МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІНЖЕНЕРНО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА КОМП'ЮТЕРНИХ СИСТЕМ ТА МЕРЕЖ

Мамай Л. М.

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Навчально-методичний посібник

для студентів 2-го курсу інженерно-технічного факультету, спеціальність 123 — «Комп'ютерна інженерія»

Ужгород – 2021

Навчально-методичний посібник з курсу «Теорія ймовірностей та математична статистика», для студентів 2-го курсу інженерно-технічного факультету спеціальності 123 — «Комп'ютерна інженерія»

Укладачі: Мамай Л.М., канд. фіз.-мат наук

Рецензенти: — доктор фіз.-мат. наук, професор кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу Сливка-Тилищак Г. І.

Відповідальний за випуск: Туряниця І.І., канд. фіз.-мат. наук, професор, декан інженерно-технічного факультету.

Даний навчально-методичний посібник розглянуто та схвалено на засіданні кафедри комп'ютерних систем та мереж, протокол № 7 від 28. 02. 2018р. та методичної комісії інженерно-технічного факультету, протокол № 3 від березня 2021 р.

ВСТУП

Теорію ймовірностей можна розглядати як об’єднання певної кількості різнорідних і доволі розвинених дисциплін, кожна з яких зокрема і всі вони разом мають стати науковим багажем кожного освіченого спеціаліста-інженера.

Навчальний посібник призначений для вивчення основних понять, методів, формул і теорем теорії ймовірностей та математичної статистики студентами інженерних спеціальностей.

Посібник складається з трьох розділів: випадкові події, випадкові величини та основи математичної статистики, кожен з яких, в свою чергу, включає чотири теми. В *першому розділі* наведені основні поняття та теореми теорії ймовірностей, у *другому* — розглянуті поняття, пов’язані з випадковими величинами: способами їх задання, числовими характеристиками та основними законами дискретних та неперервних випадкових величин; дано поняття про закон великих чисел. *Третій розділ* присвячений основним поняттям математичної статистики — науки, що використовує теорію ймовірностей для обробки численних одиниць інформації як наслідків експерименту. Розглянуті дві категорії задач, які розв’язує математична статистика: статистичне оцінювання (точкове, інтервальне) параметрів генеральної сукупності та перевірка правдивості статистичних гіпотез про закон розподілу ознаки генеральної сукупності на підставі обробки результатів вибірки.

В кожному розділі, поряд з викладенням теоретичного матеріалу, розглядається велика кількість прикладів, які ілюструють практичне застосування методів теорії ймовірностей для розв’язання різних задач. Наведено перелік запитань для самоперевірки пройденого матеріалу та пропонується добірка вправ для самостійного розв’язування. Крім того, посібник містить додаток з таблицями, значення яких часто використовуються при розв’язанні задач.

РОЗДІЛ І. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ

Тема 1. **Основні поняття теорії ймовірностей**

Випадкові події

Означення 2.1. *Теорія ймовірностей*, як один із розділів математики, досліджує певний вид математичних моделей — моделі випадкових подій.

Предметом теорії ймовірностей є вивчення імовірнісних закономірностей масових однорідних випадкових подій.

Означення 2.2. *Стохастичним експериментом* (*випробуванням*) називається експеримент, результат якого неможливо точно передбачити наперед.

Для математичного опису випадкових подій — наслідків експерименту — застосовують такі точні поняття: *прості (елементарні)* та *складені випадкові події*, *простір елементарних подій*.

Означення 2.3. *Подія* або *випадкова подія* — це результат стохастичного експерименту, все те, що може відбуватися (реалізуватися) або не відбуватися при даному дослідженні. Прикладами випадкових подій є:

- виграш у лотерею;
- кількість сонячних днів під час відпустки;
- випадання парного числа очок при підкиданні грального кубика.

Означення 2.4. *Простою або елементарною випадковою подією* називається подія, що може відбутися внаслідок проведення однієї і лише однієї спроби (експерименту), тобто не може бути розкладена на більш прості.

Елементарні події позначаються ω_i, $i = 1,2,...$ і в теорії ймовірностей, так само як, скажімо, точка в геометрії, не поділяються на простіші складові.

Означення 2.5. Вся сукупність можливих результатів експерименту називається *простором елементарних подій* і позначається $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, де $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ — елементарні події.

Приклад 1.1. Монету підкидають тричі. Визначити елементарні події цього експерименту.

◄ Триразове підкидання монети — це одна спроба. Елементарними випадковими подіями будуть:

ω_1 = ггг (тричі випаде герб);

ω_2 = ццц (тричі випаде цифра);

герб випаде два рази	герб випаде один раз
ω_3 = ггц	ω_6 = гцц
ω_4 = гцг	ω_7 = цгц
ω_5 = цгг	ω_8 = ццг

Отже, цьому експерименту відповідають вісім елементарних подій. ►

Простір елементарних подій може бути як дискретним, так і неперервним.

Означення 2.6. Якщо множина Ω є зліченною, то простір елементарних подій називають *дискретним*. Він може бути обмеженим і необмеженим.

Означення 2.7. Простір елементарних подій називають *неперервним*, якщо кожній елементарній події не можна поставити у взаємно однозначну відповідність певне натуральне число.

Приклади неперервних (недискретних) просторів елементарних подій дістанемо, розглянувши:

1) розміри однотипних деталей (діаметр, довжина), що їх виготовляє робітник або верстат-автомат;

2) покази приладів, що вимірюють масу, силу струму, напругу, опір і т. ін.

Означення 2.8. *Повною групою подій* називається така сукупність подій, сума яких утворює весь простір елементарних подій даного експерименту.

Означення 2.9. *Випадкова* подія називається *складеною*, якщо її можна розкласти на прості (елементарні) події.

Складені випадкові події позначаються латинськими великими літерами: $A, B, C, D, \ldots$ або буквами з цифровими індексами: $A_1,\ A_2,\ldots,A_n$.

Приклад 1.2. Задано множину чисел Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}. Навмання із цієї множини беруть одне число. Побудувати такі випадкові події: а) з'явиться число, кратне 2; б) число кратне 3; в) число, кратне 5.

◄ Ці випадкові події будуть складеними. Позначимо їх відповідно A, B, C. Тоді A = {2, 4, 6, 8, 10, 12}; B = {3, 6, 9, 12}; C = {5, 10,}. ►

Теоретико-множинний розгляд випадкових подій

Нехай простір елементарних подій (вибірковий простір) Ω даного випробування є множиною n елементарних подій $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n$, тобто $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n\}$.

Довільну випадкову подію A цього ж випробування можна розглядати як підмножину вибіркового простору Ω, тобто $A=\{\omega_{A1},\omega_{A2},\ldots,\omega_{Am}\}$. Події ω_{Aj}, $j=\overline{1,m}$ називаються *сприятливими* для події A, а множина $\{\omega_{A1},\omega_{A2},\ldots,\omega_{Am}\}$ є *множиною можливих наслідків*, які сприяють події A.

Означення 2.10. Випадкові події є *рівноможливими*, якщо реалізація однієї не має жодних переваг перед реалізацією іншої.

Тобто рівноможливі події мають однакові можливості відбутися внаслідок проведення одного експерименту

Над подіями можна проводити різноманітні математичні операції. Наведемо основні з них, використовуючи геометричні аналогії. Елементарні події зображатимемо точками на площині, весь простір елементарних подій Ω, зобразимо у вигляді прямокутника; випадкові події — у вигляді деяких довільних фігур, які повинні знаходитися повністю всередині прямокутника Ω.

Означення 2.11. Якщо подія A не містить жодної з елементарних подій простору Ω цього стохастичного експерименту, то вона називається *неможливою* і позначається $\varnothing$.

Означення 2.12. Якщо в результаті експерименту, здійснюваного з додержанням визначеного комплексу умов, певна подія обов'язково настає, то вона називається <u>*достовірною*</u>. Достовірна подія позначається символом Ω .

Означення 2.13. Подія C називається <u>*сумою*</u> <u>*подій*</u> A *і* B, якщо зміст події C полягає в настанні або події A, або події B. Позначають $C = A + B$ ($C = A \cup B$) (Рис 1.1).

Означення 2.14. Подія C, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається і подія A і подія B, називається <u>*добутком*</u> <u>*подій*</u> A *і* B. У цьому випадку використовують позначення $C = AB$ або $C = A \cap B$. (Рис 1.2).

Означення 2.15. Якщо $A \cap B \neq \varnothing$, то випадкові події A і B називають <u>*сумісними*</u>. Якщо $A \cap B = \varnothing$, то події A і B називають <u>*несумісними*</u> (одночасне їх настання неможливе).

Означення 2.16. Подія C, зміст якої полягає в тому, що подія A відбувалася, а подія B — ні, називається <u>*різницею*</u> подій A та B і позначається $C = A \setminus B$ (Рис 1.3).

Означення 2.17. Подія, зміст якої полягає в тому, що A не відбулася, називається <u>*подією*</u> <u>*протилежною*</u> до A і позначається $\overline{A}$.

Подія $\overline{A}$ складається з тих подій , що не увійшли в A. Протилежні події у просторі елементарних подій ілюструє рис. 1.4. Він унаочнює також співвідношення: $A \cup \overline{A} = \Omega$ та $A \cap \overline{A} = \varnothing$. Наслідком випробування може бути або реалізація випадкової події A, або реалізація протилежної події $\overline{A}$. Протилежною до неможливої є *достовірна подія* $\overline{\varnothing} = \Omega$ і навпаки: $\overline{\Omega} = \varnothing$.

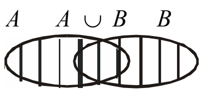

Рис 1.1

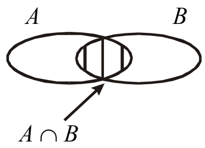

Рис 1.2

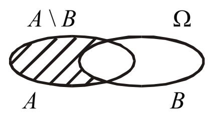

Рис 1.3

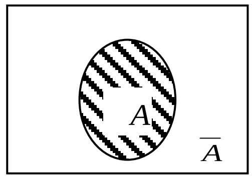

Рис 1.4

Приклад 1.3. Задано множину цілих чисел $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$. Навмання з неї беруть одне число. Побудувати випадкові події: 1) A — узяте число кратне 2; 2) B — кратне 3. Визначити $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$.

◄ 1) $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$; 2) $B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$.

Звідси дістаємо: $A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\} \cup \{3, 6, 9, 12, 15\} = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15\}$;

$A \cap B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\} \cap \{3, 6, 9, 12, 15\} = \{6, 12\}$;

$A \setminus B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\} \setminus \{3, 6, 9, 12, 15\} = \{2, 4, 8, 10, 14\}$. ►

Означення 2.18. Якщо подія A обов'язково відбувається, коли відбувається подія B, то будемо називати <u>*подію*</u> A <u>*наслідком*</u> <u>*події*</u> B. Для цього факту використовують позначення $A \subset B$ або $B \supset A$. Якщо подія A є наслідком події B, а подія B є наслідком A, то ці події збігаються.

Справедливі рівності:

$A \cup \Omega = \Omega$. $\qquad$ $A \cap \Omega = A$. $\qquad$ $A \cup \varnothing = A$

$A \cap \varnothing = \varnothing.$ $\qquad\qquad\qquad$ $\overline{A} = \Omega \setminus A.$

Класичне означення ймовірності

Порівнювати випадкові події можна за певною мірою можливості їх реалізації в даному випробуванні.

Означення 2.19. Тобто, *ймовірність випадкової події* — це числове вираження можливості появи цієї події. Теорія ймовірностей дає математичний апарат для розрахунків ймовірностей випадкових подій.

Означення 2.20. *Імовірністю випадкової події* A називається невід'ємне число $P(A)$, що дорівнює відношенню числа елементарних подій $m\,(0 \le m \le n)$, які сприяють появі A, до кількості всіх елементарних подій n простору Ω:

$$P(A) = \frac{m}{n} \tag{1.1}$$

Для достовірної події $P(\Omega)=1$, бо $m=n$; для неможливої — $P(\varnothing)=0$, бо $m=0$, а для довільної випадкової події $0 < P(A) < 1$. Позначення P утворено від першої букви англійського слова Probability (ймовірність).

Слабка сторона класичного визначення ймовірності. Класичне визначення ймовірності передбачає, що число елементарних наслідків випробування скінчене, але на практиці число можливих наслідків може бути нескінчене, крім того нерідко результат випробування неможливо представити у вигляді сукупності елементарних наслідків. Класичне визначення ймовірності безпосередньо не пов'язане з емпіричними дослідженнями.

Приклад 1.4. У ящику міститься 15 однотипних деталей, із яких 6 бракованих, а решта — стандартні. Навмання з ящика береться одна деталь. Яка ймовірність того, що вона буде стандартною?

◄ Число всіх рівноможливих елементарних подій для цього експерименту: $n=15$. Нехай A — подія, що полягає в появі стандартної деталі. Число елементарних подій, що сприяють появі випадкової події A, дорівнює дев'яти $m=9$). Згідно з (1.1) маємо: $P(A)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{9}{15}=\dfrac{3}{5}$. ►

Елементи комбінаторики в теорії ймовірностей

При розв'язуванні задач з теорії ймовірностей побудувати простір елементарних подій (множину Ω) можна не завжди. Щоб обчислити ймовірність тієї чи іншої випадкової події для певного класу задач із дискретним і обмеженим простором елементарних подій, необхідно вміти обчислити кількість n усіх елементарних подій (елементів множини Ω) і число m елементарних подій, які сприяють появі випадкової події.

Існує клас задач, в яких для обчислення n і m використовуються елементи комбінаторики: перестановки, розміщення та комбінації. У комбінаториці оперують множинами однотипних елементів.

Існують такі <u>*комбінаторні*</u> <u>*принципи*</u>:

1. Якщо елемент A можна вибрати m способами, а елемент B — n несумісними способами, то вибрати або A, або B можна $m+n$ способами

2. Якщо елемент A можна вибрати m способами, а елемент B при довільному виборі A — n способами, то вибір пари елементів і A і B може бути здійснений $m \cdot n$ способами.

Загалом множини бувають упорядковані та невпорядковані.

Означення 2.21. Множину називають *упорядкованою*, якщо при її побудові істотним є порядок розміщення елементів. У противному разі множину називають *невпорядкованою*.

