
	$D < 0$	$D = 0$	$D > 0$
			
$<$	$x \in \emptyset$	$x \in \emptyset$	$x \in (x_1; x_2)$
$\leq$	$x \in \emptyset$	$x \in \{x_0\}$	$x \in [x_1; x_2]$
$>$	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R} \backslash x_0$	$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$
$\geq$	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R}$	$x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$
	$a < 0$		
	$D < 0$	$D = 0$	$D > 0$
			
$<$	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R} \backslash x_0$	$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$
$\leq$	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R}$	$x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$
$>$	$x \in \emptyset$	$x \in \emptyset$	$x \in (x_1; x_2)$
$\geq$	$x \in \emptyset$	$x \in \{x_0\}$	$x \in [x_1; x_2]$

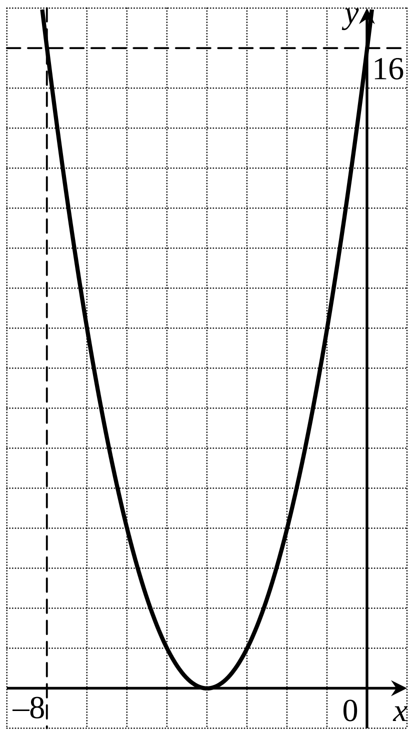
Оскільки нулі квадратичної функції розбивають множину $\mathbb{R}$ на проміжки знакосталості, то для розв’язування таких нерівностей зручно також використовувати метод інтервалів.

Приклад 1. (ЗНО'14). Розв'яжіть нерівність $(x+4)^2 \le 16$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -8]$	$(-\infty; 0]$	$(-\infty; 4]$	$[-8; 8]$	$[-8; 0]$

Розв'язання.

Графіком функції $y=(x+4)^2$ є парабола, зміщена на 4 од. вліво, яка перетинає функцію $y=16$ у т. $x_1=-8$, $x_2=0$ (див. рис.). Тому розв'язками нерівності є проміжок $x \in [-8; 0]$, на якому значення функції $y=(x+4)^2$ не перевищує значення 16 (на графіку парабола знаходиться нижче рівня $y=16$).



Відповідь: Д.

Приклад 2. (ЗНО'18). Розв'яжіть нерівність $(x+4)(x-8) > 3(x-8)$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -1) \cup (8; +\infty)$	$(-1; 8)$	$(-1; 8) \cup (8; +\infty)$	$(-1; +\infty)$	$(8; +\infty)$

Розв'язання. Розв'яжемо методом інтервалів.

$$(x+4)(x-8) > 3(x-8);$$

$$(x+4)(x-8) - 3(x-8) > 0;$$

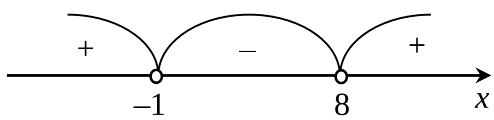
$$(x-8)(x+1) > 0.$$

Точки $x_1=-1$ та $x_2=8$ розбивають числову вісь на проміжки знакосталості. Для визначення знаків обчислимо знак функції $y=(x-8)(x+1)$ на кожному з проміжків (див. рис.):

$y(-2) = (-2-8)(-2+1) > 0;$

$y(0) = (0-8)(0+1) < 0;$

$y(9) = (9-8)(9+1) > 0.$



Тому розв'язками нерівності є $x \in (-\infty; -1) \cup (8; +\infty)$.

Відповідь: А.

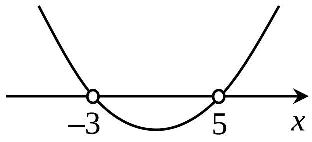
Приклад 3. (ЗНО'14). Розв'яжіть нерівність $x^2 + 2^{\log_2(-2x)} - 15 < 0$. У відповідь запишіть *суму* всіх цілих розв'язків цієї нерівності.

Розв'язання.

ОДЗ $x < 0$. Тоді:

$$x^2 - 2x - 15 < 0.$$

Розв'язки знаходимо за допомогою графічного методу. Зобразимо схематичний графік параболи $y = x^2 - 2x - 15$, нулями якої є $x_1 = -3$ та $x_2 = 5$ (див. рис.).



Розв'язки останньої нерівності – це інтервал, на якому парабола нижче осі Ox, тобто $x \in (-3; 5)$. Враховуючи ОДЗ, отримуємо розв'язки початкової нерівності $x \in (-3; 0)$. Тоді сума цілих розв'язків: $-2 - 1 = -3$.

Відповідь: -3.

Завдання для самостійної роботи.

1. Розв'яжіть нерівність $-x^2 - 25 \geq 0$.

А	**Б**	**В**	**Г**
$(-\infty; -5]$	$(-\infty; 5]$	$\emptyset$	$[-5; 5]$

2. Розв'яжіть нерівність $x^2 - 2x \leq 0$.

А	**Б**	**В**	**Г**
$(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$	$[0; 2]$	$(-\infty; 2]$	$[0; +\infty)$

3. Установіть відповідність між нерівністю (1-3) та її розв'язками (А-Д).

	Нерівність		*Розв'язки нерівності*
1	$(x-3)(x-5) < 0$	А	$(-\infty; 3) \cup (5; +\infty)$
2	$x^2 + 8x + 15 < 0$	Б	$(-5; -3)$
3	$x^2 - 7x + 15 < 0$	В	$(3; 5)$
		Г	$(-\infty; -5) \cup (-3; +\infty)$
		Д	$\emptyset$

4. Розв'яжіть нерівність $x^2 + 8x + 16 \leq 0$. У відповідь запишіть *кількість* цілих розв'язків.

1.3. Цілі раціональні нерівності.

Розглянемо нерівність виду

$$P_n(x) \gtrless 0, \qquad (1.3)$$

де

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\, x + a_n$$

ціла раціональна функція степеню n з дійсними коефіцієнтами. Такі нерівності називають *цілими раціональними* [11].

Функцію $P_n(x)$ можна подати у вигляді добутку лінійних та квадратичних функцій:

$$P_n(x) = a_0(x-\alpha_1)^{k_1} \dots (x-\alpha_m)^{k_m}(x^2 + p_1\, x + q_1)^{r_1} \dots (x^2 + p_l\, x + q_l)^{r_l},$$

де $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ $(\alpha_1 < \cdots < \alpha_m)$ – дійсні нулі кратності k_1, …, k_m відповідно, а квадратні тричлени $x^2 + p_i\, x + q_i$, $i = 1, \dots, l$ нерозкладні. Очевидно, $k_1 + \cdots + k_m + 2(r_1 + \cdots + r_l) = n$. Отже, нерівність (1.3) може бути записана у такому вигляді:

$$a_0(x-\alpha_1)^{k_1} \dots (x-\alpha_m)^{k_m}(x^2 + p_1\, x + q_1)^{r_1} \dots (x^2 + p_l\, x + q_l)^{r_l} \gtrless 0. \qquad (1.4)$$

Нехай $a_0 > 0$ (якщо $a_0 < 0$, то нерівність можна помножити на -1). Тоді нерівність (1.4) рівносильна такій:

$$(x-\alpha_1)^{k_1} \dots (x-\alpha_m)^{k_m} \gtrless 0. \qquad (1.5)$$

Нерівність (1.5) зручно розв'язувати *методом інтервалів*. Загальна схема метода інтервалів така:

1. На числовій осі відкладаються нулі функції $y = P_n(x)$. При цьому дотримуються таких позначень:
   1.1. Якщо нерівність нестрога, то нулі позначаються зафарбованими точками і вони у відповідь включаються.
   1.2. Якщо нерівність строга, то нулі позначаються виколотими (незафарбованими) точками і вони у відповідь не включаються.
2. Нулі $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ $(\alpha_1 < \cdots < \alpha_m)$ розбивають числову пряму на інтервали знакосталості: $(-\infty; \alpha_1); (\alpha_1; \alpha_2); \dots; (\alpha_1; +\infty)$. Для визначення знаку функції $y = P_n(x)$ на окремому інтервалі I достатньо обчислити $P_n(x')$, де $x' \in I$.

3. У відповідь записуємо об'єднання тих інтервалів/проміжків, на яких знак функції відповідає знаку нерівності.

Приклад 1. (ЗНО'17). Розв'яжіть нерівність $(x^2+64)(x-5)>0$.

А	Б	В	Г	Д
$(5;+\infty)$	$(-\infty;5)\cup(5;+\infty)$	$(5;8)$	$(-\infty;5)\cup(8;+\infty)$	$(-\infty;5)$

Розв'язання.

Оскільки $x^2+64>0$, то початкова нерівність рівносильна такій:

$$x-5>0;$$

$$x>5;$$

$$x\in(5;+\infty).$$

Відповідь: А.

Приклад 2. (ЗНО'14). Розв'яжіть нерівність $x^3\geq x^2$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$	$[0;1]$	$[1;+\infty)$	$\{0\}\cup[1;+\infty)$	$[-1;+\infty)$

Розв'язання.