Означення 2.22. *Сполуками* називаються різні підмножини, утворені з елементів універсальної множини (простору елементарних подій Ω), що відрізняються елементами або порядком цих елементів.

Означення 2.23. *Перестановками* із n елементів називають такі впорядковані множини з n елементів, які відрізняються між собою порядком їх розташування.

Число перестановок із n елементів позначають через P_n і знаходять за формулою

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n! \qquad (1.2)$$

Приклад 1.5. На кожній із шести однакових карток записано одну з літер Я, І, Р, Е, О, Т. Яка ймовірність того, що картки, навмання розкладені в рядок, утворять слово ТЕОРІЯ.

◄ Кількість усіх елементарних подій (елементів множини Ω)

$$n = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720.$$

Кількість елементарних подій, що сприяють появі слова ТЕОРІЯ — m = 1. Позначивши розглядувану подію через B, дістанемо:

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \frac{m}{n} = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}. ►$$

Означення 2.24. <u>*Розміщеннями*</u> із n різних елементів по k $(0 < k < n)$ називають такі впорядковані множини, кожна з яких містить k елементів і які відрізняються між: собою порядком розташуванням цих елементів або хоча би одним елементом.

Кількість таких множин позначають через A_n^k і обчислюють формулою

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad (1.3)$$

Приклад 1.6. У кімнаті перебувають 10 студентів. Яка ймовірність того, що дні народження студентів не збігаються?

◄ Вважаємо, що рік має 365 днів. Для кожного студента в загальному випадку існує 365, а для 10 студентів — 365^{10} можливих днів народження. Отже, маємо n = 365^{10} елементарних подій множини Ω. Позначимо через B випадкову подію, яка полягає в тому, що дні народження студентів не збігаються. Кількість елементарних подій, що сприяють появі B, $m = A_{365}^{10}$.

Остаточно маємо: $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{A_{365}^{10}}{(365)^{10}}$. ►

Означення 2.25. <u>*Комбінаціями*</u> з n різних елементів по k $(0 < k < n)$ називають такі множини із k елементів, взятих з даних n елементів, що відрізняються між собою хоча б одним елементом без врахування їх порядку.

Кількість таких множин позначають через C_n^k і знаходять за формулою

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{1.4}$$

Приклад 1.7. У шухляді міститься 10 одинотипних деталей, 6 із яких є стандартними, а решта бракованими. Навмання із шухляди беруть чотири деталі. Обчислити ймовірність таких випадкових подій:

A — усі чотири деталі виявляються стандартними;
B — усі чотири деталі виявляються бракованими;
D — із чотирьох деталей виявляються дві стандартними і дві бракованими.
Е — всі чотири деталі виявляться стандартними або бракованими?

◄ Кількість усіх елементарних подій множини Ω: $n = C_{10}^4 = \frac{10!}{4!\,6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 3 \cdot 6} = 210$.

Кількість елементарних подій, що сприяють подіям A, B, D, відповідно дорівнюють:

$$A\!: \ m_1 = C_6^4 = \frac{6!}{2!\,4!} = 15; \qquad B\!: \ m_2 = C_4^4 = \frac{4!}{4!\,0!} = 1; \qquad D\!: \ m_3 = C_6^2\, C_4^2 = 15 \cdot 6 = 90.$$

Обчислимо ймовірності цих подій: $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{m_1}{n} = \frac{C_6^4}{C_{10}^4} = \frac{15}{630} = \frac{3}{112} = \frac{15}{210} = \frac{1}{14}$;

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \frac{m_2}{n} = \frac{C_4^4}{C_{10}^4} = \frac{1}{210} \quad P(D) = \frac{m_3}{n} = \frac{C_6^2 \cdot C_4^2}{C_{10}^4} = \frac{90}{210} = \frac{3}{7};$$

$$P(E) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = \frac{C_6^4}{C_{10}^4} + \frac{C_4^4}{C_{10}^4} = \frac{15}{210} + \frac{1}{210} = \frac{16}{210}. ►$$

Статистична ймовірність

У випадку неприйнятності класичної моделі використовують аксіоматичну (без доведення) модель, у якій ймовірностям елементарних подій приписуються значення відносних частот цих подій, узятих з наперед проведеного експерименту.

Означення 2.26. <u>*Відносною*</u> <u>*частотою*</u> $W(A)$ <u>*випадкової*</u> <u>*події*</u> A називається відношення кількості експериментів m, при яких подія A

спостерігалася, до загальної кількості n проведених експериментів:

$$W(A)=\frac{m}{n}. \qquad (1.5)$$

Для відносної частоти виконується нерівність $0 \le W(A) \le 1$.

Теорія ймовірностей вивчає лише такі випадкові події, в яких спостерігається стабільність відносних частот, а саме: у разі проведення k серій експериментів існує така константа $P(A)$, навколо якої групуватимуться відносні частоти досліджуваної випадкової події A, тобто $W_i(A)$. І це групування буде тим ближчим до цієї константи, чим більшим буде число n експериментів.

На рис. 1.5 показано, як $W_i(A)$ змінюється зі збільшенням n експериментів.

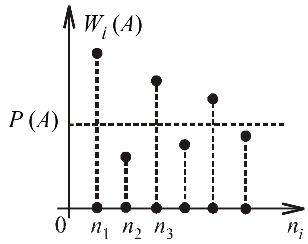

Рис. 1.5

Імовірність випадкової події визначається так: упевнившись, що існує стабільність відносних частот випадкової події $W_i(A)$, задаємось малим додатним числом ε і проводимо серії експериментів, збільшуючи їх число n.

Означення 2.27. Одне з чисел W_i або W_{i-1} береться за ймовірність випадкової події і називається <u>*статистичною*</u> <u>*ймовірністю*</u>, якщо на якомусь кроці серії експериментів виконуватиметься нерівність $|W_i - W_{i-1}| < \varepsilon$.

Тема 2. Основні теореми теорії ймовірностей

Теореми додавання ймовірностей несумісних та множення ймовірностей незалежних подій. Імовірнісний простір

Теорема 2.1. *Ймовірність появи однієї з двох несумісних подій рівна сумі ймовірностей цих подій*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \qquad (2.1)$$

Доведення. Розглянемо скінчений вибірковий простір, який складається з n елементарних рівноможливих подій. Елементарні випадкові події задовольняють такі твердження: 1) між собою несумісні $\omega_i \cap \omega_j = \varnothing$, $i \ne j$; 2) утворюють повну групу $\bigcup_{i=1} \omega_i = \Omega$, тобто $\Omega = \omega_1 \cup \omega_2 \cup \ldots \cup \omega_n = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$; 3) є <u>*рівноможливими*</u>. Тому, на основі визначення рівноможливості елементарних подій, $P(\omega_i) = \frac{1}{n}$, $i = \overline{1,n}$. Очевидно, що

$$P(\Omega)=P(\omega_1\cup\omega_2\cup\ldots\cup\omega_n)=P(\omega_1)+P(\omega_2)+\cdots P(\omega_n)=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\cdots\frac{1}{n}=1.$$

Довільна випадкова подія A даного випробування складається з m елементарних рівноможливих подій $A=\omega_{1A}\cup\omega_{2A}\cup\ldots\cup\omega_{mA}=\{\omega_{1A},\omega_{2A},\ldots,\omega_{mA}\}$. Ймовірність випадкової події A можна представити таким чином:

$$P(A)=P(\omega_{1A}\cup\omega_{2A}\cup\ldots\cup\omega_{mA})=P(\omega_{1A})+P(\omega_{2A})+\ldots+P(\omega_{mA})=\frac{m}{n}.$$

Випадкова подія B складається з k елементарних рівноможливих подій $B=\omega_{1B}\cup\omega_{2B}\cup\ldots\cup\omega_{kB}=\{\omega_{1B},\omega_{2B},\ldots,\omega_{kB}\}$. Ймовірність випадкової події B визначають аналогічно: $P(B)=P(\omega_{1B}\cup\omega_{2B}\cup\ldots\cup\omega_{kB})=\frac{k}{n}$.

Нехай випадкова подія B несумісна з випадковою подією A, тобто $B\cap A=\varnothing$. Об'єднання несумісних випадкових подій A та B складається з $m+k$ елементів $A\cup B=\{\omega_{1A},\omega_{2A},\ldots,\omega_{mA},\omega_{1B},\omega_{2B},\ldots,\omega_{kB}\}$.

Імовірність об'єднання несумісних подій визначається сумою їх ймовірностей $P(A\cup B)=\frac{m+k}{n}=\frac{m}{n}+\frac{k}{n}=P(A)+P(B)$. *Теорема доведена.*

Узагальнення для трьох несумісних подій записують таким чином:

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C) \qquad (2.2)$$

Теорема 2.2. *Якщо випадкові події $A_1,A_2,\ldots,A_n$ попарно несумісні, то ймовірність появи хоча б однієї з них дорівнює сумі їх ймовірностей*

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+\ldots+P(A_n). \qquad (2.3)$$

Наслідок. Дві протилежні події A та $\overline{A}$ утворюють повну групу ($A+\overline{A}=\Omega$), тому має місце рівність $P\left(A+\overline{A}\right)=P(\Omega)=1$, з якої одержуємо формулу

$$P\left(\overline{A}\right)=1-P(A). \qquad (2.4)$$

Означення 2.4. *<u>Імовірнісний</u> <u>простір</u>* — це вибірковий простір, разом з функцією ймовірності P, яка визначена на Ω і задовольняє аксіоми:

1. $P(\varnothing)=0$, $P(\Omega)=1$ — умова нормування ймовірностей;
2. $0\le P(A)\le 1$, для довільного $A\subset\Omega$;
3. якщо $A_1\subset\Omega$, $A_2\subset\Omega$ і $A_1\cap A_2=\varnothing$, то $P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)$.

Означення 2.5. *<u>Незалежними</u> <u>подіями</u>* називаються такі події, коли ймовірність настання довільної з них не залежить від того, відбулася інша подія чи ні.

Теорема 2.3. *Ймовірність сумісного настання двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій:*

$$P(A\cdot B)=P(A)P(B). \qquad (2.5)$$

Доведення. Проведемо доведення цієї теореми використовуючи класичну імовірнісну модель.

Нехай кількість можливих результатів, в яких подія A настане чи не настане — n_1, m_1 — та кількість з них, що сприяють її появі. Для події B: n_2 —

загальна кількість можливих результатів експерименту, m_2 — та кількість з них, при яких подія B настане. Загальна кількість можливих результатів сумісного експерименту $n = n_1 \cdot n_2$, а та кількість з них, в яких і A, і B відбудуться сумісно $m = m_1 \cdot m_2$. Згідно з класичною схемою ймовірностей

$$P(A \cdot B) = \frac{m}{n} = \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2} = \frac{m_1}{n_1} \times \frac{m_2}{n_2} = P(A)P(B).$$ *Теорема доведена.*

Означення 2.4. Декілька подій називають <u>*незалежними в сукупності*</u> (або просто *незалежними*), якщо незалежні кожні дві з них і незалежні кожна подія і всі можливі добутки інших.

Наслідок. Ймовірність сумісної появи декількох подій, незалежних в сукупності, дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)\ldots P(A_n). \tag{2.6}$$

Теорема 2.4. *Ймовірність появи хоча б однієї з подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$, незалежних в сукупності, обчислюється за формулою*

$$P(A) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\ldots P(\overline{A_n}). \tag{2.7}$$

Доведення. Позначимо через A подію, що полягає в появі хоча б однієї з подій A_i, $i = \overline{1, n}$. Тоді події A і $\overline{A_1}\,\overline{A_2}\ldots\overline{A_n}$ (жодна з подій не наступила) — протилежні і утворюють повну групу подій. Тому $P(A) + P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\ldots\overline{A_n}\right) = 1$. Звідси $P(A) = 1 - P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\ldots\overline{A_n}\right) = 1 - P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}\right)\ldots P\left(\overline{A_n}\right)$. *Теорема доведена.*

Приклад 2.1. Партія містить 12 стандартних і чотири нестандартні деталі. Навмання беруть три деталі. Знайти ймовірність того, що серед узятих деталей: 1) не менш як дві стандартні; 2) усі три нестандартні; 3) принаймні одна стандартна.

◀ 1) Нехай подія A — «серед трьох узятих деталей не менш як дві стандартні». Тоді її можна подати як суму двох подій: A_1 — «серед трьох узятих деталей дві стандартні і одна нестандартна» і A_2 — «усі три узяті деталі стандартні». Події A_1 і A_2 несумісні, тому маємо:

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2).$$

Імовірності подій A_1 і A_2 знайдемо згідно з класичним означенням імовірності: $n = C_{16}^3 = 560$; $m_1 = C_{12}^2 \cdot C_4^1 = 66 \cdot 4 = 264$; $m_2 = C_{12}^3 = 220$. Отже, $P(A) = \frac{484}{560} \approx 0{,}864$.

2) Подія B — «усі три взяті деталі нестандартні». Цю подію можна подати як добуток трьох подій $B_i\ (i = 1,2,3)$, де *i*-та деталь нестандартна, $B = \bigcap_{i=1}^{3} B_i$.

Умовою задачі не задано, що деталі беруться з поверненням. Отже, взяти три деталі разом — це те саме, що брати їх по одній без повернення, а тому події залежні. Згідно з цим імовірність події B обчислюємо так:

$$P(B) = P\left(\bigcap_{i=1}^{3} B_i\right) = P(B_1) \cdot P(B_2/B_1) \cdot P(B_3/B_1 \cap B_2) = \frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{14} \approx 0{,}007.$$

3) Подія C — «із трьох деталей принаймні одна стандартна». Протилежна подія $\overline{C}$ — «усі три деталі нестандартні». Імовірність цієї події щойно знайдено: $P(\overline{C}) = P(B)$. Остаточно маємо: $P(C) = 1 - P(\overline{C}) \approx 1 - 0{,}007 = 0{,}993.$

Умовна ймовірність. Теореми множення ймовірностей залежних та додавання ймовірностей сумісних подій..

Нехай A і B — дві випадкові події даного випробування.

Означення 2.4. *Умовною* *ймовірністю* події A за умови B називається ймовірність події A, вирахувана в припущенні, що подія B відбулася.

Означення 2.5. Дві події називаються *сумісними*, якщо поява однієї з них не виключає появи іншої в одному і тому ж випробуванні.

Умовну ймовірність позначають як $P(A/B)$ або $P_B(A)$. Згідно з класичним означенням ймовірності умовна ймовірність дорівнює відношенню числа рівноможливих елементарних подій, при яких має місце подія $A \cap B$, до числа рівноможливих елементарних подій, при яких має місце подія B:

$$P_B(A) = \frac{m_{A \cap B}}{m_B}.$$

Якщо вибірковий простір містить n рівноможливих елементарних подій, тоді:

$$P(A \cap B) = \frac{m_{A \cap B}}{n}; \quad P(B) = \frac{m_B}{n}; \qquad \frac{m_{A \cap B}}{m_B} = \frac{m_{A \cap B}}{n} / \frac{m_B}{n} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Цей результат узагальнюється для визначення умовної ймовірності на довільному імовірнісному просторі.

Умовна *ймовірність* *реалізації* *однієї* *події* *залежно* *від* *реалізації*, *другої* *події* визначається відношенням ймовірності перерізу цих подій до ймовірності другої події:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{2.8}$$

Теорема 2.5. *Ймовірність реалізації двох подій при даному випробовуванні визначається добутком ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншої за умови, що перша має місце.*

□ Згідно формули (2.8) умовні ймовірності для двох подій запишемо таким чином:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Звідси ймовірність перерізу двох подій визначається за формулами:

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A) \; ■ \tag{2.9}$$

Наслідок 1. Ймовірність реалізації трьох подій при даному випробуванні визначають за формулою

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P_A(B)P_{A \cap B}(C) \; ■ \tag{2.10}$$

Ймовірність сумісної появи декількох подій визначається формулою

$$P(A_1A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3) \ldots P_{A_1A_2 \ldots A_{n-1}}(A_n) \tag{2.11}$$

Теорема 2.6. *Ймовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх сумісної появи:*

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\,. \qquad (2.12)$$

Доведення. Нехай n — загальна кількість можливих результатів експерименту.

m_1 — кількість результатів експерименту, що сприяють події A,

m_2 — кількість результатів експерименту, що сприяють події B,

m_3 — кількість спільних результатів.

Тоді події $A+B$ сприятимуть $m=m_1+m_2-m_3$ можливих результатів. Отже

$P(A\cup B)=\dfrac{m_1+m_2-m_3}{n}=\dfrac{m_1}{n}+\dfrac{m_2}{n}-\dfrac{m_3}{n}=P(A)+P(B)-P(A\cap B),$ або остаточно

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B).$ *Теорема доведена.*

Приклад 2.2. Задана множина цілих чисел. $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Навмання беруть одне число. Яка ймовірність того, що це число виявиться кратним 3, коли відомо, що воно є непарним?

◄ Нехай подія A — поява числа кратного 3, B — кратного 2.

Тоді $A = (3, 6, 9, 12)$, $m_1 = 4$; $B = (2, 4, 6, 8, 10, 12)$, $m_2 = 6$;

$A\cap B = (6, 12)$, $m_3 = 2$;

$$\mathrm{P}(\mathrm{A})=\frac{m_1}{n}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3};\ \mathrm{P}(\mathrm{B})=\frac{6}{12}=\frac{1}{2};\ \mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{m_3}{n}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6};$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}/\mathrm{B})=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}.$$

Приклад 2.3. Маємо 3 партії деталей. Перша партія складається з 10 стандартних і 3 нестандартних деталей, друга — із 15 стандартних і 4 нестандартних, третя — із 20 стандартних і 5 нестандартних деталей. Із кожної партії беруть по одній деталі. Знайти ймовірність того, що серед узятих деталей: 1) тільки одна стандартна; 2) тільки дві стандартні.

◄ Нехай згідно з умовою з кожної партії взято по одній деталі. При цьому можуть відбутися події A_1, A_2, A_3, які полягають відповідно в тому, що деталь, яку взяли з першої, другої і третьої партії виявилась стандартною.

1) Подія A — «тільки одна із трьох деталей виявилась стандартною». Цю подію можна подати так: $A=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup$ $\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3.$ Групи подій, сумою яких є подія A, несумісні між собою, а події в кожній групі незалежні. Тому ймовірність події A обчислимо так:

$$P(A)=\frac{10}{13}\cdot\frac{4}{19}\cdot\frac{1}{5}+\frac{3}{13}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{1}{5}+\frac{3}{13}\cdot\frac{4}{19}\cdot\frac{4}{5}=\frac{133}{1235}\approx 0{,}108.$$

2) Подія B — «тільки дві деталі із трьох виявились стандартними». Подамо цю подію через події A_1, A_2, A_3 та протилежні до них:

$$B=A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3.$$

Подію B подано як суму несумісних груп подій. У кожній групі події незалежні. Знайдемо ймовірність події B:

$$P(B)=\frac{10}{13}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{1}{5}+\frac{10}{13}\cdot\frac{4}{19}\cdot\frac{4}{5}+\frac{3}{13}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{4}{5}=\frac{490}{1235}\approx 0{,}397.$$

Приклад 2.4. Перевезення вантажів для підприємства забезпечують два автогосподарства, які з цієї метою щодня в першу зміну мають виділяти по одному автомобілю. Імовірність виходу автомобіля на лінію в першому автогосподарстві дорівнює 0,7, а в другому — 0,6. Знайти ймовірність того, що в першу зміну на підприємстві перевозитимуться вантажі.

◄ Розглянемо події: A — «на підприємстві в першу зміну перевозитимуться вантажі»; A_1 — «для перевезення вантажів прибув автомобіль із першого автогосподарства»; A_2 — «для перевезення вантажів прибув автомобіль із другого автогосподарства». Тоді $A=A_1\cup A_2$. Події A_1 і A_2 сумісні, тому $P(A)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cap A_2)$. Очевидно, що події A_1 і A_2 незалежні і $P(A_1\cap A_2)=P(A_1)P(A_2)$. Остаточно отримаємо: $P(A)=0{,}7+0{,}6-0{,}7\cdot 0{,}6=0{,}88.$

Приклад 2.5. Прилад складається із трьох вузлів, які працюють незалежно один від одного, причому другий і третій вузли взаємозамінювані. Імовірності виходу з ладу вузлів на заданому часовому проміжку становлять відповідно 0,2; 0,3 і 0,4. Знайти ймовірність того, що протягом заданого часу прилад працюватиме.

◄ Розглянемо події: A — «прилад працює протягом заданого часу»; B_1 — «перший вузол працює»; B_2 — «другий вузол працює»; B_3 — «третій вузол працює». Подія A настає, якщо працюють перший та другий вузли, або перший та третій вузли, або всі три вузли разом. Звідси: $A=B_1\cap(B_2\cup B_3)$. За умовою задачі маємо, що події B_1 і $(B_2\cup B_3)$ незалежні, а події B_2 і B_3 — сумісні. Тому

$$P(A)=P(B_1\cap(B_2\cup B_3))=P(B_1)\cdot P(B_2\cup B_3)=P(B_1)\cdot(P(B_2)+P(B_3)-P(B_2\cap B_3))=$$

$$=P(B_1)\cdot(P(B_2)+P(B_3)-P(B_2)\cdot P(B_3))=0{,}8\cdot(0{,}7+0{,}7-0{,}7\cdot 0{,}7)=0{,}728.$$

Під час обчислення враховано, що умовою задачі задані ймовірності протилежних подій.

Використання формул теорії ймовірностей для оцінювання надійності роботи простих систем

Оцінити надійність роботи системи, елементи якої з'єднані за схемою, наведеною на рисунку 2.1, якщо відомі ймовірності безвідмовної роботи кожного елемента p_i, $i=1,\ldots,n$.

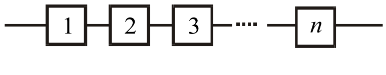

Рис. 2.1

Позначивши надійність системи через R, отримаємо

$$\mathrm{R} = \prod_{i=1}^{n} p_i \,. \qquad (2.13)$$

Оцінити надійність роботи системи, елементи якої з'єднані за схемою, наведеною на рисунку 2.2, якщо відомі ймовірності безвідмовної роботи кожного елемента p_i, $i=1,\ldots,n$.

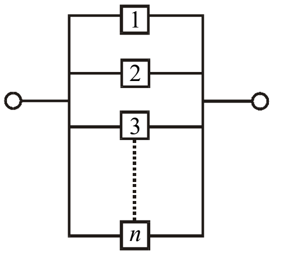

Рис. 2.2

Позначивши надійність системи через *R*, отримаємо

$$\mathrm{R} = 1 - \prod_{i=1}^{n} q_i, \qquad q_i = 1 - p_i \qquad (2.14)$$

Приклад 2.6. Електричні лампочки з'єднані за схемами, наведеними на рис. 2.3 і 2.4.

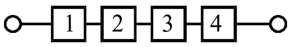

Рис. 2.3

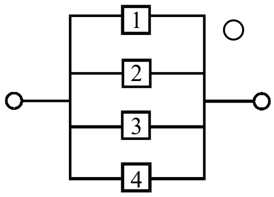

Рис. 2.4

Імовірність того, що електролампочка не перегорить при ввімкненні в електромережу наведених схем, є величиною сталою і дорівнює p_i = 0,8. Яка ймовірність того, що при ввімкненні в електромережу наведених схем у них буде електрострум?

◄ За відомим значенням p_i знаходимо $q_i = 1 - p_i = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$ (i = 1, 2, 3, 4).

а) $\mathrm{R} = \prod_{i=1}^{4} p_i = (0{,}8)^4 = 0{,}4096$;

б) $R = 1 - \prod_{i=1}^{4} q_i = 1 - (0{,}2)^4 = 1 - 0{,}0016 = 0{,}9984$.

Формула повної ймовірності, формула Байєса

Виведемо формулу для повної ймовірності, виходячи із загальних міркувань.

Нехай певна подія А може відбутися при умові появи довільної з несумісних подій H_i;, $i = \overline{1,n}$, що утворюють повну групу подій:

$$\sum_{i=1}^{n} H_i = \Omega; \; H_i \cap H_j = \varnothing \text{ при } i \neq j.$$

Вважаємо, що ймовірності настання всіх H_i відомі. Таку групу подій називають <u>*гіпотезами*</u>, оскільки невідомо наперед, при якій з них подія A станеться. Нехай також відомі умовні ймовірності $P_{H_i}(A)$ настання події A при всіх гіпотезах. Знайдемо ймовірність настання події A, враховуючи всі можливі способи її реалізації. Зробимо певні перетворення:

$A = A \cap \Omega = A \cap \sum_{i=1}^{n} H_i = \sum_{i=1}^{n} A \cap H_i$. Звідси ймовірність події $A: P(A) = P\left(\sum_{i=1}^{n} A \cap H_i\right)$.

Оскільки всі H_i — несумісні, то і $A \cap H_i$ також несумісні, і для знаходження ймовірності суми цих подій можна скористатися теоремою додавання ймовірностей

$$P(A) = P\left(\sum_{i=1}^{n} A \cap H_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^{n} P_{H_i}(A) P(H_i).$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P_{H_i}(A) \cdot P(H_i) \qquad (2.15)$$

Формула (2.15) називається формулою повної ймовірності.

Знайдемо формулу для перерахунку ймовірностей гіпотез за умови, що певна подія відбулася, використовуючи формулу ймовірності добутку сумісних подій:

$$P(A \cap H_i) = P(A) P_A(H_i) = P(H_i) P_{H_i}(A).$$

Звідси, для ймовірності гіпотез, за умови, що певна подія A відбулася, отримаємо формулу Байєса:

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i) P_{H_i}(A)}{P(A)} = \frac{P(H_i) P_{H_i}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P_{H_i}(A) P(H_i)}. \qquad (2.16)$$

Приклад 2.7. До складального цеху надходять деталі від трьох інших цехів. Від першого надходить 45% усіх деталей, від другого — 35% і від третього — 20%. Перший цех допускає в середньому 6% браку, другий — 2% і третій — 8%. Яка ймовірність того, що до складального цеху надійде стандартна деталь?

◄ Позначимо через A появу стандартної деталі, H_1 — деталь надійде від першого цеху, H_2 — від другого, H_3 — від третього. За умовою задачі:

$$P(H_1) = 0{,}45, \quad P_{H_1}(A) = 0{,}94;$$

$$P(H_2) = 0{,}35, \quad P_{H_2}(A) = 0{,}98;$$

$$P(H_3) = 0{,}2, \quad P_{H_3}(A) = 0{,}92.$$

Згідно формули (2.147) маємо:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P_{H_i}(A) P(H_i) = 0{,}45 \cdot 0{,}94 + 0{,}35 \cdot 0{,}98 + 0{,}2 \cdot 0{,}92 = 0{,}95.$$

Приклад 2.8. На склад надходять однотипні вироби з чотирьох заводів: 15% — із заводу № 1, 25% — із заводу № 2; 40% — із заводу № 3 і 20% — із заводу № 4. Під час контролю продукції, яка надходить на склад, втановлено, що в середньому брак становить для заводу № 1 — 3%, заводу № 2 — 5%, заводу № 3 — 8% і заводу № 4 — 1%. Навмання взятий виріб зі складу виявився бракованим. Яка ймовірність того, що його виготовив завод №1?

Розв'язання. Позначимо H_1 гіпотезу проте, що виріб був виготовлений заводом № 1, H_2 — заводом № 2, H_3 — заводом № 3 і H_4 — заводом № 4. Ці гіпотези єдино можливі і несумісні. Нехай A — випадкова подія, що полягає в появі бракованого виробу.

За умовою задачі маємо: $P(H_1) = 0{,}15$, $P(H_2) = 0{,}25$, $P(H_3) = 0{,}4$, $P(H_4) = 0{,}2$;
$P_{H_1}(A) = 0{,}03$, $P_{H_2}(A) = 0{,}05$, $P_{H_3}(A) = 0{,}08$, $P_{H_4}(A) = 0{,}01$.