Розв'яжемо методом інтервалів.

$$x^3>x^2;$$

$$x^3-x^2>0;$$

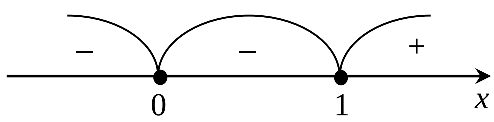
$$x^2(x-1)>0.$$

Точки $x_1=0$ та $x_2=1$ розбивають числову вісь на проміжки знакосталості. Для визначення знаків обчислимо знак функції $y=x^2(x-1)$ на кожному з проміжків (див. рис.):

$y(-1)=(-1)^2(-1-1)<0;$

$y(0{,}5)=0{,}5^2(0{,}5-1)<0;$

$y(2)=2^2(2-1)>0.$



Отримуємо розв'язки нерівності $x\in\{0\}\cup[1;+\infty)$.

Відповідь: Г.

Приклад 3. (ЗНО'18). Розв'яжіть нерівність $|x+4|\cdot(x-1)<0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;-4)\cup(1;+\infty)$	$(-4;1)$	$(-\infty;1)$	$(-4;1)$	$(-\infty;-4)\cup(-4;1)$

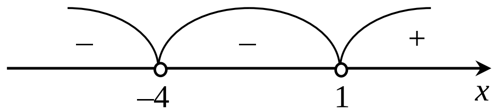
Розв'язання. Розв'яжемо методом інтервалів.

Визначимо знаки функції $y = |x + 4| \cdot (x - 1)$ на проміжках, на які вісь абсцис розбивають нулі $x_1 = -4$ та $x_2 = 1$ (див. рис.):

$y(-5) = |-5 + 4| \cdot (-5 - 1) < 0$;

$y(0) = |0 + 4| \cdot (0 - 1) < 0$;

$y(2) = |2 + 4| \cdot (2 - 1) > 0$.



Тому розв'язками нерівності є $x \in (-\infty; -4) \cup (-4; 1)$.

Відповідь: Д.

Завдання для самостійної роботи.

1. Розв'яжіть нерівність $x^3 \geq 4x$.

А	**Б**	**В**	**Г**
$(-\infty; -2] \cup [0; 2]$	$[-2; 0] \cup [2; +\infty)$	$[-2; +\infty)$	$(-\infty; 0]$

2. Розв'яжіть нерівність $(x + 1)(x^2 - 2x) \leq 0$.

А	**Б**	**В**	**Г**
$(-\infty; -1] \cup [0; 2]$	$[-1; 0] \cup [2; +\infty)$	$(-\infty; 2]$	$[0; +\infty)$

3. Установіть відповідність між нерівністю (1-3) та її розв'язками (А-Д).

	Нерівність		*Розв'язки нерівності*
1	$(x^2 - 1)(x + 5) < 0$	А	$(-\infty; -5) \cup (-5; 1)$
2	$(x - 1)(x + 5)^2 < 0$	Б	$(-5; -1)$
3	$(x^2 + 1)(x + 5)^2 < 0$	В	$(-\infty; -5) \cup (-1; 1)$
		Г	$(-\infty; -5) \cup (1; +\infty)$
		Д	$\emptyset$

4. Розв'яжіть нерівність $(x^2 - 3x - 4)(x^2 - 2x - 3) \leq 0$. У відповідь запишіть *кількість* цілих розв'язків.

1.4. Дробово-раціональні нерівності.

Розглянемо нерівність виду

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \cdots \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} + S(x) \gtreqless 0, \qquad (1.6)$$

де $P_i(x), i = 1, \dots, n$, $Q_i(x), i = 1, \dots, n$, $S(x)$ – цілі раціональні функції з дійсними коефіцієнтами. Такі нерівності називають *дробово-раціональними* [11].

На основі рівносильних перетворень нерівність (1.6) може бути записана:

$$\frac{A(x)}{B(x)} \gtreqless 0, \qquad (1.7)$$

де $A(x)$, $B(x)$ – цілі раціональні функції.

Розв'язування строгих нерівностей (1.7) ґрунтується на такій теоремі [11].

Теорема. Нерівності $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ та $A(x) \cdot B(x) > 0$ (аналогічно $\frac{A(x)}{B(x)} < 0$ та $A(x) \cdot B(x) < 0$), де $A(x)$, $B(x)$ – довільні функції, рівносильні.

З цієї теореми випливає, що строгу дробово-раціональну нерівність можна звести до цілої раціональної нерівності.

У загальному випадку нерівності (1.7) зручно розв'язувати методом інтервалів, зважаючи на те, що нулі функції $B(x)$ не задовольняють ОДЗ, тобто зображуються виколотими точками та не включаються у відповідь.

Приклад 1. (ЗНО'08). Розв'яжіть нерівність $\frac{x^2+64}{x-5} > 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 5) \cup (8; +\infty)$	$(-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$	$(5; 8)$	$(5; +\infty)$	$(-\infty; 5)$

Розв'язання.

За теоремою початкова нерівність рівносильна такій

$$(x^2 + 64)(x - 5) > 0;$$

$$x - 5 > 0; x > 5.$$

Отже, $x \in (5; +\infty)$.

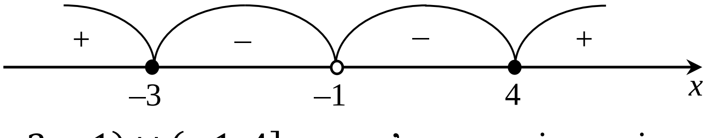
Відповідь: Г.

Приклад 2. (ЗНО'09). Знайдіть *кількість* усіх цілих розв'язків нерівності

$$\frac{x^2-x-12}{(x+1)^2} \leq 0.$$

Розв'язання.

Розв'яжемо методом інтервалів. Відкладемо на осі Ox нулі чисельника $x_1 = -3$, $x_2 = 4$ та нуль знаменника $x_3 = -1$ (не належить ОДЗ). Визначаємо знак функції $f(x) = \frac{x^2-x-12}{(x+1)^2} = \frac{(x+3)(x-4)}{(x+1)^2}$ на утворених інтервалах знакосталості.



Отже, $x \in [-3; -1) \cup (-1; 4]$ – розв'язки нерівності, серед яких 7 цілих.

Відповідь: 7.

Приклад 3. (ЗНО'13). Розв'яжіть нерівність $\frac{3}{x-2} + \frac{4}{x} \geq 1$. У відповідь запишіть *суму* всіх цілих її розв'язків.

Розв'язання. Розв'яжемо методом інтервалів.

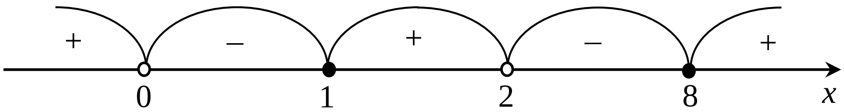
$$\frac{3}{x-2}+\frac{4}{x}\geq 1;$$

$$\frac{3x+4x-8-x^2+2x}{x(x-2)}\geq 0;$$

$$\frac{x^2-9x+8}{x(x-2)}\leq 0;$$

$$\frac{(x-1)(x-8)}{x(x-2)}\leq 0.$$

Нулі чисельника $x_1=1$ та $x_2=8$. Нулі знаменника $x_3=0$ та $x_4=2$, які не належить ОДЗ.



Отже, $x\in(0;1]\cup(2;8]$ – розв'язки нерівності, а 34 – сума цілих.

Відповідь: 34.

Завдання для самостійної роботи.

1. Розв'яжіть нерівність $\frac{1}{x-2}\geq 0$.

А	**Б**	**В**	**Г**
$(-\infty;-2]$	$[-2;+\infty)$	$(2;+\infty)$	$(-\infty;2)$

2. Розв'яжіть нерівність $\frac{x-2}{x-3}\leq 2$.

А	**Б**	**В**	**Г**
$(-\infty;3)\cup[4;+\infty)$	$(-\infty;2]\cup(3;+\infty)$	$(3;4]$	$[2;3)$

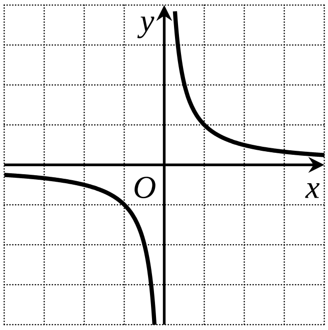
3. Установіть відповідність між нерівністю (1-3) та її розв'язками (А-Д).

	Нерівність		*Розв'язки нерівності*
1	$\frac{(x-1)^2}{(x+5)^2}<0$	А	$\mathbb{R}$
2	$\frac{(x-1)^2}{(x+5)^2}>0$	Б	$\mathbb{R}\backslash\{-5\}$
3	$\frac{(x-1)^2}{(x+5)^2}\geq 0$	В	$\mathbb{R}\backslash\{-5;1\}$
		Г	$\{1\}$
		Д	$\emptyset$

4. Розв'яжіть нерівність $\frac{20}{x^2-3x-4}+\frac{6}{x+1}>1$. У відповідь запишіть *суму* цілих розв'язків.

1.5. Використання графіку гіперболи при розв'язуванні дробово-раціональних нерівностей.

Розглянемо функцію $y = \frac{1}{x}$, графіком якої є гіпербола (рис. 1.1), та функцію $y = \frac{1}{x-a} + b$, графік якої утворюється внаслідок переміщення першого на a од. вздовж осі Ox та на b од. вздовж осі Oy (рис. 1.2).



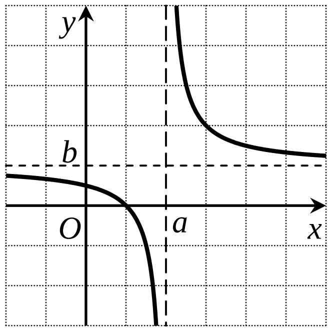


Рис. 1.1. Графік функції $y = \frac{1}{x}$ Рис. 1.2. Графік функції $y = \frac{1}{x-a} + b$

Оскільки $\frac{x-c}{x-a} = \frac{x-a+a-c}{x-a} = 1 + \frac{k}{x-a}$, де $k = a - c$, то нерівності виду

$$\frac{x-c}{x-a} \gtrless d \tag{1.8}$$

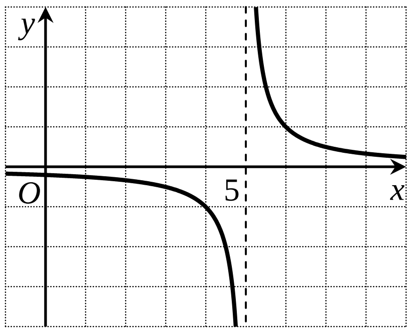
можуть бути розв'язані графічним методом з використанням графіка гіперболи.

Приклад 1. (ЗНО'13). Розв'яжіть нерівність $\frac{1}{x-5} < 0$.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
$(-\infty; 5)$	$(-\infty; -5)$	$(-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$	$(-5; +\infty)$	$(5; +\infty)$

Розв'язання.

Функція $y = \frac{1}{x-5}$ має вертикальну асимптоту $x = 5$ та горизонтальну $y = 0$ (див. рис.). Отже, розв'язками нерівності буде інтервал $x \in (-\infty; 5)$, на якому гіпербола знаходиться нижче осі Ox.



Відповідь: А.

Приклад 2. (ЗНО'11). Розв'яжіть нерівність $\frac{3x}{x+1} < \frac{7}{x+1}$.

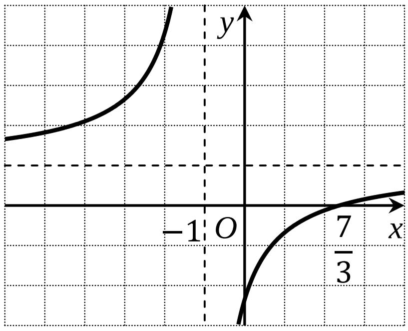
А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
$\left(-1; \frac{7}{3}\right)$	$(-\infty; -1)$	$(-\infty; -1) \cup \left(\frac{7}{3}; +\infty\right)$	$(-\infty; -1) \cup \left(-1; \frac{7}{3}\right)$	$\left(-\infty; \frac{7}{3}\right)$

Розв'язання.

$\frac{3x}{x+1} < \frac{7}{x+1}$;

$\frac{3x-7}{x+1} < 0$;

$\frac{x-\frac{7}{3}}{x+1} < 0$.



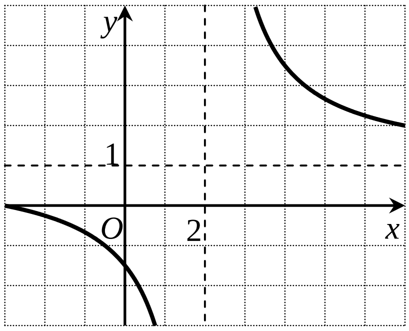
Отже, розв'язками нерівності буде інтервал $x \in \left(-1; \frac{7}{3}\right)$, на якому гіпербола (див. рис.) знаходиться нижче осі абсцис.

Відповідь: А.

Приклад 3. (ЗНО'16). Розв'яжіть нерівність $\frac{x+3}{x-2} > 1$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$	$(2; +\infty)$	$(-3; 2)$	$(-2; 3)$	$(-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$

Розв'язання.



Функція $y = \frac{x+3}{x-2}$ має вертикальну асимптоту $x = 2$ та горизонтальну $y = 1$. Отже, розв'язками нерівності буде інтервал $x \in (2; +\infty)$, на якому гіпербола (див. рис.) знаходиться вище прямої $y = 1$ (горизонтальної асимптоти).

Відповідь: Б.

Завдання для самостійної роботи.

1. Розв'яжіть графічно нерівність $\frac{1}{3-x} > 0$.

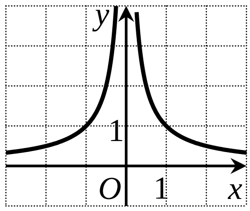
А	Б	В	Г
$(-\infty; 3]$	$[3; +\infty)$	$(3; +\infty)$	$(-\infty; 3)$

2. Розв'яжіть графічно нерівність $\frac{x-2}{x-3} \leq 1$.

А	Б	В	Г
$(-\infty; 3]$	$(-\infty; 2] \cup (3; +\infty)$	$(-\infty; 3)$	$[2; 3)$

3. На основі графіка функції $y = \frac{1}{|x|}$ (див. рис.) установіть відповідність між нерівністю (1-3) та її розв'язками (А-Д).

	Нерівність		*Розв'язки нерівності*
1	$\frac{1}{\|x\|} \leq 1$	А	$(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$
2	$\frac{1}{\|x\|} \geq 1$	Б	$[-1; 0) \cup (0; 1]$
3	$\frac{1}{\|x\|} \leq x$	В	$[-1; 1]$
		Г	$(0; 1]$
		Д	$[1; +\infty)$



4. Розв'яжіть графічно нерівність $\frac{1}{x} \geq |x|$. У відповідь запишіть *найбільший* розв'язок.

1.6. Системи раціональних нерівностей.

Розглянемо систему нерівностей

$$\begin{cases} f_1(x) \gtreqless 0, \\ \quad\dots \\ f_k(x) \gtreqless 0, \end{cases} \tag{1.9}$$

де $f_i(x)$, $i = 1, \dots, k$ – раціональні функції.

Розв'язком системи нерівностей (1.9) називають множину значень змінної x, при яких кожна з нерівностей системи перетворюється у правильну числову нерівність.

Розв'язки найпростішої системи нерівностей $\begin{cases} x \gtreqless a, \\ x \gtreqless b \end{cases}$ приведено у табл. 1.5. Тут знаки нерівності нестрогі. Аналогічно визначаються розв'язки системи нерівностей зі строгим знаком.

Таблиця 1.5.

Розв'язки системи нерівностей $\begin{cases} x \gtreqless a, \\ x \gtreqless b. \end{cases}$

Вид системи	Розв'язки системи		
	$a < b$	$a = b$	$a > b$
$\begin{cases} x \leq a, \\ x \leq b; \end{cases}$	$x \in (-\infty; a]$	$x \in (-\infty; a]$	$x \in (-\infty; b]$
$\begin{cases} x \leq a, \\ x \geq b; \end{cases}$	$x \in \emptyset$	$x \in \{a\}$	$x \in [b; a]$
$\begin{cases} x \geq a, \\ x \leq b; \end{cases}$	$x \in [a; b]$	$x \in \{a\}$	$x \in \emptyset$
$\begin{cases} x \geq a, \\ x \geq b; \end{cases}$	$x \in [b; +\infty)$	$x \in [a; +\infty)$	$x \in [a; +\infty)$

Система $\begin{cases} x \geq a, \\ x \leq b, \end{cases}$ де $a < b$, може бути записана у вигляді *подвійної нерівності* $a \leq x \leq b$, розв'язками якої є проміжок $x \in [a; b]$.

При розв'язуванні системи нерівностей знаходять переріз множин розв'язків кожної. При цьому «система» означає логічне відношення «і». Досить часто при розв'язуванні задач розглядаються підзадачі, які характеризуються логічним відношенням «або», а їхнє об'єднання називається *сукупністю*. *Розв'язком* сукупності нерівностей є об'єднання множин розв'язків кожної. Аналогічно до табл. 1.5 приведемо розв'язки сукупності деяких найпростіших нерівностей (табл. 1.6).

Таблиця 1.6.

Розв'язки сукупності нерівностей $\left[\begin{array}{l} x \gtreqless a, \\ x \gtreqless b. \end{array}\right.$

Вид сукупності	Розв'язки сукупності		
	$a < b$	$a = b$	$a > b$
$\left[\begin{array}{l} x \leq a, \\ x \leq b; \end{array}\right.$	$x \in (-\infty; b]$	$x \in (-\infty; a]$	$x \in (-\infty; a]$
$\left[\begin{array}{l} x \leq a, \\ x \geq b; \end{array}\right.$	$x \in (-\infty; a] \cup [b; +\infty)$	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R}$
$\left[\begin{array}{l} x \geq a, \\ x \leq b; \end{array}\right.$	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R}$	$x \in (-\infty; b] \cup [a; +\infty)$
$\left[\begin{array}{l} x \geq a, \\ x \geq b; \end{array}\right.$	$x \in [a; +\infty)$	$x \in [a; +\infty)$	$x \in [b; +\infty)$

Приклад 1. (ЗНО'20). Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} 4x - 7 \geq 2x + 1, \\ x \geq -3. \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
$[-1; +\infty)$	$[-3; 4]$	$\emptyset$	$[-3; +\infty)$	$[4; +\infty)$

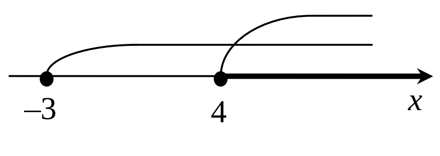
Розв'язання.

$$\begin{cases} 4x - 2x \geq 7 + 1, \\ x \geq -3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 4, \\ x \geq -3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in [4; +\infty), \\ x \in [-3; +\infty). \end{cases}$$

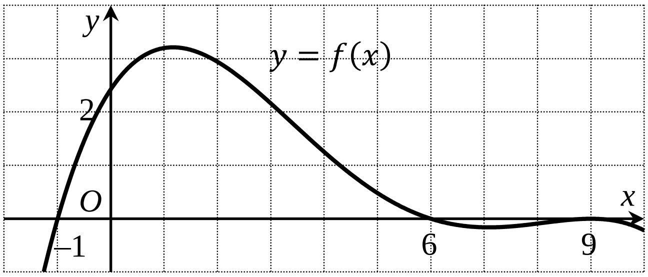
Знаходимо переріз множин розв'язків:



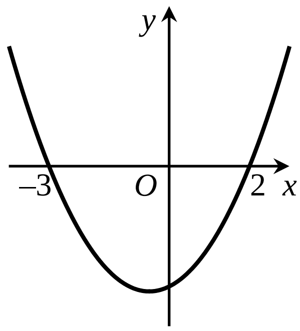
Отже, у перерізі отримуємо розв'язок системи $x \in [4; +\infty)$.