За формулою Байєса (2.15) переоцінюємо першу гіпотезу H_1:

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1)P_{H1}(A)}{\sum_{i=1}^{4} P_{H_i}(A)P(H_i)} = \frac{0{,}15 \cdot 0{,}03}{0{,}15 \cdot 0{,}03 + 0{,}25 \cdot 0{,}05 + 0{,}4 \cdot 0{,}08 + 0{,}2 \cdot 0{,}01} = \frac{0{,}0045}{0{,}051} = \frac{45}{510} = \frac{3}{34}.$$

Тема 3. **Послідовності випробувань**

Формула Бернуллі. Найімовірніше число появ події

Означення 3.1. Послідовність незалежних однотипних випробувань, в результаті кожного з яких наступає або успіх, або невдача, ймовірності яких відомі (p – ймовірність успіху, $q = 1 - p$ – невдачі) мають назву — *випробування за схемою Бернуллі*.

Встановимо ймовірність того, що при проведенні n експериментів успіх наступить рівно m разів і, відповідно, $n - m$ разів настане невдача. Важлива лише загальна кількість успіхів і невдач, а не порядок настання чи чергування успіхів та невдач. У загальному випадку (n випробувань, з яких m успіхів) для кожного з варіантів будемо мати:

$$p^m q^{n-m}.$$

Оскільки вони несумісні, то за правилом додавання ймовірностей несумісних подій, їх потрібно додати, а оскільки всі вони однакові, то потрібно ймовірність одного варіанта помножити на їх кількість. З послідовності n експериментів вибрати m тих, в яких подія відбулася можна C_n^m способами. Тому остаточно отримаємо формулу

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \tag{3.1}$$

яка називається формулою Бернуллі.

*Наслідок 1***.** Ймовірність того, що в результаті n незалежних експериментів за схемою Бернуллі подія відбудеться від m_1 до m_2 разів, обчислюється за формулою:

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} C_n^m p^m q^{n-m} = \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} . \tag{3.2}$$

*Наслідок 2***.** Ймовірність того, що в результаті n незалежних експериментів за схемою Бернуллі подія A відбудеться не більше m разів, обчислюється за формулою:

$$P_n(0 \le k \le m) = \sum_{k=0}^{m} C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k-0}^{m} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} . \tag{3.3}$$

*Наслідок 3***.** Ймовірність того, що в результаті n незалежних експериментів за схемою Бернуллі подія A відбудеться не менше m разів, обчислюється за формулою:

$$P_n(m \le k \le n) = 1 - P_n(0 \le k \le m-1) = 1 - \sum_{k-0}^{m-1} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} . \tag{3.4}$$

*Наслідок 4***.** Ймовірність того, що в результаті n незалежних експериментів за схемою Бернуллі подія A відбудеться хоча б один раз, обчислюється за формулою:

$$P_n(1 \le m \le n) = 1 - q^n . \tag{3.5}$$

Найімовірніше число появ події

Розглянемо питання: яка кількість успіхів у послідовності з n випробувань, проведених за схемою Бернуллі найімовірніша? Ймовірності успіху p та невдачі q у кожному випробуванні відомі.

Означення 3.2. *Найімовірнішим числом появи випадкової події A* в результаті n незалежних експериментів за схемою Бернуллі називається таке число k_0, для якого ймовірність $P_n(k_0)$ перевищує або у всякому разі є не меншою за ймовірність кожного з решти можливих наслідків експериментів.

Розрахуємо величини ймовірностей $P_n(k)$ та $P_n(k+1)$ і знайдемо їх відношення. Якщо відношення $\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)}$ більше за одиницю, то це буде означати, що $P_n(k+1)$ більше за $P_n(k)$, і навпаки, відношення менше за одиницю вказує на те, що $P_n(k+1)$ менше ніж $P_n(k)$. Знайдемо саме те значення k, до якого ймовірність зростала, а потім спадає, тобто те значення, при якому відбувається зміна $P_n(k+1) > P_n(k)$ на протилежне. Відшукавши те значення k, при якому й відбувається вказана зміна співвідношення, будемо мати найімовірніше значення кількості успіхів.

Проведемо обчислення. Спочатку знайдемо відношення ймовірностей.

$$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)} = \frac{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} p^{k+1} q^{n-k-1}}{\frac{n!}{(k)!(n-k)!} p^k q^{n-k}} = \frac{(n-k)}{(k+1)} \frac{p}{q} .$$

Визначимо ті k, при яких це відношення більше за одиницю:

$$\frac{n-k}{k+1}\frac{p}{q}>1 \Rightarrow (n-k)p>(k+1)q \Rightarrow k(p+q)<np-q \Rightarrow k<np-1+p \Rightarrow k<p(n+1)-1.$$

Аналогічно, для оберненого співвідношення $\frac{n-k}{k+1}\frac{p}{q}<1 \Rightarrow k>p(n+1)-1.$

Отже число m_0, яке ще називається <u>*модою*</u>, визначається нерівностями:

$$(n+1)p-1 \le m_0 \le (n+1)p \text{ або } np-q \le m_0 \le np+p. \quad (3.6)$$

Приклад 3.1. Прилад складено з 10 блоків, надійність кожного з них 0,8. Блоки можуть виходити з ладу незалежно один від одного. Знайти імовірність того, що: а) відмовлять два блоки; б) відмовлять не менше двох блоків.

◄ Позначимо за подію A відмову блока. Тоді ймовірність події A згідно умови $n=10$, а $p(A)=p=1-0{,}8=0{,}2$, тому $q=1-p=0{,}8$. Використовуючи формулу Бернуллі та наслідок 3, одержимо:

а) $P_{10}(2)=C_{10}^2\cdot p^2\cdot q^8=C_{10}^2\cdot(0{,}2)^2(0{,}8)^8=0{,}3019$;

б) $P_{10}(2\le m\le 10)=1-P_{10}(0)+P_{10}(1)=1-C_{10}^0(0{,}2)^0(0{,}8)^{10}-C_{10}^1(0{,}2)^1(0{,}8)^9=0{,}624$.►

Приклад 3.2. У разі додержання певної технології 90% усієї продукції, виготовленої заводом, є найвищого сорту. Знайти найімовірніше число виробів найвищого сорту в партії з 200 штук.

◄ За умовою задачі n = 200; $p=0{,}9$; $q=1-p=0{,}1$. Використовуючи зауваження 2, дістаємо: $np-q\le k_0\le np+p$. Звідси

$$200\cdot 0{,}9-0{,}1\le k_0\le 200\cdot 0{,}9+0{,}9, \text{ тобто } 179{,}9\le k_0\le 180{,}9.$$

Отже, найімовірніше число виробів першого сорту серед 200 дорівнює 180. ►

Локальна та інтегральна теореми Лапласа

Формула Бернуллі хоча й дає точний результат, але часто не може бути застосована на практиці через громіздкість обчислень, що виникають, коли кількість випробувань велика. У таких випадках користуються наближеними асимптотичними формулами, які базуються на функціях Гауса та Лапласа.

Теорема 3.1. (локальна теорема Лапласа) *Якщо ймовірність p появи події A в кожному випробуванні стала і відмінна від нуля та одиниці($0<p<1$), то ймовірність $P_n(m)$ того, що подія A з'явиться в n випробуваннях рівно m разів наближено дорівнює*

$$P_n(m)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{npq}}e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \textit{або} \quad P_n(m)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \quad (3.7)$$

де $x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}$, а $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ — функція Гауса.

Зауваження. Значення функції $\varphi(x)$ для невід'ємних значень аргументу x в межах від 0 до 4 подано в таблицях (додаток); $\varphi(-x)=\varphi(x)$; $\varphi(x)\big|_{|x|\ge 4}\approx 0$.

Приклад 3.3. Знайти ймовірність того, що подія A відбудеться 10 разів у 100 незалежних випробуваннях, якщо подія A з'являється в кожному випробуванні з ймовірністю 0,2.

◀ Використаємо локальну теорему Лапласа:

$$x = \frac{(m-np)}{\sqrt{npq}} = \frac{10-100\cdot 0{,}2}{\sqrt{100\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}} = -\frac{10}{4} = -2{,}5\,.$$

За таблицею знаходимо: $\varphi(-2{,}5) = \varphi(2{,}5) = 0{,}0175$. Звідси:

$$P_n(m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{4}\cdot 0{,}0175 = 0{,}0044.$$ ▶

Теорема 3.2. (Інтегральна теорема Муавра-Лапласа) *Якщо ймовірність p появи події A в кожному випробуванні постійна і відмінна від нуля та одиниці ($0 < p < 1$), то ймовірність $P_n(m_1, m_2)$ того, що подія A наступить від m_1 до m_2 разів ($m_1 \le m \le m_2$), в n випробуваннях наближено дорівнює:*

$$P_n(m_1, m_2) = P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\,, \quad або \quad P_n(m_1, m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \qquad (3.8)$$

де $x_1 = \dfrac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$, а $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, — функція Лапласа.

Зауваження. Функція $\Phi(x)$ протабульована (додаток А) для додатніх значень аргументу; для від'ємних — $\Phi(-x) = -\Phi(x)$; $\Phi(x)\Big|_{|x|\ge 4} \approx 0{,}5$,

Приклад 3.4. В електромережу ввімкнено незалежно одну від одної 500 електролампочок. Ймовірність того, що електролампочка не перегорить в електромережі є величиною сталою і дорівнює 0,8. Яка ймовірність того, що з 500 електролампочок не перегорить не менш як 390 штук?

◀ За умовою задачі n=500, p=0,8, q=0,2, $390 \le m \le 500$.

$\sqrt{npq} = \sqrt{500\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2} = \sqrt{80} = 8{,}9$, $\quad np = 500\cdot 0{,}8 = 400$.

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{390-400}{8{,}9} = -\frac{10}{8{,}9} =\approx -1{,}12\,;\ x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{500-400}{8{,}9} = \frac{100}{8{,}9} \approx 11{,}23\,.$$

Отже $P_{500}(390 \le m \le 500) \approx \Phi(11{,}23) - \Phi(-1{,}12) = \Phi(11{,}23) + \Phi(1{,}12) = 0{,}5 + 0{,}3686 = 0{,}8686.$ ▶

За допомогою інтегральної формули Муавра-Лапласа можна оцінити ймовірність того, що різниця між відносною частотою появи події $W^*(A) = \dfrac{m}{n}$ й істинним значенням імовірності p успіху в конкретному випробуванні не більша за наперед задану величину.

Теорема 3.3. *Нехай p — ймовірність появи випадкової події A в кожному експерименті за схемою Бернуллі, а $W^*(A) = \dfrac{m}{n}$ — відносна частота появи цієї події при n випробуваннях. Тоді ймовірність відхилення відносної частоти від сталої ймовірності p з похибкою ε $(\varepsilon > 0)$, обчислюється за формулою:*

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \qquad (3.9)$$

Доведення. Так як $m_1\le m\le m_2$, то $\dfrac{m_1-np}{\sqrt{npq}}\le\dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}\le\dfrac{m_2-np}{\sqrt{npq}}$.

Звідси $P_n(m_1,m_2)=P_n\left(x_1\le\dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}\le x_2\right)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1)$.

Знайдемо $P_n\left(\left|\dfrac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)=P_n\left(-\varepsilon\le\dfrac{m}{n}-p\le\varepsilon\right)$.

Розглянемо вираз в дужках $-\varepsilon\le\dfrac{m-np}{n}\le\varepsilon\Big|\times\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}$ $\qquad -\dfrac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\le\dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}\le\dfrac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}$ отже

$P_n\left(-\dfrac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\le\dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}\le\dfrac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right)\approx\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\dfrac{n}{pq}}\right)-\Phi\left(-\varepsilon\sqrt{\dfrac{n}{pq}}\right)=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\dfrac{n}{pq}}\right)$. *Терема доведена.*

Приклад 3.5. Ймовірність того, що деталь нестандартна $p=0{,}1$. Знайти, скільки деталей потрібно відібрати, щоб з ймовірністю, рівною 0,9544, відхилення відносної частоти появи нестандартних деталей серед відібраних за абсолютною величиною не перевищувало 0,03.

◀ За умовою $p=0{,}1$; $q=0{,}9$ $\varepsilon=0{,}03$ $P_n\left(\left|\dfrac{m}{n}-0{,}1\right|\le 0{,}03\right)=0{,}9544$

Використаємо формулу $P_n\left(\left|\dfrac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\dfrac{n}{pq}}\right)$.

За умовою $2\Phi\left(0{,}03\sqrt{\dfrac{n}{0{,}1\cdot 0{,}9}}\right)=2\Phi\left(0{,}1\sqrt{n}\right)=0{,}9544$; $\Phi\left(0{,}1\sqrt{n}\right)=0{,}4772$; $\Phi(2)=0{,}4772$; $0{,}1\sqrt{n}=2$; $n=400$.▶

Формула Пуассона для малоймовірних випадкових подій

Точність локальної та інтегральної функції Лапласа для великих значень n знижується з наближенням p до нуля.

Розглянемо послідовність, так званих, рідкісних подій, коли ймовірність успіху в кожному конкретному випробуванні мала, тобто $p\to 0$, але кількість випробувань $n\to\infty$, причому вважається, що величина $\lambda=np$ стала.

Теорема 3.4. (теорема Пуассона). *Якщо $n\to\infty$ і $p\to 0$, причому $np=\lambda$ в кожному з випробувань Бернуллі, то ймовірність появи випадкової події m раз ($0\le m\le n$) обчислюється за формулою Пуассона:*

$$P(m)=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda},\ m=0,1,\ldots, \qquad (3.10)$$

де $\lambda=np$.

Доведення. Нехай $p \to 0$, кількість випробувань $n \to \infty$, причому величина $\lambda = np$ стала. Ймовірність одержати m успіхів у цьому випадку за формулою Бернуллі дорівнює: $P(m) = \lim\limits_{n\to\infty} P_n(m) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}$.