Відповідь: Д.

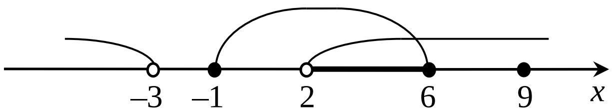
Приклад 2. (ЗНО'11). На рис. зображено графік функції $y = f(x)$, що визначена на проміжку $(-\infty; +\infty)$ і має лише 3 нулі. Розв'яжіть систему $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ x^2 + x - 6 > 0. \end{cases}$ У відповідь запишіть *суму* всіх цілих розв'язків системи.



Розв'язання.



Розв'яжемо графічним методом. Знаходимо розв'язки першої нерівності системи $f(x) \geq 0$: $x \in [-1; 6] \cup \{9\}$. Розв'язки другої нерівності системи $x^2 + x - 6 > 0$ знайдемо на основі схематичного графіку параболи $y = x^2 + x - 6$ (див. рис.): $x \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$. Розв'язками системи буде переріз множин розв'язків:



Отже, $x \in (2; 6] \cup \{9\}$. Сума цілих розв'язків: $3 + 4 + 5 + 6 + 9 = 27$.

Відповідь: 27.

Приклад 3. (ЗНО'08). Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} \frac{(x+3)(x-2)}{x^2-1} \leq 1, \\ 4^{\sqrt{9-x^2}} \leq 0{,}25^{x-3}. \end{cases}$

У відповідь запишіть *кількість* цілих розв'язків системи. Якщо система має безліч розв'язків, то у відповідь запишіть число 100.

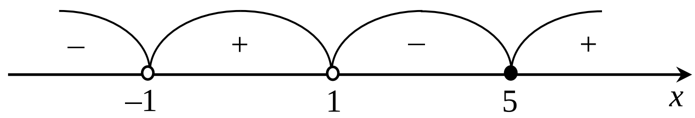
Розв'язання. ОДЗ $x \in [-3; 3]$.

$$\begin{cases} \frac{(x+3)(x-2)}{x^2-1} \le 1, \\ 4^{\sqrt{9-x^2}} \le 0{,}25^{x-3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x^2+x-6-x^2+1}{x^2-1} \le 0, \\ 4^{\sqrt{9-x^2}} \le 4^{3-x}; \end{cases}$$

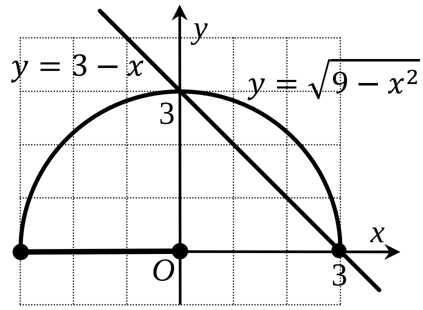
$$\begin{cases} \frac{x-5}{(x+1)(x-1)} \le 0, \\ \sqrt{9-x^2} \le 3-x. \end{cases}$$

Розв'яжемо першу нерівність методом інтервалів:

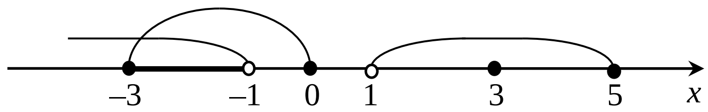


Отже, $x \in (-\infty; -1) \cup (1; 5]$.

Другу нерівність системи розв'яжемо графічно (див. рис.). Отже, $x \in [-3; 0] \cup \{3\}$.



Розв'язком системи буде переріз множин розв'язків нерівностей:



Отже, система має множину розв'язків $x \in [-3; -1) \cup \{3\}$, у якій 3 цілих.

Відповідь: 3.

Завдання для самостійної роботи.

1. Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} 2x \ge 5, \\ x-6 > 0. \end{cases}$

А	Б	В	Г
$(6; +\infty)$	$(-\infty; 2{,}5]$	$[2{,}5; +\infty)$	$[2{,}5; 6)$

2. Розв'яжіть подвійну нерівність $3 \le \frac{1}{2}x - 2{,}5 \le 5$.

А	Б	В	Г
$[3; 5]$	$[6; 10]$	$[11; 15]$	$[5{,}5; 7{,}5]$

3. Установіть відповідність між системою нерівностей (1-3) та її розв'язками (А-Д).

	Система нерівностей		*Розв'язки системи нерівностей*
1	$\begin{cases} x^2+3x-4\geq 0, \\ x-1\geq 0; \end{cases}$	А	$(-\infty;-4]\cup\{1\}$
2	$\begin{cases} x^2+3x-4\geq 0, \\ x-1\leq 0; \end{cases}$	Б	$[1;+\infty)$
3	$\begin{cases} x^2+3x-4\leq 0, \\ x-1< 0; \end{cases}$	В	$[-4;1]$
		Г	$[-4;1)$
		Д	$(-\infty;-4]$

4. Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} \frac{x-1}{x+2}>-1, \\ x^2-6x+9\leq 0. \end{cases}$ У відповідь запишіть *кількість* цілих розв'язків.

1.7. Аналітичний метод розв'язування раціональних нерівностей.

Розглянемо нерівності виду

$$f_1(x)\cdot g_1(x)\gtreqless 0 \tag{1.10}$$

та

$$\frac{f_2(x)}{g_2(x)}\gtreqless 0, \tag{1.11}$$

де $f_i(x)$, $g_i(x)$ $i=1,2$ – раціональні функції.

Тоді нерівності (1.10, 1.11) можна звести до рівносильної сукупності систем (табл. 1.7, 1.8).

Таблиця 1.7.

Розв'язання нерівності (1.10).

Строга нерівність	Рівносильна сукупність	Нестрога нерівність	Рівносильна сукупність
$f_1(x)\cdot g_1(x)>0$	$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} f_1(x)>0, \\ g_1(x)>0; \end{cases} \\ \begin{cases} f_1(x)<0, \\ g_1(x)<0; \end{cases}\end{array}\right.$	$f_1(x)\cdot g_1(x)\geq 0$	$\left[\begin{array}{l} f_1(x)\cdot g_1(x)=0; \\ \begin{cases} f_1(x)>0, \\ g_1(x)>0; \end{cases} \\ \begin{cases} f_1(x)<0, \\ g_1(x)<0; \end{cases}\end{array}\right.$
$f_1(x)\cdot g_1(x)<0$	$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} f_1(x)>0, \\ g_1(x)<0; \end{cases} \\ \begin{cases} f_1(x)<0, \\ g_1(x)>0; \end{cases}\end{array}\right.$	$f_1(x)\cdot g_1(x)\leq 0$	$\left[\begin{array}{l} f_1(x)\cdot g_1(x)=0; \\ \begin{cases} f_1(x)>0, \\ g_1(x)<0; \end{cases} \\ \begin{cases} f_1(x)<0, \\ g_1(x)>0. \end{cases}\end{array}\right.$

Таблиця 1.8.

Розв'язання нерівності (1.11).

Строга нерівність	Рівносильна сукупність	Нестрога нерівність	Рівносильна сукупність
$\frac{f_2(x)}{g_2(x)} > 0$	$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f_2(x) > 0,\\ g_2(x) > 0;\end{cases}\\ \begin{cases}f_2(x) < 0,\\ g_2(x) < 0;\end{cases}\end{array}\right.$	$\frac{f_2(x)}{g_2(x)} \geq 0$	$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f_1(x) = 0,\\ g_1(x) \neq 0;\end{cases}\\ \begin{cases}f_2(x) > 0,\\ g_2(x) > 0;\end{cases}\\ \begin{cases}f_2(x) < 0,\\ g_2(x) < 0;\end{cases}\end{array}\right.$
$\frac{f_2(x)}{g_2(x)} < 0$	$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f_2(x) > 0,\\ g_2(x) < 0;\end{cases}\\ \begin{cases}f_2(x) < 0,\\ g_2(x) > 0;\end{cases}\end{array}\right.$	$\frac{f_2(x)}{g_2(x)} \leq 0$	$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f_1(x) = 0,\\ g_1(x) \neq 0;\end{cases}\\ \begin{cases}f_2(x) > 0,\\ g_2(x) < 0;\end{cases}\\ \begin{cases}f_2(x) < 0,\\ g_2(x) > 0.\end{cases}\end{array}\right.$

Приклад 1. (ЗНО'17). Розв'яжіть нерівність $\frac{2x-4}{x+1} < 0$.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
$(-\infty; 2)$	$(-\infty; -1) \cup (-1; 2)$	$(-1; 2)$	$(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$	$(-\infty; -1)$

Розв'язання.

Розглянемо рівносильну сукупність

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-4 > 0,\\ x+1 < 0;\end{cases}\\ \begin{cases}2x-4 < 0,\\ x+1 > 0;\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x > 2,\\ x < -1;\end{cases}\\ \begin{cases}x < 2,\\ x > -1;\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\emptyset,\\ x \in (-1; 2);\end{array}\right.$$

$$x \in (-1; 2).$$

Відповідь: В.

Приклад 2. (ЗНО'18). Розв'яжіть нерівність $|x+4| \cdot (x-1) < 0$.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
$(-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$	$(-4; 1)$	$(-\infty; 1)$	$(-1; 4)$	$(-\infty; -4) \cup (-4; 1)$

Розв'язання.