Для перетворення останньої формули скористаємося співвідношенням між ймовірністю успіху та невдачі $q = 1 - p$, а також $p = \dfrac{\lambda}{n}$. У результаті вказаних замін отримаємо: $P(m) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{m!(n-m)!}\left(\dfrac{\lambda}{n}\right)^m \left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)^{n-m}$.

$$P(m) = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^m}{m!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left\{\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{n^m}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m}\right\} =$$

$$= \frac{\lambda^m}{m!}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{n^m}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m}\right\} = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!},$$

Так як

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{n^m}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m} = 1,$$

та $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{-\dfrac{n}{\lambda}}\right)^{\frac{n}{-\lambda}(-\lambda)} = e^{-\lambda}$. Отже $P(m) = \dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$. *Теорема доведена.*

Наслідок. Із формули (3.10) випливає:

$$P(m_1 \le m \le m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} P(m) = \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}. \qquad (3.11)$$

У таблиці 3.1 наведені критерії застосування формул Бернуллі, Муавра-Лапласа та Пуассона для обчислення ймовірностей подій у випробування, проведених за схемою Бернуллі.

Таблиця 3.1.

Критерії застосування формул Бернулі, Муавра-Лапласа та Пуассона

Формула Бернуллі	Теореми Муавра-Лапласа	формула Пуассона
При невеликих $n \le 10$	$n \ge 100$ $npq > 20$.	$n \to \infty,\ p \to 0$ $0 \le np \le 10$ $(0 \le \lambda \le 10)$

Приклад 3.6. Радіоприлад містить 1000 мікроелементів, які працюють незалежно один від одного, причому кожний може вийти з ладу під час роботи приладу з імовірністю $p = 0{,}002$. Обчислити ймовірності таких подій: 1) під час роботи приладу з ладу вийдуть 3 мікроелементи; 2) від трьох до шести.

◀ За умовою задачі маємо $n=1000$; $p=0{,}002$; $m=3$; $3\le m\le 6$. Оскільки n велике, а p мале число, то для обчислення ймовірностей застосуємо формули (3.10), (3.11). Для цього обчислимо значення параметра $\lambda = np = 1000\cdot 0{,}002 = 2$

1) $P\ (3)\approx 0{,}18044$.

2) $P(3\le m\le 6)=P(3)+P(4)+P(5)+P(6)=$

$=0{,}180447+0{,}090224+0{,}036089+0{,}01203=0{,}31879$.▶

Тема 4. **Однорідні ланцюги маркова**

Ланцюг Маркова. Однорідний ланцюг Маркова. Перехідні ймовірності. Матриця переходу

Важливим узагальненням схеми незалежних випробувань на випадок, коли випробування залежні є ланцюги Маркова.

Означення 4.1. *Ланцюгом Маркова* називають послідовність випробувань, в кожному з яких з'являється тільки одна з N несумісних подій $\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_N$ повної групи, причому умовна ймовірність $p_{ij}(s)$ того, що в s-му випробуванні наступить подія $\omega_j(\ j=1,2,\dots,N)$, при умові, що в $s-1$-му випробуванні наступила подія $\omega_i(\ j=1,2,\dots,N)$, не залежить від результатів попередніх випробувань (на довільному кроці s ймовірність настання певної події залежить лише від результату попереднього $s-1$ кроку, але не залежить від тих, що були раніше).

Означення 4.2. *Однорідним ланцюгом Маркова називають* ланцюг Маркова, якщо умовна ймовірність $p_{ij}(s)$ не залежить від номера випробування. Тому замість $p_{ij}(s)$ пишуть p_{ij} (може бути скінченим чи нескінченним).

Нехай проводиться послідовність випробувань і в s-му випробуванні можуть настати події $\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_N$. Будемо вважати, що кожна із подій відповідає певному станові системи (припустимо, що загальна кількість станів системи визначається числом N, яке може бути й нескінченним), а процес випробування — переходові системи зі стану в стан. Ймовірність потрапляння системи зі стану ω_i у стан ω_j так звана ймовірність переходу (за умови, що перебування в стані ω_i безпосередньо передує перебуванню в стані ω_j) є умовною ймовірністю:

$$p_{ij}=P_{\omega_i}(\omega_j)$$

(перший індекс вказує на номер попереднього стану, а другий — наступного.)

Набір коефіцієнтів p_{ij}, $i,j=(1,\dots,N)$ утворює *матрицю переходу* за один крок, тобто матрицю, яка містить всі перехідні ймовірності цієї системи

$$\pi_1=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1N}\\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2N}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NN}\end{pmatrix}$$

Згідно з визначенням ймовірності, елементи матриці π_1 невід'ємні й сума елементів кожного рядка дорівнює одиниці (бо це ймовірності переходу з i-го стану в довільний), тобто $\sum_{j=1}^{N} p_{ij} = 1$. Якщо заданий розподіл ймовірностей для першого випробування (перехід у перший стан «нізвідки»), тобто набір значень $a_i > 0$, то ймовірність сумісного результату перших двох випробувань за два кроки дорівнюватиме: $P_2(\omega_i, \omega_j) = a_i p_{ij}$.

Аналогічно для k послідовних випробувань, ймовірність конкретного перебігу подій: $P_k(\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots \omega_{i_k}) = a_{i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{k-1} i_k}$, $i_k = 1, 2, \ldots$.

Приклад 4.1. (Випадкові блукання з відбиванням) Частинка може рухатися по відрізку прямої під дією випадкових поштовхів. При кожному поштовху вона пересувається на один вузол вліво чи вправо з ймовірностями p і $q = 1 - p$ — відповідно. Залишатися на тому самому вузлі частинка не може. У вузлах з номерами 1 та N стоять дзеркала, що відбивають частинку. Побудувати матрицю переходу π_1.

◀ Всередині відрізка переходи можливі лише між вузлами, номери яких відрізняються на 1, а саме: $p_{ii-1} = p$, $p_{ii+1} = q$ $(i = 2, \ldots N - 1)$. Решта ймовірностей, у тому числі й ті, що відповідають переходу з довільного стану в той самий стан, дорівнюють нулю, $p_{ii} = 0$.

Розглянемо два особливих вузли — перший і останній. Якщо частинка перебуває у першому вузлі, то з імовірністю, що дорівнює одиниці, вона перейде у другий, якщо в останньому вузлі — в передостанній. Отже, $p_{12} = p_{NN-1} = 1$. Матриця коефіцієнтів p_{ij}:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & q & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & q & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & q & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p & \cdots & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & p & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Послідовність незалежних випробувань — частинний випадок ланцюга Маркова, в якому ймовірності залежать лише від стану, в який система потрапить, але не від стану, з якого вона вийшла. Отже, матриця переходу за один крок для послідовності незалежних випробувань — це матриця, що складається з однакових рядків.

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_{N-1} & p_N \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_{N-1} & p_N \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_{N-1} & p_N \end{pmatrix} ▶$$

Рівність Маркова

Знайдемо матрицю переходу за k кроків. Вона складатиметься із значень ймовірностей того, що система, перебуваючи на кроці s в ω_i-му стані, опинилася на кроці $s+k$ у стані ω_j. Ймовірність переходу із стану ω_i в s-му випробуванні в стан ω_j в $s+k$-му випробуванні позначимо $p_{ij}(k)$ Розглянемо проміжний стан ω_l, в який система потрапила на кроці $s+m$, тобто зробивши m кроків із k. Ймовірність $p_{il}(m)$ $(1 \le l \le N)$. Ймовірність такого переходу із стану ω_l на кроці $s+m$ в стан ω_j на кроці $s+k$ рівна $p_{lj}(k-m)$.

За формулою повної ймовірності

$$p_{ij}(k) = \sum_{l=1}^{N} p_{il}(m) p_{lj}(k-m), \ (0 < m < k).$$

Ця формула називається <u>*рівністю Маркова*</u>.

Пояснення. Нехай A — подія, яка полягає в тому, що за k кроків система перейде із початкового стану ω_i в кінцевий стан ω_j; B_l $(1 \le l \le N)$ — гіпотези (за m кроків система перейде із початкового стану ω_i у довільний стан ω_l), отже $P(B_l) = p_{il}(m)$; $P_{B_l}(A)$ — умовна ймовірність появи події A при умові, що мала місце подія B_l(за $k-m$ кроків система перейшла із проміжного стану ω_l в кінцевий стан ω_j), отже $P_{B_l}(A) = p_{lj}(k-m)$. За формулою повної ймовірності $P(A) = \sum_{l=1}^{k} P(B_l) P_{B_l}(A)$, або в прийнятих позначеннях $p_{ij}(k) = \sum_{l=1}^{N} p_{il}(m) p_{lj}(k-m)$.

Отримана рівність — це правило множення матриць, тому, позначивши π_k матрицю переходу за k кроків, що складається з коефіцієнтів $p_{ij}(k)$

$$\pi_k = \begin{pmatrix} p_{11}(k) & \cdots & p_{1N}(k) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{N1}(k) & \cdots & p_{NN}(k) \end{pmatrix},$$

можемо записати $\pi_k = \pi_m \pi_{k-m}$ $(0 < m < k)$.

При $k=2$ $\pi_2 = \pi_1 \pi_1 = \pi_1^2$; при $k=3$ $\pi_3 = \pi_1 \pi_2 = \pi_2 \pi_1 = \pi_1^3$;

при довільному k: $\pi_k = \pi_1^k$.

Теоретичні запитання до розділу I

1. Що називається стохастичним експериментом?

2. Які події називаються випадковими, достовірними, неможливими? Навести приклади.

3. Яка подія називається елементарною, складеною випадковою подією? Навести приклади.

4. Що називається простором елементарних випадкових подій? Навести приклади.

5. Дати означення суми, добутку, різниці двох випадкових подій.

6. Які події називаються протилежними?

7. Які події називаються повною групою подій?

8. Які події називаються сумісними, несумісними, рівноможливими, протилежними?

9. Які події називаються незалежними, незалежними в сукупності, залежними?

10. Дати класичне означення ймовірності випадкової події.

11. Що називається сполуками елементів певної множини?

12. Які сполуки елементів певної множини називаються перестановками, розміщеннями та комбінаціями?

13. За якими формулами обчислюються перестановки, розміщення та комбінації?

14. Сформулювати два основні правила комбінаторики.

15. Дати класичне означення ймовірності випадкової події.

16. Що називається відносною частотою випадкової події?

17. Що називається статистичною ймовірністю події.

18. Як формулюють і якою формулою записують теорему додавання ймовірностей несумісних (попарно несумісних) подій?

19. За якою формулою обчислюють ймовірність появи хоча би однієї з попарно несумісних подій?

20. Дати визначення ймовірнісного простору.

21. Чому дорівнює сума ймовірностей повної групи випадкових подій?

22. Як обчислюється ймовірність події $\overline{A}$, якщо відома ймовірність $P(A)$?

23. Дати означення добутку випадкових подій. Сформулювати теорему множення ймовірностей незалежних подій.

24. Як обчислити ймовірність появи хоча б однієї з подій $A_1, A_2, \dots, A_n$, незалежних в сукупності?

25. Як позначається та обчислюється умовна ймовірність?

26. Сформулювати теорему множення ймовірностей залежних подій.

27. Сформулювати теорему додавання ймовірностей сумісних подій.

28. Як оцінити надійність роботи системи.

29. Записати формулу повної ймовірності.

30. Коли застосовують формулу Байєса та як її записують?

31. Які експерименти називають випробуваннями за схемою Бернуллі?

32. Формула Бернуллі, виведеня формули.

33. За якої умови формула Бернуллі застосовується для обчислення ймовірностей?

34. За якими формулами знаходять ймовірність того, що події A відбудуться від m_1 до m_2 разів; менше m або не менше m разів у випробуваннях за схемою Бернуллі?

35. За якою формулою знаходять ймовірність появи події A хоча б один раз у n випробуваннях?

36. Обчислення найімовірнішого числа появи випадкової події A в результаті n незалежних експериментів за схемою Бернуллі.

37. Сформулювати локальну теорему Муавра-Лапласа.

38. Сформулювати інтегральну теорему Муавра-Лапласа.

39. За яких умов використовуються теореми Муавра-Лапласа?

40. За якою формулою обчислюється ймовірність відхилення відносної частоти від постійної ймовірності p з похибкою ε або чому дорівнює $P(|\frac{m}{n}-p|<\varepsilon)$? Сформулювати та довести теорему.

41. Сформулювати теорему Пуассона. Умови використання.

42. Сформулювати означення ланцюга Маркова., однорідного ланцюга Маркова.

43. Перехідні ймовірності. Матриця переходу.

44. Рівність Маркова.

45. Матриця переходу за k кроків.

Вправи до розділу І

1. Києва до Одеси можна вибрати один із 4 залізничних або один із 3 автобусних рейсів. Скільки є варіантів здійснити подорожі за маршрутами: а) Київ — Одеса; б) Київ — Одеса — Київ; в) Київ — Одеса — Київ, якщо зворотний шлях провести у поїзді?

2. На вершину гори веде 7 доріг. Скількома способами турист може піднятись на гору і спуститися з неї? Дати відповідь на те ж запитання, якщо підйом та спуск здійснювати різними шляхами.

3. У розіграші чемпіонату країни з футболу беруть участь 17 команд. Скількома способами може бути розподілено золоту, срібну і бронзову медалі?

4. Гральний кубик підкидають двічі. Описати простір елементарних подій. Описати події: А — сума очок на двох кубиках дорівнює 8; В — принаймні один раз випаде 6.

5. Підкидають монету доти, доки не випаде герб. Описати простір елементарних подій.

6. Обчислити ймовірність того, що дні народження 12 осіб припадатимуть на різні місяці року.

7. Задано дві множини цілих чисел: Ώ1 = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, Ώ2 = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Із кожної множини навмання беруть по одному числу. Побудувати простір елементарних подій для цього експерименту і такі випадкові події: А — сума цифр буде кратною 3; В — сума цифр буде кратною 7. Обчислити: $P(A)$, $P(B)$, $P(A\cap B)$.

8. В електромережу ввімкнено 15 електролампочок. Кожна з них може перегоріти із певною ймовірністю. Визначити простір елементарних подій (множину Ώ) — числа електролампочок, що не вийдуть із ладу, і такі випадкові події: А — число електролампочок, що не вийдуть із ладу, буде не більшим від чотирьох; В — від трьох до шести. Обчислити: $P(A)$, $P(B)$ $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$.

9. В урні міститься 4 червоних, 5 синіх і 6 зелених кульок. Навмання із урни беруть три кульки. Яка ймовірність того, що вони виявляться одного кольору або всі три будуть мати різні кольори?