Розглянемо рівносильну сукупність

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}|x+4|>0,\\ x-1<0;\end{cases}\\ \begin{cases}|x+4|<0,\\ x-1>0;\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\neq -4,\\ x<1;\end{cases}\\ \begin{cases}\emptyset,\\ x>1;\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x\in(-\infty;-4)\cup(-4;1),\\ \emptyset;\end{array}\right.$$

$$x\in(-\infty;-4)\cup(-4;1).$$

Відповідь: Д.

Приклад 3. (ЗНО'09). Знайдіть *кількість* усіх цілих розв'язків нерівності $\frac{x^2-x-12}{(x+1)^2}\leq 0$. Якщо нерівність має безліч цілих розв'язків, то у відповідь запишіть число 100.

Розв'язання. Розглянемо рівносильну сукупність

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-x-12=0,\\ (x+1)^2\neq 0;\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-x-12>0,\\ (x+1)^2<0;\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-x-12<0,\\ (x+1)^2>0;\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=-3, x_2=4,\\ x\neq -1;\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-\infty;-3)\cup(4;+\infty),\\ \emptyset;\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-3;4),\\ x\neq -1;\end{cases}\end{array}\right.$$

$$x\in[-3;-1)\cup(-1;4].$$

Отже, нерівність має 7 цілих нерівностей.

Відповідь: 7.

Завдання для самостійної роботи.

1. Розв'яжіть аналітичним методом нерівність $\frac{|x-5|}{(x+2)^2}\leq 0$.

А	Б	В	Г
$\{-2\}$	$(-\infty;5]$	$\{5\}$	$(-2;5]$

2. Розв'яжіть аналітичним методом нерівність $\frac{x^2-x-2}{|x-2|} \leq 0$.

А	**Б**	**В**	**Г**
$[-1;2]$	$[-1;2)$	$(-\infty;2)$	$(-\infty;-1]$

3. Установіть відповідність між нерівністю (1-3) та її розв'язками (А-Д).

	Нерівність		*Розв'язки нерівності*
1	$(x-1)^2 \cdot (x-5) \geq 0$	А	$\{1\} \cup [5;+\infty)$
2	$\frac{x-5}{(x-1)^2} \geq 0$	Б	$[1;5)$
3	$\frac{(x-1)^2}{x-5} < 0$	В	$(-\infty;5)$
		Г	$[5;+\infty)$
		Д	$(-\infty;1) \cup (1;5)$

4. Розв'яжіть аналітичним методом нерівність $\frac{x^2-x-2}{x^2-3x-4} \leq 0$. У відповідь запишіть *кількість* цілих розв'язків.

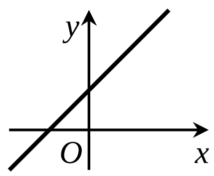
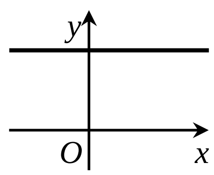
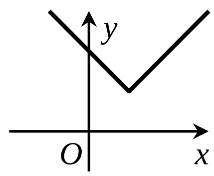
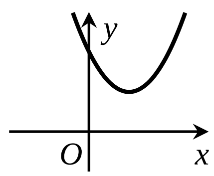
2. ЗАСТОСУВАННЯ НЕРІВНОСТЕЙ ТА ЇХ СИСТЕМ ДО РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

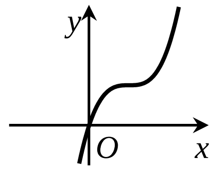
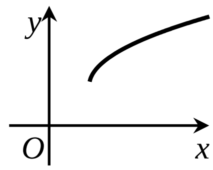
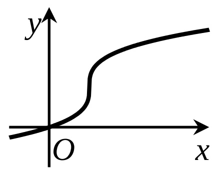
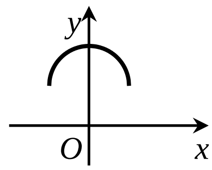
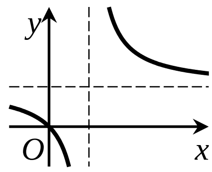
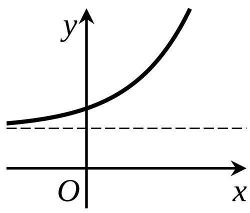
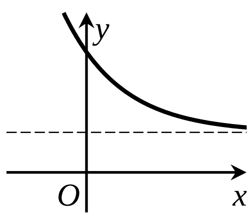
2.1. Деякі задачі, які зводяться до розв’язування нерівностей та систем нерівностей.

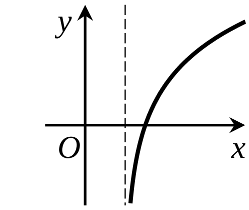
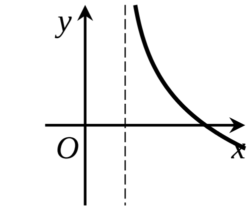
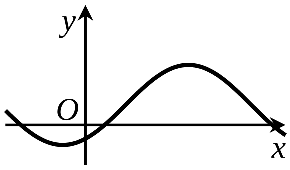
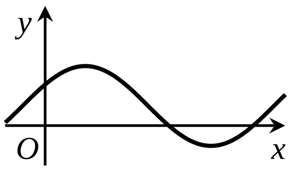
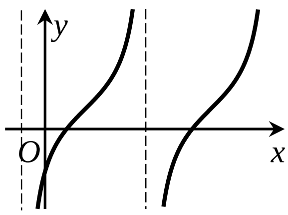
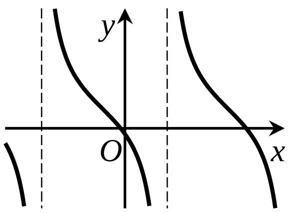
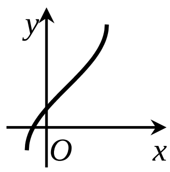
У багатьох задачах, які виносяться на ЗНО, постає питання знаходження області визначення та області значення функції, оцінки певних параметрів та ін. Ці задачі зводяться до розв’язування нерівностей та систем нерівностей. Розглянемо деякі основні функції, графіки та їхні області визначення і області значення (табл. 2.1).

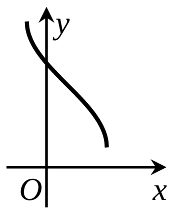
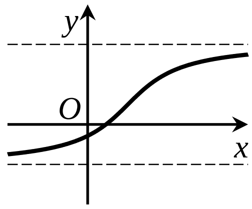
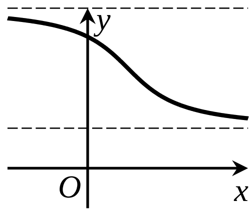
Таблиця 2.1.

Деякі елементарні функції та їхні графіки.

Функція та її характеристики	Схематичний графік функції
$y = kx + b,\ k \neq 0$ $D(y): x \in \mathbb{R}$ $E(y): y \in \mathbb{R}$	
$y = kx + b,\ k = 0$ $D(y): x \in \mathbb{R}$ $E(y): y \in \{b\}$	
$y = \|x - a\| + b$ $D(y): x \in \mathbb{R}$ $E(y): y \in [b; +\infty)$	
$y = (x - a)^2 + b$ $D(y): x \in \mathbb{R}$ $E(y): y \in [b; +\infty)$	

$y=(x-a)^3+b$ $D(y): x\in\mathbb{R}$ $E(y): y\in\mathbb{R}$	
$y=\sqrt{x-a}+b$ $D(y): x\in[a;+\infty)$ $E(y): y\in[b;+\infty)$	
$y=\sqrt[3]{x-a}+b$ $D(y): x\in\mathbb{R}$ $E(y): y\in\mathbb{R}$	
$y=\sqrt{a^2-x^2}+b,\ a>0$ $D(y): x\in[-a;a]$ $E(y): y\in[b;b+a]$	
$y=\frac{1}{x-a}+b$ $D(y): x\in\mathbb{R}\backslash\{a\}$ $E(y): y\in\mathbb{R}\backslash\{b\}$	
$y=a^{x-c}+b,\ a>1$ $D(y): x\in\mathbb{R}$ $E(y): y\in(b;+\infty)$	
$y=a^{x-c}+b,\ 0<a<1$ $D(y): x\in\mathbb{R}$ $E(y): y\in(b;+\infty)$	

$y = \log_a(x - c) + b,\ a > 1$ $D(y): x \in (c; +\infty)$ $E(y): y \in \mathbb{R}$	
$y = \log_a(x - c) + b,\ 0 < a < 1$ $D(y): x \in (c; +\infty)$ $E(y): y \in \mathbb{R}$	
$y = a \cdot \sin(x - c) + b,\ a > 0$ $D(y): x \in \mathbb{R}$ $E(y): y \in [-a + b; a + b]$	
$y = a \cdot \cos(x - c) + b,\ a > 0$ $D(y): x \in \mathbb{R}$ $E(y): y \in [-a + b; a + b]$	
$y = a \cdot \mathrm{tg}(x - c) + b,\ a > 0$ $D(y): x \in \mathbb{R}/\left\{c + \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}\right\}$ $E(y): y \in \mathbb{R}$	
$y = a \cdot \mathrm{ctg}(x - c) + b,\ a > 0$ $D(y): x \in \mathbb{R}/\{c + \pi n, n \in \mathbb{Z}\}$ $E(y): y \in \mathbb{R}$	
$y = a \cdot \arcsin(x - c) + b,\ a > 0$ $D(y): x \in [-1 + c; 1 + c]$ $E(y): y \in \left[-\frac{a\pi}{2} + b; \frac{a\pi}{2} + b\right]$	

$y = a \cdot \arccos(x - c) + b,\ a > 0$ $D(y)\colon x \in [-1 + c; 1 + c]$ $E(y)\colon y \in [b; a\pi + b]$	
$y = a \cdot \operatorname{arctg}(x - c) + b,\ a > 0$ $D(y)\colon x \in \mathbb{R}$ $E(y)\colon y \in \left(-\frac{a\pi}{2} + b; \frac{a\pi}{2} + b\right)$	
$y = a \cdot \operatorname{arcctg}(x - c) + b,\ a > 0$ $D(y)\colon x \in \mathbb{R}$ $E(y)\colon y \in (b; a\pi + b)$	

Приклад 1. (ЗНО'17). Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt[4]{50 - 3x}$. У відповідь запишіть *найбільше двоцифрове число*, що належить області визначення цієї функції.