10. Партія з 10 деталей містить 4 браковані. Знайти ймовірність того, що з

навмання взятих двох деталей будуть:

1) дві придатні;
2) дві браковані;
3) 1 придатна і 1 бракована.

11. Партія складається з 20 виробів, з яких 8 виробів 1-го сорту, 6—2-го, 2—3-го сорту, а решта — браковані. Навмання беруть 4 вироби. Знайти ймовірність того, що серед них виявилося 2 вироби 1-го сорту, 1 виріб—2-го сорту і 1 бракований.

12. На прямокутній полиці навмання розставлено 8 томів зібрання творів. Знайти ймовірність того, що в результаті I, II і III томи стоять поруч.

13. Набираючи номер телефону, абонент забув дві останні цифри і, вважаючи, що вони різні, набрав їх навмання. Знайти ймовірність того, що набрано правильні цифри.

14. У лотереї на кожні 500 білетів розігрується 100 речових і 50 грошових виграшів. Знайти ймовірність виграшу для особи, яка має один білет.

15. Партія електролампочок складається з 10 придатних і п'яти бракованих. Із партії навмання по одній беруть усі лампочки. Знайти ймовірність того, що останньою буде взято придатну.

16. У партії із 16 деталей чотири нестандартні. Навмання з поверненням беруть три деталі. Знайти ймовірність того, що серед них дві деталі будуть стандартними.

17. Восьмеро осіб у випадковому порядку сідають за круглий стіл. Знайти ймовірність того, що троє товаришів опиняться поруч.

18. У партії однотипних деталей, кількість яких дорівнює 400, контролер виявив 25 бракованих. Чому дорівнює відносна частота появи стандартних деталей?

19. При стрільбі з гвинтівки по мішені відносна частота влучення дорівнює 0,85. Знайти число влучень, якщо було здійснено 20 пострілів. Відповідь. 17.

20. У ящику міститься 13 однакових деталей, серед яких 5 є бракованими, а решта — стандартними. Навмання з ящика беруть чотири деталі. Яка ймовірність того, що всі чотири деталі виявляться стандартними або бракованими?

21. Система має два незалежно працюючих елементи. Ймовірність їх відмови дорівнює 0,05 та 0,08 відповідно. Знайти ймовірність відмови системи, якщо для цього достатньо відмови хоча би одного елемента.

22. Два мисливці влучають у ціль з ймовірностями 0,7 та 0,8, відповідно. Кожен з них робить один постріл. Яка ймовірність того, що: а) обидва влучать? б) жоден не влучить? в) хоча б один влучить? г) лише один влучить у ціль?

23. Кинуто послідовно три монети. Визначити, залежні чи незалежні події: А

= {випав герб на першій монеті}, В = {випала хоча б одна решка}.

24. Робітник обслуговує три верстати-автомати, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що протягом години перший верстат потребує уваги робітника дорівнює 0,9, другий — 0,85, а третій — 0,8. Яка ймовірність того, що протягом години уваги робітника потребують? а) A – два верстати; б) B – хоча би один із трьох?

25. Ймовірність влучення стрілком у першу область мішені дорівнює 0,45, у другу — 0,35, у третю — 0,15. Знайти ймовірність того, що при одному пострілі стрілок влучить в першу або в другу область мішені.

26. Два стрільці незалежно один від одного роблять по одному пострілу по мішені. Ймовірність влучення першого 0,8, другого — 0,4. Відомо, що є одне влучення. Знайти ймовірність того, що у мішень влучив перший стрілець.

27. Прилад складається з трьох елементів, які працюють незалежно один від одного. Імовірність того, що перший елемент не вийде із ладу під час роботи приладу, є величиною сталою і дорівнює р1 = 0,9. Для другого і третього елементів ця ймовірність відповідно така: р2 = 0,8, р3 = 0,7. Обчислити ймовірність того, що під час роботи приладу з ладу вийде: 1) А — три елементи; 2) В — два елементи; 3) С — один елемент; 4) D — всі три елементи не вийдуть із ладу. З'ясувати, чи утворюють випадкові події А, В, С, D повну групу.

28. Радіолокаційна система, до якої входять дві станції, що працюють самостійно, виконує деяке завдання з виявлення літака-порушника повітряного простору України на певній ділянці кордону. Для виконання цього завдання необхідно, щоб у справному стані була хоча б одна радіолокаційна станція. Імовірність безвідказної роботи першої станції дорівнює 0,95, а другої 0,85. Система працюватиме надійно, якщо буде справною хоча б одна радіолокаційна станція. Знайти ймовірність цієї події. (Відповідь. р = 0,9925).

29. Робітник обслуговує три верстати-автомати, що працюють незалежно один від одного. Імовірність того, що протягом години перший верстат потребує уваги робітника дорівнює 0,9, для другого та третього верстатів ця ймовірність дорівнює відповідно 0,85 і 0,8. Яка ймовірність того, що протягом години уваги робітника потребують: 1) А — два верстати; 2) В — хоча б один із трьох?

30. В академічній групі 25 студентів, які складають екзамен з математики, із них 5 підготовлені відмінно, 10 — добре, 9 — задовільно і 6 — незадовільно. В екзаменаційних тестах міститься 10 питань. Відмінно підготовлений студент може відповісти на всі 10 запитань, добре підготовлений — на 7 запитань, задовільно підготовлений — на 5 запитань і незадовільно підготовлений — на 3 запитання. Навмання викликаний студент відповів на всі три запитання. Знайти ймовірність того, що це був студент: 1) відмінно підготовлений; 2) незадовільно підготовлений.

31. У кожній з 3 урн 5 білих і 7 чорних куль. З першої урни взяли одну кулю і

переклали в другу. З другої урни взяли одну кулю і переклали в третю. Обчислити ймовірність того, що з останньої урни буде взято білу кулю.

32. З урни, яка містить 3 білих та 2 чорних кулі, перекладено дві кулі до урни, яка містить 4 білих та 4 чорні кулі. Яка ймовірність того, що з другої урни після такого перекладання буде взято білу кулю?

33. Деталі виробляються на двох заводах. Обсяг продукції другого заводу в 3 разів перевищує обсяг продукції першого заводу. Частка браку на першому заводі 0,1, на другому — 0,05. Навмання взята деталь виявилася бракованою. Яка ймовірність того, що її випущено а) першим б) другим заводом?

34. З урни, яка містить 3 білих та 2 чорних кулі, перекладено дві кулі до урни, яка містить 4 білих та 4 чорни кулі. Яка ймовірність того, що з другої урни після такої перекладання буде взято білу кулю?

35. Імовірність виготовлення робітником деталі відмінної якості становить 0,75. Яка ймовірність того, що серед 6 виготовлених деталей робітником хоча б одна буде відмінної якості? Знайти найімовірніше число виготовлених робітником деталей відмінної якості й обчислити ймовірність цього числа.

36. Під час тестування з математики студент має дати правильні відповіді на 5 запитань. Імовірність того, що він на позитивну оцінку відповість на одне запитання, у середньому дорівнює 0,8. Щоб скласти тест, студентові необхідно дати відповідь не менш ніж на три питання. Знайти ймовірність того, що студент складе тест.

37. Відомо, що серед виробів заводу стандартні деталі становлять у середньому 85%. Скільки необхідно взяти цих деталей, щоб $m_0 = 65$?

38. У разі ввімкнення запалювання мотор автомобіля почне працювати з імовірністю 0,99. Яка ймовірність того, що: 1) мотор почне працювати при двох увімкненнях запалювання; 2) не більш як двох.

39. У партії однотипних деталей кількості стандартних і бракованих деталей відносяться, як 5 : 2. Навмання з партії беруть 8 деталей. Яка ймовірність того, що серед них стандартних виявиться 6? Знайти найімовірніше число появи стандартних деталей серед семи навмання взятих і обчислити відповідну ймовірність.

40. У партії однотипних деталей стандартні становить 82%. Навмання з партії беруть 400 деталей. Яка ймовірність того, що серед них стандартних буде: 1) 355; 2) від 355 до 300. Знайти найімовірніше число появи стандартних деталей m_0 і обчислити відповідну ймовірність.

41. Імовірність того, що виготовлена на заводі електролампочка при вмиканні її в електромережу перегорить через певний відтинок часу є величиною сталою і дорівнює 0,02. Скільки необхідно взяти таких електролампочок, щоб імовірність відхилення відносної частоти електролампочок, що перегорить, від імовірності 0,02, взяте по абсолютному значенню, не перевищувала величини 0,001, дорівнювала б 0,999.

42. Імовірність виходу із ладу виробу під час його випробування на надійність дорівнює 0,05. Яка ймовірність того, що під час випробувань 900 виробів із ладу вийдуть: 1) 30; 2) не більш як 30.

43. Завод відправив на базу 9000 доброякісних виробів. Імовірність пошкодження кожного виробу під час транспортування на базу становить 0,0001. Знайти ймовірність того, що серед 9000 виробів при транспортуванні буде пошкоджено: 1) 3 вироби; 2) не більш як 3.

44. . Імовірність виявити помилку на сторінці книжки дорівнює 0,001. Яка ймовірність у результаті перевірки книжки на 1000 сторінок виявити помилку: 1) на 5 сторінках; 2) не більш як на 5 сторінках?

45. Задана матриця переходу $\pi_1 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю переходу π_2.

46. Задана матриця переходу $\pi_1 = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю переходу π_3.

РОЗДІЛ ІІ. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Тема 5. **Випадкова величина. Способи задання випадкової величини**

Основні означення

Неоднозначні наслідки випробувань доволі часто представляють у вигляді числових показників, які називають *випадковими величинами*.

Означення 5.1. *Випадкова величина* — це величина, яка в результаті випробування набуде одне (певне) значення з можливих, яке наперед невідоме, бо залежить від випадкових причин, що не можуть бути враховані.

Випадкові величини поділяють на *дискретні* та *неперервні*.

Означення 5.2. *Дискретною випадковою величиною* називається випадкова величина, яка набуває лише певні (конкретні) можливі значення з певними ймовірностями. Можливі значення дискретної випадкової величини складають скінчену або злічену множину.

Прикладами дискретних випадкових величин є: число студентів на лекції; кількість викликів швидкої допомоги в місті протягом доби; число голосів, поданих за кандидата під час виборів.

Означення 5.3. *Неперервною* називають випадкову величину, що може набувати довільні значення з певного скінченого або нескінченного проміжку. Кількість можливих значень неперервної випадкової величини нескінченна.

Прикладами неперервних випадкових величин є: тривалість життя організмів певного класу; висота стовпчика ртуті в барометрі; максимальна денна температура повітря.

Випадкові величини позначають великими латинськими літерами (*X, Y, Z*), а для позначення можливих значень певної випадкової величини, наприклад *X*, використовуються відповідні малі літери з індексом, що вказує на номер даного значення $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Максимальне значення індексу задає кількість можливих значень випадкової величини (вона може бути нескінченною).

Означення 5.4. *Законом розподілу випадкової величини* називають відповідність між значеннями випадкових величин та їх ймовірностями.

Означення 5.5. Дві випадкові величини є *незалежні*, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від можливих значень іншої випадкової величини. У противному разі випадкові величини є *залежними.*

Означення 5.6. *Законом розподілу дискретної випадкової величини* називають однозначну відповідність між можливими значеннями випадкової величини $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ та їх ймовірностями $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$.

Відповідність між можливими значеннями $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ дискретної випадкової величини X та їх ймовірностями $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ може бути задана у вигляді таблиці (ряд розподілу), аналітично (у вигляді функції розподілу випадкової величини) або у вигляді графіка.

Означення 5.7. *Ряд розподілу* — це таблиця, яка складається з двох

рядочків: у верхньому перелічені всі можливі значення випадкової величини в порядку зростання, а в нижньому — відповідні ймовірності (табл 5.1).

Таблиця 5.1 Ряд розподілу дискретної випадкової величини X

$X = x_i$	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
$P(X = x_i) = p_i$	p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

Завжди виконується рівність $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ — <u>*умова нормування ймовірностей для дискретної випадкової величини*</u>.

Означення 5.8. Закон розподілу дискретної випадкової величини можна подати графічно. У прямокутній системі координат будують точки $M_1(x_1, p_1)$, $M_2(x_2, p_2)\ldots$ $M_n(x_n, p_n)$ й сусідні точки сполучають відрізками прямих. Одержану фігуру називають <u>*многокутником розподілу*</u> (<u>*імовірнісний многокутник*</u>).

Приклад 2.9. За заданим у табличній формі законом розподілу дискретної випадкової величини X:

$X = x_i$	–2,5	1	3,5	5	6,5	8
$P(X = x_i) = p_i$	0,1	0,2	0,1	p_4	0,2	0,1

Знайти ймовірність можливого значення випадкової величини $X = x_4 = 5$ та побудувати многокутник розподілу.

◄ Згідно умови нормування для дискретної випадкової величини маємо:

$\sum_{i=1}^{6} p_i = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1 \to 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 + p_4 + 0{,}2 + 0{,}1 = 1$. Звідси $p_4 = 0{,}3$. Імовірнісний многокутник зображено на рисунку 5.1.

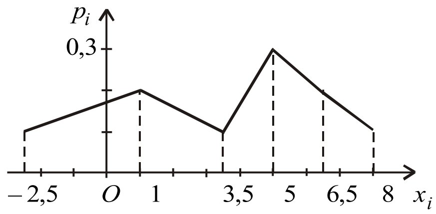

Рис 5.1. ►

Закон розподілу дискретної випадкової величини записують <u>*аналітично*</u> функцією ймовірностей: $P(X = x_i) = \varphi(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Означення 5.9. <u>*Мода*</u> — це таке значення дискретної випадкової величини $M_0(X)$, якому відповідає найбільша ймовірність.

Приклад 2.10. Баскетболіст кидає м’яч у кошик тричі. Ймовірність попадання при кожному киданні однакова й дорівнює 0,8. Записати ряд розподілу випадкової величини X — кількості попадань м’ячем у кошик при трьох киданнях.