Розв'язання.

Областю визначення будуть розв'язки нерівності:

$$50 - 3x \geq 0;$$

$$x \leq \frac{50}{3};$$

$$D(y)\colon x \in \left(-\infty; 16\frac{2}{3}\right].$$

Відповідь: 16.

Приклад 2. (ПЗНО'09). Укажіть область визначення функції $f(x) = \sqrt[6]{4 - x^2}$.

А	Б	В	Г	Д
$[-2; 2]$	$(-\infty; 4]$	$[4; +\infty)$	$[0; 2]$	$[2; +\infty)$

Розв'язання.

Областю визначення будуть розв'язки нерівності:

$$4 - x^2 \geq 0;$$

$$x^2 - 4 \le 0;$$

$$D(y): x \in [-2; 2].$$

Відповідь: А.

Приклад 3. (ПЗНО'13). При якому значенні x функція $y = 4 - |20x + 7|$ набуває найбільшого значення?

Розв'язання.

Знайдемо область значень функції:

$$|20x + 7| \ge 0;$$

$$-|20x + 7| \le 0;$$

$$4 - |20x + 7| \le 4;$$

$$y \le 4;$$

$$E(y): y \in (-\infty; 4].$$

Отже, найбільше значення функції $y = 4$ досягається при $|20x + 7| = 0$, тобто при $x = -\frac{7}{20} = -0{,}35$.

Відповідь: –0,35.

Завдання для самостійної роботи.

1. Знайдіть область визначення функції $y = \lg(2x - 5)$.

А	**Б**	**В**	**Г**
$[2{,}5; +\infty)$	$(2{,}5; +\infty)$	$(-\infty; 2{,}5)$	$(-\infty; 2{,}5]$

2. Знайдіть область значень функції $y = -2 \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$.

А	**Б**	**В**	**Г**
$[-1; 1]$	$[-2; 2]$	$[-1; 3]$	$[-3; 1]$

3. Установіть відповідність між функцією (1-3) та її областю визначення (А-Д).

	Функція		*Область визначення*
1	$f(x) = \sqrt{3 - x}$	А	$[-4; -2]$
2	$f(x) = \sqrt[3]{3 - x}$	Б	$[2; 4]$
3	$f(x) = \arccos(3 - x)$	В	$(-\infty; +\infty)$
		Г	$[3; +\infty)$
		Д	$(-\infty; 3]$

4. Знайдіть область значень функції $f(x) = |x + 1| - |x - 1|$. У відповідь запишіть *кількість* цілих значень.

2.2. Метод заміни змінної розв'язування раціональних нерівностей.

При розв'язуванні нерівностей виду

$$f(x) \gtrless 0 \qquad (2.1)$$

деколи заміна $x = \varphi(t)$ дозволяє перейти до нерівності

$$f\big(\varphi(t)\big) \gtrless 0, \qquad (2.2)$$

розв'язання якої може бути простішим (функція має простіший вид, зменшується степінь функції та ін.). Після розв'язання нерівності (2.2) будується нерівність (система або сукупність нерівностей) відносно змінної x, яка і дає кінцевий розв'язок нерівності (2.1). Зауважимо, що часто вдається знайти обернену заміну $t = \varphi^{-1}(x)$, яка спрощує нерівність (2.1).

Приклад 1. (ЗНО'14). Розв'яжіть нерівність $(x+4)^2 \le 16$.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
$(-\infty; -8]$	$(-\infty; 0]$	$(-\infty; 4]$	$[-8; 8]$	$[-8; 0]$

Розв'язання.

Зробимо заміну $x = t - 4$ (або обернену $t = x + 4$):

$$t^2 \le 16;$$

$$-4 \le t \le 4.$$

Повернемося до змінної x:

$$-4 \le x + 4 \le 4;$$

$$-8 \le x \le 0;$$

$$x \in [-8; 0].$$

Відповідь: Д.

Приклад 2. (ЗНО'12). Укажіть множину усіх значень a, при яких виконується рівність $|a^3 - a^2| = a^3 - a^2$.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
$[1; +\infty)$	$\{0\} \cup [1; +\infty)$	$(-\infty; -1] \cup \{0\}$	$[0; 1]$	$(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$

Розв'язання.

Зробимо заміну $t = a^3 - a^2$:

$$|t| = t;$$

$$t \ge 0.$$

Повернемося до змінної a:

$$a^3 - a^2 \geq 0;$$

$$a^2 \cdot (a-1) \geq 0;$$

$$a \in \{0\} \cup [1; +\infty).$$

Відповідь: Б.

Приклад 3. Розв'яжіть нерівність $x^4 + x^2 - 2 > 0$.

Розв'язання. Зробимо заміну $t = x^2$:

$$t^2 + t - 2 > 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} t < -2, \\ t > 1. \end{array}\right.$$

Повернемося до змінної x:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 < -2, \\ x^2 > 1; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{c} \emptyset, \\ x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty); \end{array}\right.$$

$$x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty).$$

Відповідь: $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Завдання для самостійної роботи.

1. Розв'яжіть методом заміни змінної нерівність $|x - 5| \leq 3$.

А	Б	В	Г
$[2; 8]$	$(-\infty; 2] \cup [8; +\infty)$	$(-\infty; -8] \cup [-2; +\infty)$	$[-3; 3]$

2. Розв'яжіть методом заміни змінної нерівність $x^6 - 9x^3 + 8 \leq 0$.

А	Б	В	Г
$[1; 8]$	$(-\infty; 2]$	$[1; 2]$	$(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$

3. Установіть відповідність між нерівністю (1-3) та її розв'язками (А-Д).

	Нерівність		*Розв'язки нерівності*
1	$x^4 + 5x^2 + 4 \leq 0$	А	$[-1; 1]$
2	$x^4 - 5x^2 + 4 \leq 0$	Б	$[-2; -1] \cup [1; 2]$
3	$x^4 - 3x^2 - 4 \leq 0$	В	$[-2; 2]$
		Г	$[1; 4]$
		Д	$\emptyset$

4. Розв'яжіть нерівність $(x^2 - 3x)^2 - 2 \cdot (x^2 - 3x) - 8 < 0$ методом заміни змінної. У відповідь запишіть *суму* цілих розв'язків.

2.3. Розв'язування нерівностей та систем нерівностей з параметрами.

Особливістю задач із параметрами є те, що вони охоплюють усі теми шкільної математики, тому є унікальним засобом для систематизації й узагальнення навчальних досягнень учнів. Для розв'язування задач з параметрами передбачається наявність досить високого рівня абстрагування та алгоритмізації, що у свою чергу, розвиває навички евристичних, дослідницьких прийомів роботи, культуру мислення, ініціативу, творчість, інтелектуальний розвиток особистості [5, 7, 20, 23].

В основі розв'язання задач із параметрами покладено такий принцип: значенням параметра (або параметрів) вважається довільне фіксоване число. Проте наявність параметрів у задачі передбачає обов'язкове дослідження існування розв'язку залежно від конкретних числових значень параметрів із області їхніх допустимих значень, а також знаходження всіх таких розв'язків. Задача з параметром, таким чином, розглядається як множина рівнянь, нерівностей або їх систем, які отримується, коли параметри набувають конкретних значень. Форма запису відповідей у задачах з параметрами має спеціальний вигляд: розв'язки вказуються для кожного допустимого значення параметра.

Серед методів розв'язування задач з параметрами можна виокремити аналітичний, графічний та методи, які базуються на деяких особливостях функцій, які наведені у завданні [7].

Приклад 1. (ЗНО'18). Розв'яжіть нерівність $\frac{(9x^2-36x+36)(a-4)}{2^x-a} \geq 0$ залежно від значень параметра a.

Розв'язання.

Оскільки $9x^2 - 36x + 36 = 9(x-2)^2$, то початкова нерівність буде рівносильна такій:

$$\frac{(x-2)^2(a-4)}{2^x-a} \geq 0.$$

Розглянемо такі випадки:

1) $a \leq 0$. Тоді $2^x - a > 0$, $a - 4 < 0$, отже, $(x-2)^2 \leq 0$, $x = 2$.

2) $0 < a < 4$. Тоді $a - 4 < 0$, отже, $\frac{(x-2)^2}{2^x - a} \leq 0$:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x-2)^2 = 0, \\ 2^x - a \neq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} (x-2)^2 > 0, \\ 2^x - a < 0; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2, \\ a \neq 4; \end{cases} \\ \begin{cases} x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}, \\ x \in (-\infty; \log_2 a); \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x \in (-\infty; \log_2 a); \end{array}\right.$$

$$x \in (-\infty; \log_2 a) \cup \{2\}.$$

3) $a = 4$. Тоді нерівність справджується на ОДЗ:

$$2^x - 4 \neq 0;$$

$$x \neq 2;\ x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}.$$

4) $a > 4$. Тоді $a - 4 > 0$, отже, $\frac{(x-2)^2}{2^x - a} \geq 0$:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x-2)^2 = 0, \\ 2^x - a \neq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} (x-2)^2 > 0, \\ 2^x - a > 0; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2, \\ a \neq 4; \end{cases} \\ \begin{cases} x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}, \\ x \in (\log_2 a; +\infty); \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x \in (\log_2 a; +\infty); \end{array}\right.$$

$$x \in \{2\} \cup (\log_2 a; +\infty).$$

Відповідь:

Якщо $a \leq 0$, то $x = 2$;

якщо $0 < a < 4$, то $x \in (-\infty; \log_2 a) \cup \{2\}$;

якщо $a = 4$, то $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$;

якщо $a > 4$, то $x \in \{2\} \cup (\log_2 a; +\infty)$.

Приклад 2. (ПЗНО’18). Розв’яжіть нерівність $\sqrt{\frac{4x-1}{x-a}} > a$ залежно від значень параметра a.

Розв’язання.

Розглянемо такі випадки:

1) $a < 0$. Тоді нерівність справджується на всій ОДЗ:

$$\frac{4x-1}{x-a} \geq 0;$$

$$x \in (-\infty; a) \cup \left[\frac{1}{4}; +\infty\right).$$

2) $a \geq 0$. Тоді при піднесенні до квадрату отримуємо рівносильну нерівність:

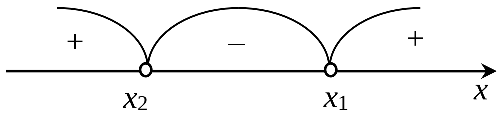
$$\frac{4x-1}{x-a} > a^2;$$

$$\frac{4x-1-a^2x+a^3}{x-a} > 0;$$

$$\frac{(4-a^2)x+a^3-1}{x-a} > 0.$$

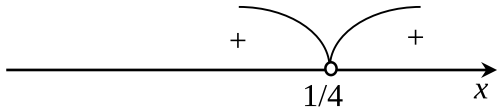
Розв’яжемо останню нерівність методом інтервалів. При $a = 2$ чисельник нулів не має, якщо $a \in [0; 2) \cup (2; +\infty)$, то нулем чисельника є $x_1 = \frac{a^3-1}{a^2-4}$. Знаменник перетворюється в нуль при $x_2 = a$. Так як при $a = \frac{1}{4}$ справджується рівність $x_1 = x_2$, то виокремимо ще такі випадки:

2.1) $a \in \left[0; \frac{1}{4}\right)$: $x_1 > x_2$



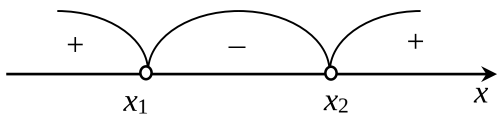
Отже, $x \in (-\infty; a) \cup \left(\frac{a^3-1}{a^2-4}; +\infty\right)$.

2.2) $a = \frac{1}{4}$: $x_1 = x_2 = \frac{1}{4}$



Отже, $x \in \left(-\infty; \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

2.3) $a \in \left(\frac{1}{4}; 2\right)$: $x_1 < x_2$



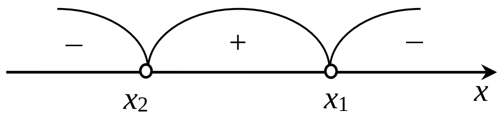
Отже, $x \in \left(-\infty; \frac{a^3-1}{a^2-4}\right) \cup (a; +\infty)$.

2.4) $a = 2$:

$$\frac{7}{x-2} > 0.$$

Отже, $x \in (2; +\infty)$.

2.5) $a \in (2; +\infty)$: $x_1 > x_2$



Отже, $x \in \left(a; \frac{a^3-1}{a^2-4}\right)$.

Відповідь:

Якщо $a < 0$, то $x \in (-\infty; a) \cup \left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$;

якщо $0 \le a < \frac{1}{4}$, то $x \in (-\infty; a) \cup \left(\frac{a^3-1}{a^2-4}; +\infty\right)$;

якщо $a = \frac{1}{4}$, то $x \in \left(-\infty; \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$;

якщо $\frac{1}{4} < a < 2$, то $x \in \left(-\infty; \frac{a^3-1}{a^2-4}\right) \cup (a; +\infty)$;

якщо $a = 2$, то $x \in (2; +\infty)$;

якщо $a > 2$, то $x \in \left(a; \frac{a^3-1}{a^2-4}\right)$.

Приклад 3. (ЗНО'19). Задано систему нерівностей

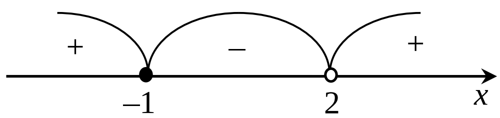
$$\begin{cases} \frac{x+1}{x-2} \ge 0, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{2\sin^2(\pi a) + \cos(2\pi a) + x} > a, \end{cases}$$

де x – змінна, a – стала.

1. Розв'яжіть першу нерівність цієї системи.
2. Визначте множину розв'язків другої нерівності системи залежно від значень a.
3. Визначте всі розв'язки системи залежно від значень a.

Розв'язання.

1) Використаємо для розв'язання першої нерівності метод інтервалів:



Отже, $x \in (-\infty; -1] \cup (2; +\infty)$.

2) Оскільки $\cos(2\pi a) = 1 - 2\sin^2(\pi a)$, то другу нерівність можна записати так:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2\sin^2(\pi a)+1-2\sin^2(\pi a)+x} > a;$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{1+x} > a.$$

Розглянемо такі випадки:

2.1) Якщо $a \le 0$, то множиною розв'язків нерівності буде вся множина дійсних чисел: $x \in \mathbb{R}$.

2.2) Якщо $a > 0$, то

$$2^{-1-x} > 2^{\log_2 a};$$

$$-1 - x > \log_2 a;$$

$$-x > 1 + \log_2 a;$$

$$x < -\log_2 2a;$$

$$x \in (-\infty; -\log_2 2a).$$

3) Для визначення розв'язків системи залежно від значень a розглянемо такі випадки:

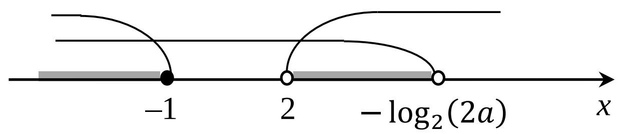
3.1) $a \le 0$:

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -1] \cup (2; +\infty), \\ x \in \mathbb{R}; \end{cases}$$

$$x \in (-\infty; -1] \cup (2; +\infty).$$

3.2) $0 < a < \frac{1}{8}$:

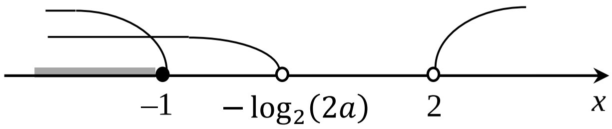
$$\begin{cases} x \in (-\infty; -1] \cup (2; +\infty), \\ x \in (-\infty; -\log_2 2a); \end{cases}$$



$$x \in (-\infty; -1] \cup (2; -\log_2 2a).$$

3.3) $\frac{1}{8} \le a < 1$:

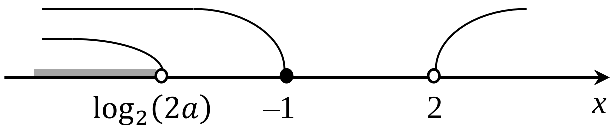
$$\begin{cases} x \in (-\infty; -1] \cup (2; +\infty), \\ x \in (-\infty; -\log_2 2a); \end{cases}$$



$$x \in (-\infty; -1].$$

3.4) $a \ge 1$:

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -1] \cup (2; +\infty), \\ x \in (-\infty; -\log_2 2a); \end{cases}$$



$$x \in (-\infty; -\log_2 2a).$$

Відповідь:

1) $x \in (-\infty; -1] \cup (2; +\infty)$.

2) Якщо $a \le 0$, то $x \in \mathbb{R}$;

якщо $a > 0$, то $x \in (-\infty; -\log_2 2a)$.

3) Якщо $a \le 0$, то $x \in (-\infty; -1] \cup (2; +\infty)$;

якщо $0 < a < \frac{1}{8}$, то $x \in (-\infty; -1] \cup (2; -\log_2 2a)$;

якщо $\frac{1}{8} \le a < 1$, то $x \in (-\infty; -1]$;

якщо $a \ge 1$, то $x \in (-\infty; -\log_2 2a)$.

Завдання для самостійної роботи.

1. Розв’яжіть нерівність $\frac{x-5}{x-a} \ge 0$, якщо $1 < a < 3$.

А	**Б**	**В**	**Г**
$(1; 3) \cup [5; +\infty)$	$(-\infty; 5] \cup (a; +\infty)$	$(-\infty; a) \cup [5; +\infty)$	$(a; 5]$

2. Вкажіть значення параметра a, при якому нерівність $x^2 - 4x + a \le 0$ не має розв'язків.

А	**Б**	**В**	**Г**
$[4;+\infty)$	$(4;+\infty)$	$\mathbb{R}\backslash\{4\}$	$(-\infty;4]$

3. Установіть відповідність між значеннями параметра a (1-3) та розв'язками нерівності $\frac{x-a}{x+4} \le 0$ (А-Д).

	Значення a		*Розв'язки нерівності*
1	$a < -4$	А	$\emptyset$
2	$a = -4$	Б	$\mathbb{R}\backslash\{-4\}$
3	$a > -4$	В	$[a;-4)$
		Г	$(-4;a]$
		Д	$(-\infty;a] \cup (-4;+\infty)$

4. Знайдіть значення параметра a, при якому розв'язками нерівності $x^2 + 2x + a \le 0$ є проміжок довжиною 8.

2.4. Деякі методи доведення раціональних нерівностей.

Доведення раціональних нерівностей базується на різноманітних методах, серед яких можна виокремити такі [4]:

- застосування властивостей числових нерівностей;
- зведення нерівності до однієї з класичних (Коші, Коші-Буняковського, Бернуллі, Ієнсена та ін.);
- доведення від «супротивного»;
- використання принципу математичної індукції;
- оцінювання та «посилення» нерівності;
- застосування властивостей операцій над векторами;
- використання властивостей функцій (обмеженість, монотонність, опуклість та ін.);
- геометрична інтерпретація нерівностей.