◄ 1) Нехай $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ $x_4 = 3$ — значення випадкової величини X. Елементарні події даного експерименту — $\omega_1 = 000$, $\omega_2 = 100$, $\omega_3 = 010$, $\omega_4 = 001$,

$\omega_5 = 110$, $\omega_6 = 101$, $\omega_7 = 011$, $\omega_8 = 111$, де через 0 позначено промах, а через 1 — влучення. Знайдемо відповідні ймовірності:

$P(X=0) = P(\omega_1) = 0{,}008$; $P(X=1) = P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = 0{,}096$;

$P(X=2) = P(\omega_5) + P(\omega_6) + P(\omega_7) = 0{,}384$; $P(X=3) = P(\omega_8) = 0{,}512$.

Запишемо отримані дані у вигляді таблиці.

Таблиця 5.2. Ряд розподілу випадкової величини X

X	0	1	2	3
P	0,008	0,096	0,384	0,512

►

У випадку *неперервної випадкової величини* X, її можливі значення задаються інтервалом $a \le X \le b$, де a, b — довільні числа. Перелічити можливі значення неперервної величини, на відміну від дискретної, неможливо — вони утворюють незчисленну множину.

Ймовірність реалізації кожного певного значення x_i неперервної величини *дорівнює нулю*, бо кількість її можливих значень нескінченно велика і вказати ймовірності кожного значення X, як це має місце в дискретному випадку, неможливо. Замість цього неперервна випадкова величина характеризується деякою функцією $f(x)$, яка має такий зміст: добуток $f(x) \cdot dx$ дорівнює ймовірності того, що випадкова величина набуває значення в інтервалі $(x, x+dx)$. Неперервна величина вважається заданою, якщо вказаний інтервал її зміни та відома функція $f(x)$.

Інтегральна функція розподілу випадкової величини. Основні властивості інтегральної функції розподілу.

Універсальним способом задання випадкової величини, придатним для всіх типів випадкових величин, є інтегральна функція розподілу (функція розподілу).

Означення 5.10. *Інтегральною функцією розподілу випадкової величини* називають функцію $F(x)$, яка визначає для довільного x ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення, меншого за x:

$$F(x) = P(X < x).$$

Тобто, функція розподілу випадкової величини в певній точці — це ймовірність того, що випадкова величина набуде значень, що лежать лівіше від цієї точки на числовій осі.

Приклад 2.11. Нехай дискретна випадкова величина X задана рядом розподілу:

X	0	1	2
P	0,1	0,3	0,6

Побудувати інтегральну функцію розподілу для цієї випадкової величини.

◄ 1. Нехай $x \le 0$, тоді $F(x) = P(X < x) = 0$.

2. Нехай $0 < x \le 1$, тоді $F(x) = P(X < x) = 0{,}1$.

3. Нехай $1 < x \le 2$, тоді $F(x) = P(X < x) = 0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}4$.

4. Нехай $x > 2$, тоді $F(x) = P(X < x) = 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}6 = 1$.

Отже функція розподілу має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \textit{якщо} \quad x \le 0; \\ 0{,}1, & \textit{якщо} \quad 0 < x \le 1; \\ 0{,}4, & \textit{якщо} \quad 1 < x \le 2; \\ 1, & \textit{якщо} \quad x > 2. \end{cases}$$ ▶

*Основні властивості інтегральної функції розподілу***.**

1. $0 \le F(x) \le 1$ (так як функція розподілу — це ймовірність).

2. *Функція розподілу є неспадною функцією:* $F(x_1) \le F(x_2)$ *при* $x_1 < x_2$.

Доведення. Нехай $x_1 < x_2$. Випадкова подія $X < x_2$ є об’єднанням несумісних випадкових подій $X < x_1$ та $x_1 \le X < x_2$. Для їх ймовірностей справджується таке співвідношення: $P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \le X < x_2)$**.** Оскільки $P(x_1 \le X < x_2) \ge 0$, а $F(x_1) = P(X < x_1)$ і $F(x_2) = P(X < x_2)$ згідно означення, тому $F(x_2) \ge F(x_1)$. *Властивість доведена.*

3. *Ймовірність того, що випадкова величина набуде значення на проміжку* $[x_1, x_2)$ *дорівнює приросту функції розподілу на цьому проміжку:* $P(X \in [x_1, x_2)) = F(x_2) - F(x_1)$.

Доведення. Оскільки $P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \le X < x_2)$, тоді $P(x_1 \le X < x_2) = P(X < x_2) - P(X < x_1) = F(x_2) - F(x_1)$. *Властивість доведена.*

4. $F(-\infty) = P(X < -\infty) = 0$ (так як подія $X < -\infty$ є неможливою подією).

5. $F(\infty) = P(X < \infty) = 1$ (так як подія $X < \infty$ є достовірною подією).

Зауваження. $P(X < \infty) = P(X \in]-\infty, \infty[) = 1$, тому властивість 5 є *властивістю нормування*.

6. *Ймовірність того, що неперервна випадкова величина набуде конкретного заданого значення, дорівнює нулю* $P(X = x_1) = 0$.

Доведення. Нехай $x_2 = x_1 + \Delta x$. Тоді $P(X \in [x_1, x_1 + \Delta x[) = F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) = \Delta F(x_1)$. Приймаємо, що неперервна випадкова величина має неперервну функцію розподілу. Тому $\Delta F(x_1) \to 0$, якщо $\Delta x_1 \to 0$. *Властивість доведена.*

Зауваження. На основі *властивості 6* виконується $P(X < x) = P(X \le x)$.

7. *Функція розподілу неперервна зліва.*

Приклад 2.12. Функція розподілу випадкової величини X задана виразом

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ \alpha x^2, 0<x\le 2,\\ 1, x>2.\end{cases}$$ Знайти:

а) значення коефіцієнта α;

б) ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $[0{,}3;0{,}5]$.

◀ Значення коефіцієнта визначимо з умови неперервності функції розподілу. Значення виразу αx^2 при $x=0$ (ліва межа) повинно збігатися зі значенням функції розподілу при $x=0$, розрахованим для суміжного (лівого) проміжку, тобто нулю, а αx^2 при $x=2$ (права межа) збігатися з одиницею. Тобто $\alpha x^2\big|_{x=0}=0$, $\alpha x^2\big|_{x=2}=1$. Із цієї системи рівнянь перше задовольняється при довільному α, а друге виконується лише при $\alpha=0{,}25$. Отже $F(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ 0{,}25x^2, 0<x\le 2,\\ 1, x>2.\end{cases}$

а $P(0{,}3\le X\le 0{,}5)=F(0{,}5)-F(0{,}3)=0{,}065-0{,}0225=0{,}04$. ▶

Диференціальна функція розподілу неперервної випадкової величини. Основні властивості диференціальної функції розподілу

Розглянемо тільки неперервні випадкові величини. Крім інтегральної функції розподілу $F(x)$, неперервну випадкову величину можна задавати ще за допомогою так званої *диференційної функції* або *функції щільності розподілу*. Вважатимемо також, що функції розподілу цих випадкових величин диференційовані. Ймовірність реалізації значень випадкової величини X на проміжку $[x, x+\Delta x]$ визначають через диференціал функції розподілу таким; чином: $P(X\in[x, x+\Delta x])=F(x+\Delta x)-F(x)=dF(x)=F'(x)\Delta x=f(x)\Delta x$.

Ймовірність потрапити в малий проміжок пропорційна величині цього проміжку та ваговому множнику, який називається *функцією щільності розподілу.* Геометрично, на графіку щільності ймовірності, $f(x)dx$ відповідає площа прямокутника з основою dx і висотою $f(x)$ (рис. 5.2).

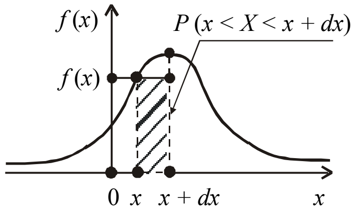

Рис. 5.2

Означення 5.11. Похідну функції розподілу $f(x)=\dfrac{dF(x)}{dx}$ називають *функцією щільності розподілу* або *диференціальною функцією розподілу*.

Властивості функції щільності розподілу

1. $f(x)>0,\ \forall x\in(-\infty,\infty)$ (так як функція $F(x)$ неспадна, тоді $F'(x)=f(x)\geq 0$).

2. *Ймовірність того, що випадкова величина набуде значення на проміжку $[x_1,x_2]$, визначається інтегралом від функції щільності на цьому проміжку*

$$P(X\in[x_1,x_2])=\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\,. \qquad (5.1)$$

Доведення. Функція розподілу $F(x)$ є первісною щодо функції щільності розподілу, тому $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx=F(x_2)-F(x_1)=P(X\in[x_1,x_2])$. *Властивість доведена.*

3. *Функцію розподілу випадкової величини визначають через її функцію щільності таким чином:*

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt\,. \qquad (5.2)$$

Доведення. На основі означення функції розподілу та властивості 2 одержимо: $F(x)=P(X<x)=P(X\in]-\infty,x])=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. *Властивість доведена.*

4. *`Для функції щільності розподілу виконується рівність:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt=1. \qquad (5.3)$$

Доведення. Беручи до уваги другу властивість функції щільності розподілу (див. доведення) та 3тю і 5ту властивість інтегральної функції розподілу, одержимо: $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt=F(\infty)-F(-\infty)=1$. *Властивість доведена.*

Геометрично ця властивість визначає одиничну площу під кривою функції щільності розподілу. Щоб інтеграл в нескінченних межах мав скінчене значення, необхідно, щоб $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$.

Зауваження. Щільність розподілу довільної випадкової величини — додатно визначена функція, що прямує до нуля при $x\to\pm\infty$, а отже, має один або декілька максимумів.

Приклад 2.13. Закон розподілу неперервної випадкової величини X задано у вигляді:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0;\\ \dfrac{1}{2}\ \sin\ x, & 0<x\leq\pi;\\ 0, & x>\pi.\end{cases}$$

Знайти $F(x)$ і побудувати графіки функцій $f(x)$, $F(x)$. Обчислити $P\left(\frac{\pi}{6}<X<\frac{\pi}{2}\right)$.

◄ Згідно властивості 3 отримаємо:

1) якщо $x \le 0$, тоді $F(x) = P(X < x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0$;

2) якщо $0 < x \le \pi$, тоді

$$F(x) = P(X < x) = \int\limits_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int\limits_{0}^{x} f(t)dt = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x} \sin t dt = \frac{1}{2}(-\cos t\,|_0^x) = \frac{1}{2}(-\cos x + 1) = \frac{1-\cos x}{2};$$

3) якщо $x > \pi$ тоді

$$F(x) = P(X < x) = \int\limits_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int\limits_{0}^{\pi} f(t)dt + \int\limits_{\pi}^{x} f(t)dt = \int\limits_{0}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi} \sin t\, dt = 1.$$

Отже, функція розподілу ймовірностей буде мати вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \frac{1}{2}(1-\cos x), & 0 < x \le \pi; \\ 1, & x > \pi. \end{cases}$$

Графіки функцій $f(x)$, $F(x)$ зображені відповідно на рисунках 5.3 та 5.4.

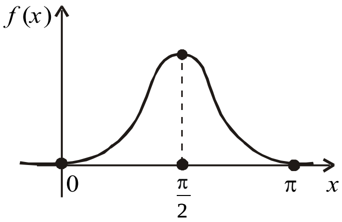

Рис. 5.3

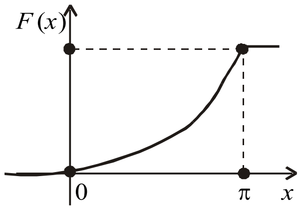

Рис. 5.4

Імовірність події $\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{2}$ обчислимо згідно формули (5.1). Будемо мати:

$$P\left(\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = -\frac{1}{2}\cos x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(-\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Тема 6. **Числові характеристики випадкових величин та їх властивості**

Кожен закон розподілу випадкової, величини доповнюється кількісними показниками, які називають *числовими характеристиками* цього розподілу. Вони узагальнено характеризують випадкову величину. До таких характеристик належать *математичне сподівання*, *дисперсія*, *середньоквадратичне відхилення*, *коефіцієнт асиметрії*, *ексцес* і т.д. Крім того, виділяють дві групи моментів випадкових величин — *початкові* та *центральні*.

Розглянемо основні числові характеристики — математичне сподівання, дисперсію та середньоквадратичне відхилення, а також уведемо поняття моментів різних ступенів.

Математичне сподівання

Означення 6.1. *Математичне сподівання дискретної випадкової величини* визначається як сума добутків можливих значень випадкової величини на

відповідні ймовірності:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i . \qquad (6.1)$$

Математичне сподівання *неперервної випадкової величини* визначається за формулою

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx . \qquad (6.2)$$

Математичне сподівання вважають усередненим значенням випадкової величини.

Властивості математичного сподівання

1. $M(C)=C$, *якщо* C *— стала величина.*

2. $M(CX)=CM(X)$, *якщо* C *— стала величина.*

3. *Математичне сподівання алгебраїчної суми двох незалежних випадкових величин дорівнює алгебраїчній сумі математичних сподівань цих величин:* $M(X\pm Y)=M(X)\pm M(Y)$.

Доведення. Нехай задані ряди розподілу для X та Y:

$X : x_1 : x_2 : \ldots x_n$	$Y : y_1 : y_2 : \ldots y_m$
$P_X : p_1 : p_2 : \ldots p_n$	$P_Y : q_1 : q_2 : \ldots q_m$

Оскільки випадкові величини X та Y незалежні, то ймовірність реалізації $x_i \pm y_j$ визначається добутком $p_i q_j$. Тоді

$M(X\pm Y)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(x_i \pm y_j)p_i q_j=\sum_{j=1}^{m} q_j \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \pm \sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{j=1}^{m} y_j q_j = M(X)\pm M(Y)$, оскільки $\sum_{j=1}^{m} q_j = 1$ та $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ за умовами нормування. *Властивість доведена.*

Наслідок. Математичне сподівання алгебраїчної суми декількох незалежних випадкових величин дорівнює алгебраїчній сумі математичних сподівань доданків.