Слід зазначити, що вказані методи можуть бути використані і при розв'язуванні рівнянь, нерівностей чи їх систем з метою обґрунтування рівносильних перетворень.

Приклад 1. (ДемоЗНО'21). Доведіть, що $x^4 + y^4 \ge x^3y + xy^3$ для всіх дійсних чисел x та y.

Доведення.

Розглянемо такі випадки:

1) якщо $xy = 0$, то

$$x^4 + y^4 \geq xy(x^2 + y^2);$$
$$x^4 + y^4 \geq 0,$$

тобто отримуємо правильну нерівність.

2) якщо $xy < 0$, то у нерівності

$$x^4 + y^4 \geq xy(x^2 + y^2)$$

у лівій частині знаходиться додатний вираз, а у правій – від'ємний, тобто отримуємо правильну нерівність.

3) якщо $xy > 0$, то початкову нерівність можна отримати за допомогою таких рівносильних перетворень:

$$(x - y)^4 \geq 0;$$
$$x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4 \geq 0;$$
$$x^4 + y^4 \geq 3x^3y - 6x^2y^2 + xy^3 + x^3y + xy^3;$$
$$x^4 + y^4 \geq 3xy(x - y)^2 + x^3y + xy^3.$$

У останній нерівності замінимо додатну величину $3xy(x - y)^2$ на 0, тобто «посилимо» нерівність. Отже, початкова нерівність справджується для всіх $x, y \in \mathbb{R}$.

Зауважимо, що при $x = y$ нерівність перетворюється у рівність.

Приклад 2. (Нерівність Бернуллі). Доведіть, що для довільного дійсного $x \geq -1$ та $n \in \mathbb{N}$ справедлива нерівність $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

Доведення.

Використаємо принцип математичної індукції.

1) Якщо $n = 1$, то нерівність перетворюється у правильну рівність.

2) Припустимо, що при $n = k$ нерівність також справедлива, тобто

$$(1 + x)^k \geq 1 + kx.$$

3) Доведемо істинність нерівності при $n = k + 1$, тобто

$$(1 + x)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)x.$$

Перетворимо ліву частину:

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x).$$

За припущенням $(1+x)^k \geq 1+kx$, а за умовою $1+x \geq 0$, тобто:

$$(1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x).$$

Оскільки

$$(1+kx)(1+x) = 1+(1+k)x+kx^2 \geq 1+(1+k)x,$$

то справджується нерівність

$$(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x,$$

що і треба було довести.

Приклад 3. (ЗНО’10). Розв’яжіть систему $\begin{cases} 5\cos\frac{\pi y}{2} = x^2-8x+21, \\ y+5x-4=0. \end{cases}$ Якщо система має єдиний розв’язок $(x_0; y_0)$ то у відповідь запишіть *суму* x_0+y_0; якщо система має більше, ніж один розв’язок, то у відповідь запишіть *кількість* усіх розв’язків.

Розв’язання.

Доведемо, що система має 1 розв’язок. Дійсно, так як

$$-1 \leq \cos\frac{\pi y}{2} \leq 1;$$

$$-5 \leq 5\cos\frac{\pi y}{2} \leq 5;$$

$$x^2-8x+21 = (x-4)^2+5 \geq 5,$$

то рівність у першому рівнянні можлива лише якщо

$$\begin{cases} 5\cos\frac{\pi y}{2} = 5, \\ x^2-8x+21 = 5. \end{cases}$$

З останнього рівняння маємо $x_0 = 4$, а з рівності $y+5x-4=0$ отримуємо $y_0 = -16$. Безпосередня перевірка показує що $(4; -16)$ є розв’язком початкової системи, $x_0+y_0 = -12$.

Відповідь: –12.

Завдання для самостійної роботи.

1. Доведіть нерівність $2x^2+y^2 \geq 2xy+2x-1$.

2. Доведіть нерівність $\left|x+\frac{1}{x}\right| \geq 2$.

3. Доведіть нерівність $x^2+\frac{1}{x^2+1} \geq 1$.

ВИСНОВКИ

Розв'язування раціональних нерівностей є важливим розділом шкільного курсу алгебри, оскільки вивчення цього розділу є передумовою до розуміння властивостей функцій (проміжки знакосталості, область визначення та ін.), методики їх дослідження (проміжки зростання/спадання) та деяких інших задач.

При складанні ЗНО для отримання найвищого балу учням необхідні вміння розв'язувати нерівності. Адже, кожного року варіанти ЗНО обов'язково містять задачі на розв'язування нерівностей, зокрема раціональних.

Але якби ці завдання не пропонувалися на ЗНО, то все одно в шкільній математиці, особливо в спеціалізованих класах і школах, завданням на розв'язування нерівностей повинна приділятися велика увага. У цьому глибоко переконані провідні фахівці: адже відомо, яку роль відіграють ці завдання у формуванні логічного мислення і математичної культури у школярів. Тому учні, які володіють методами розв'язування нерівностей, успішно справляються (і досвід це підтверджує) з іншими завданнями.

У даній роботі розглянуто основні види раціональних нерівностей, а також методи (рівносильних перетворень, графічний, інтервалів, аналітичний, заміни змінної) їх розв'язування. Також розроблено деякі завдання, що відповідають специфікації ЗНО, які можна використовувати учням для самопідготовки.

ЛІТЕРАТУРА

1. https: // mon.gov.ua /ua /osvita/ zagalna-serednya-osvita/ navchalni-programi /navchalni-programi-5-9-klas
2. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2017. – 272 с. : іл.
3. Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х.: Гімназія, 2018. – 400 с. : іл.
4. Белешко Д.Т., Віднічук М.А., Крайчук О.В. Методика розв’язування нестандартних математичних задач. Частина 1 / Д.Т. Белешко, М.А. Віднічук, О.В. Крайчук. – Х. : Вид. група «Основа», 2017. – 127 с.
5. Вишенський В.А., Перестюк М.О., Самойленко А.М. Конкурсні задачі з математики. – К.: Вища школа, 2001. – 432 с.
6. Гече Ф.Е. Збірник конкурсних тестових завдань з математики. – Ужгород: SHARK, 2015. – 238 с.
7. Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. Задачи с параметрами. 3-е издание, дополненное и переработанное. – М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 2005, – 328 с.
8. Збірник завдань Всеукраїнських олімпіад з математики Ужгородського національного університету: метод. рек. для студ. спец. «Початкова освіта» та «Середня освіта» / М.М. Повідайчик, М.І. Глебена, М.П. Шулла – Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2018. – 55 с.
9. Істер О.С., Єргіна О.В. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень). Підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти. – К.: Генеза, 2019. – 416 с.
10. Капіносов А. та ін. ЗНО 2018. Математика. Комплексна підготовка. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2018. – 560 с.
11. Каплан Я.Л. Розв’язування нерівностей. – К.: Радянська школа, 1967. – 123 с.

12. Конкурсні тестові завдання для випускників. Математика / укл. Ф.Е. Гече. – Ужгород: УжНУ «Говерла», 2007. – 230с.
13. Математичні олімпіади школярів України 1991–2000. – Київ, 2003. – 544 с.
14. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу. – Х.: Світ дитинства. 2008. – 448 с.
15. Нікулін О.В., Кукуш О.Г. Геометрія. Поглиблений курс 7–9 класи. – Київ, Ірпінь: ВТФ «Перун», 1999. – 332 с.
16. Орос В.М., Петечук В.М., Петечук К.М. Контрольно–практичні роботи з математики. Частина І. – Ужгород: ІВЦ ЗІППО, 2006. – 200 с.
17. Орос В.М., Петечук В.М., Петечук К.М. Параметр. Посібник для абітурієнта та вчителя. – Ужгород: ІВЦ ЗІППО, 2005. – 44 с.
18. Полонський В.Б., Рабинович Ю.М., Якір М.С. Вчимося розв'язувати задачі з геометрії. – К.: Магістр–Б, 1998. – 256 с.
19. Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навчальний посібник. – К.: А.С.К., 2004. – 344 с.
20. Федак І.В. Методи розв’язування олімпіадних завдань з математики і не тільки їх. – Чернівці: Зелена Буковина, 2002. – 340 с.
21. Шапочка І.В. Збірник конкурсних завдань з математики / І.В. Шапочка, В.І. Шапочка. – Ужгород: Патент, 2004. – Ч.1. – 115 с.
22. Шапочка І.В. Збірник конкурсних завдань з математики / І.В. Шапочка, В.І. Шапочка. – Ужгород: Патент, 2004. – Ч.2. – 126 с.
23. Ясінський В.А. Практикум з розв'язування задач математичних олімпіад. – Харків: Основа, 2006. – 126 с.

ДОДАТКИ

Відповіді на завдання самостійної роботи

Підрозділ	№ завдання					
	1	2	3.1	3.2	3.3	4
2.1	А	Б	А	Б	Д	4
2.2	В	Б	В	Б	Д	1
2.3	Б	А	В	А	Д	3
2.4	В	А	Д	В	Б	26
2.5	Г	В	А	Б	Д	1
2.6	А	В	Б	А	Г	1
2.7	В	Б	А	Г	Д	2
3.1	Б	В	Д	В	Б	5
3.2	А	В	Д	Б	В	3
3.3	В	Б	В	А	Г	–15

Підписано до друку 27.05.2022. Формат 60х84/16.
Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. 2.
Наклад 100 прим. Віддруковано на різографі.

Видавництво УжНУ «Говерла»
88000, м. Ужгород, вул. Капітульна, 18.
Свідоцтво про внесення до державного реєстру видавців виготівників, і розповсюджувачів видавничої продукції
Серія 3т №32 від 31 травня 2006 року