4. *Математичне сподівання добутку незалежних випадкових величин дорівнює добутку математичних сподівань цих величин:*

$$M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y).$$

5. *Математичне сподівання різниці між випадковою величиною та її математичним сподіванням дорівнює нулю:*

$$M[X-M(X)]=0.$$

6. *Якщо* X *— неперервна випадкова величина, що задається щільністю розподілу* $f(x)$, *а* $\varphi(x)$ *— неперервна на множині значень* X, *то математичне сподівання функції* $\varphi(X)$ *визначається виразом*

$$M[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx. \qquad (6.3)$$

Якщо X *— дискретна випадкова величина, то*

$$M[\varphi(X)] = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) p_i . \qquad (6.4)$$

Дисперсія випадкової величини

Означення 6.2. *Дисперсією випадкової величини* X називають математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання:

$$D(X) = M\left[(X - M(X))^2\right]. \qquad (6.5)$$

Формула для розрахунку дисперсії дискретної випадкової величини має такий вигляд:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 p_i , \qquad (6.6)$$

а для неперервної випадкової величини

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x) dx. \qquad (6.7)$$

Дисперсію інтерпретують як міру розсіяння випадкової величини навколо її математичного сподівання. Чим вужчою є область визначення випадкової величини, тим меншими є квадрати відхилень від математичного сподівання і тим меншою буде дисперсія.

Означення 6.3. Числову характеристику закону розподілу випадкової величини

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} , \qquad (6.8)$$

називають *середньоквадратичним відхиленням*, або *стандартним відхиленням*.

Стандартне відхилення має такий самий зміст як і дисперсія, але перевага її використання в тому, що воно має розмірність випадкової величини.

Властивості дисперсії

1. *Дисперсія сталої величини* C *дорівнює нулю:* $D(C) = 0$.

Доведення. $D(C) = M\left[(C - M(C))^2\right] = 0$. *Властивість доведена.*

2. *Сталий множник випадкової величини можна винести за знак дисперсії, але потрібно його піднести до квадрата:*

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

Доведення. Використаємо означення дисперсії та другу властивість математичного сподівання. Одержимо: $D(CX) = M\left[(CX - M(CX))^2\right] = M\left[(CX - CM(X))^2\right] = C^2 M\left[(X - M(X))^2\right] = C^2 D(X)$. *Властивість доведена.*

3. *Дисперсія випадкової величини X дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата випадкової величини X та квадратом її математичного сподівання:*

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2. \qquad (6.9)$$

Зауваження. Формулу (6.9) називають <u>*робочою*</u> <u>*формулою*</u> <u>*для*</u> <u>*обчислення*</u> <u>*дисперсії*</u>.

Доведення. Згідно означення дисперсії та другої і третьої властивостей математичного сподівання. Одержимо: $D(X) = M\left[(X - M(X))^2\right] =$
$= M\left[X^2 - 2XM(X) + [M(X)]^2\right] = M\left[X^2\right] - 2M(X)M(X) + [M(X)]^2 =$
$= M(X^2) - 2[M(X)]^2 + [M(X)]^2 = M(X^2) - [M(X)]^2$. *Властивість доведена.*

4. *Дисперсія суми двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин:*

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y).$$

Доведення. За означенням дисперсії та властивостей математичного сподівання одержимо справедливість перетворення: $D(X+Y) = M\left[(X+Y)^2\right] -$
$- [M(X+Y)]^2 = M\left[X^2 + 2XY + Y^2\right] - [M(X) + M(Y)]^2 = M(X^2) + 2M(X)M(Y) + M(Y^2) -$
$- [M(X)]^2 - 2M(X)M(Y) - [M(Y)]^2 = D(X) + D(Y)$. *Властивість доведена.*

5. *Дисперсія різниці двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій:*

$$D(X-Y) = D(X) + D(Y).$$

Доведення. Згідно другої та четвертої властивостей дисперсії отримаємо: $D(X-Y) = D(X + (-1)Y) = D(X) + D((-1)Y) = D(X) + D(Y)$. *Властивість доведена.*

Приклад 6.1. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею:

x_i	– 4	– 2	1	2	4	6
p_i	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1

Обчислити $M(X)$, $D(X)$ та $\sigma(X)$.

◄ Обчислимо математичне сподівання. Згідно формули (6.1):
$M(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i p_i = -4\cdot 0{,}1 - 2\cdot 0{,}2 + 1\cdot 0{,}3 + 2\cdot 0{,}2 + 4\cdot 0{,}1 + 6\cdot 0{,}1 = 0{,}9$. Для обчислення дисперсії, згідно (6.9), (6.4), отримаємо: $D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^{6} x_i p_i\right)^2$.

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^{6} x_i^2 p_i = 16\cdot 0{,}1 + 4\cdot 0{,}2 + 1\cdot 0{,}3 + 4\cdot 0{,}2 + 16\cdot 0{,}1 + 36\cdot 0{,}1 = 8{,}7$$

$$D(X) = 8{,}7 - (0{,}9)^2 = 8{,}7 - 0{,}81 = 7{,}89;\ \sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{7{,}89} \approx 2{,}8.$$ ►

Приклад 6.2. Задано щільність імовірностей неперервної випадкової величини:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{1}{2}\sin x, & 0<x\le\pi;\\ 0, & x>\pi.\end{cases}$$

Обчислити $M(X)$, $D(X)$ та $\sigma(X)$.

◀ Згідно (6.2), враховуючи, що $f(x)=0\ \forall x\in(-\infty,0]\cup(\pi,+\infty)$, одержимо:

$$M(X)=\int_0^{\pi} xf(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\sin x dx=\left|\begin{array}{l}u=x,\quad du=dx\\ \sin x dx=dv\to\\ \to v=-\cos x\end{array}\right|=-\frac{-x\cos x}{2}\Bigg|_0^{\pi}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos x dx=$$

$$=\frac{-x\cos x}{2}\Bigg|_0^{\pi}+\frac{1}{2}\sin x\Bigg|_0^{\pi}=\frac{-\pi\cdot\cos\pi+0\cdot\cos 0}{2}+\frac{1}{2}(\sin\pi-\sin 0)=\frac{\pi}{2}.$$

Використаємо формулу (6.3). Будемо мати:

$$M(X^2)=\int_0^{\pi} x^2 f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2\sin x\, dx=\left|\begin{array}{l}u=x^2,\quad du=2xdx\\ \sin x dx=dv\to\\ \to v=-\cos x\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-x^2\cos x\Big|_0^{\pi}+2\int_0^{\pi} x\cos x dx\right)=\left|\begin{array}{l}u=x,\quad du=dx\\ \cos x dx=dv\\ v=\sin x\end{array}\right|=\frac{1}{2}\left[-x^2\cos x\Big|_0^{\pi}+2\left(x\sin x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin x dx\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[-x^2\cos x\Bigg|_0^{\pi}+2\left(x\sin x\Bigg|_0^{\pi}+\cos x\Bigg|_0^{\pi}\right)\right]=\frac{1}{2}(\pi^2-4)=\frac{\pi^2-4}{2}.$$ Отже

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=\frac{\pi^2-4}{2}-\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi^2-8}{4}.$$ Звідси $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\dfrac{\sqrt{\pi^2-8}}{2}$. ▶

Тема 7. **Основні закони розподілу випадкових величин та їх числові характеристики.**

Серед дискретних випадкових величин особливе місце в теорії ймовірностей посідають такі, які набувають лише цілих невід'ємних значень $X=x_k=0,1,2,\ldots$. Ці випадкові величини називають <u>*цілочисловими.*</u>

Розглянемо деякі найважливіші закони розподілу дискретних випадкових величин, які часто зустрічаються при розв'язуванні задач, та їх числові характеристики.

Біномний закон розподілу

Означення 7.1. Цілочислова випадкова величина X має <u>*біномний закон розподілу*</u>, якщо ймовірність її можливих значень обчислюється за формулою Бернуллі:

$$P_n(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k=0,1,2,\ldots,n, \quad p+q=1. \tag{7.1}$$

Тобто випадкова величина X — це число появ події в n незалежних випробуваннях, відповідний ряд розподілу наведено в таблиці 7.1:

Таблиця 7.1 Ряд біномного закону розподілу

X	0	1	2	...	n
$P(X)$	$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	$C_n^n p^n q^0$

Закон розподілу називається біномний, оскільки при перевірці умови нормування використовується формула біному Ньютона:

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1.$$

Основні числові характеристики біномного закону розподілу

1. *Математичне сподівання числа появ події в n незалежних випробуваннях, тобто $M(X)$, дорівнює добутку числа випробувань на ймовірність появи події в кожному випробуванні:* $M(X)=np$.

Доведення. Нехай X_i $(i=1\ldots n)$ — число появ події в $i-$му випробуванні, X — загальне число появ події в n незалежних випробуваннях. Тоді $X=X_1+X_2+\cdots+X_n$. Згідно наслідку властивості 3 математичного сподівання одержимо: $M(X)=M(X_1)+M(X_2)+\cdots+M(X_n)$. Так як $M(X_i)$ $(i=1\ldots n)$ — математичне сподівання числа появ події A в $i-$му випробуванні, а математичне сподівання числа появ події A в одному випробуванні дорівнює p, де p – ймовірність події A, то $M(X)=p+p+\cdots+p=np$. *Властивість доведена.*

2. *Дисперсія числа появ події в n незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність p появи події стала, дорівнює добутку числа випробувань на ймовірність появи і непояви події в кожному випробуванні:* $D(X)=npq$.

Доведення. Нехай X_i $(i=1\ldots n)$ – число появ події в $i-$му випробуванні, X — загальне число появ події в n незалежних випробуваннях. Тоді $X=X_1+X_2+\cdots+X_n$. Згідно 4-ї властивості дисперсії одержимо: $D(X)=D(X_1)+D(X_2)+\cdots+D(X_n)$. Так як $D(X_i)=M(X_i^2)-[M(X_i)]^2$ $(i=1\ldots n)$; $M(X_i^2)=1^2\cdot p+0\cdot q=p$, а $M(X_i)=p$ – математичне сподівання числа появ події в $i-$му випробуванні, тоді $D(X_i)=p-p^2=p(1-p)=pq$. Отже $D(X)=pq+pq+\cdots+pq=npq$. *Властивість доведена.*

Наслідок. Середньоквадратичне відхилення для біномного розподілу визначається за формулою

$$\sigma(X)=\sqrt{npq}. \tag{7.2}$$

Приклад 7.1. У партії однотипних деталей стандартні становлять 95%. Навмання з партії беруть 400 деталей. Визначити $M(X)$, $D(X)$ та $\sigma(X)$ для дискретної випадкової величини X — появи числа стандартних деталей серед 400 навмання взятих.

◀ Цілочислова випадкова величина X має біномний закон розподілу ймовірностей, яка може набувати значення $X = k = 0,1,2,\ldots,400$.

Імовірності можливих значень можна обчислити за формулою Бернуллі: $P_k = P(X = k) = C_{400}^k p^k q^{400-k}$, де $p = 0{,}95$ — імовірність появи стандартної деталі, $q = 1 - p = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$ — ймовірність появи нестандартної деталі.

Згідно формул обчислення числових характеристик біномного розподілу, отримаємо: $M(X) = np = 400 \cdot 0{,}95 = 380$; $D(X) = npq = 400 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}05 = 19$ та $\sigma(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{19} \approx 4{,}36$. ▶

Геометричний закон розподілу

Нехай проводяться незалежні випробування, в кожному з яких ймовірність появи події A дорівнює p, і непояви — $q = 1 - p$. Випадкова величина $X=k$ — кількість випробувань до появи події A в даній серії випробуваннь. Нехай у $k-1$ випробуваннях подія A не відбулася, в $k-$му випробуванні з'явилася. За теоремою множення ймовірностей незалежних подій будемо мати $P(X = k) = q^{k-1}p$. Покладаючи $k = 1, 2, 3, \ldots$ одержимо ряд $p, qp, q^2 p, \ldots, q^{k-1} p, \ldots$ (геометричну прогресію).

Означення 7.2. Цілочислова випадкова величина X має *геометричний закон розподілу*, якщо ймовірність її можливих значень обчислюється за формулою

$$P(X = k) = pq^{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{7.3}$$

де $p = P(A)$ – ймовірність появи події A в кожному випробуванні, $q = 1 - p$, $X=k$ – кількість випробувань до появи події A в серії незалежних повторних випробуваннях.

Таблиця 7.2 Ряд геометричного закону розподілу

X	1	2	3	...	k	...
$P(X)$	p	qp	$q^2 p$	...	$q^{k-1} p$	...

При перевірці умови нормування використовується формула суми нескінчено спадної геометричної прогресії, тому й закон називають геометричним:

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1} = p(1 + q + q^2 + +q^n + \ldots) = p\frac{1}{1-q} = p\frac{1}{p} = 1.$$

Основні числові характеристики геометричного закону розподілу:

$$M(X) = \frac{1}{p}; \quad D(X) = \frac{q}{p^2}; \quad \sigma(X) = \frac{\sqrt{q}}{p}. \tag{7.4}$$

Приклад 7.2. Спортсмен стріляє зі спортивної рушниці по одній і тій самій мішені. Ймовірність влучити в мішень при одному пострілі є величиною сталою і дорівнює 0,8. Стрільба по мішені ведеться до першого влучення. Записати закон розподілу дискретної випадкової величини X — числа витрачених спортсменом набоїв та визначити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

◀ Випадкова величина X є цілочисловою, з геометричним законом розподілу. За умовою задачі $p=0{,}8$; $q=0{,}2$. Тоді, згідно формули (7.3), запишемо ряд розподілу:

X	1	2	3	...	k	...
$P(X)$	0,8	0,16	0,032	...	$q^{k-1}p$	...

Обчислимо числові характеристики за формулами (7.4). Одержимо:

$$M(X)=\frac{1}{p}=\frac{1}{0{,}8}=\frac{5}{4};\quad D(X)=\frac{q}{p^2}=\frac{0{,}2}{0{,}64}=\frac{5}{16};\quad \sigma(X)=\sqrt{\frac{5}{16}}=\frac{\sqrt{5}}{4}.$$ ▶

Гіпергеометричний закон розподілу

Означення 7.3. Цілочислова випадкова величина X має <u>*гіпергеометричний закон розподілу*</u>, якщо ймовірність її можливих значень обчислюється за формулою

$$P(X=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{s-k}}{C_N^s},\ k=0,1,2,\ldots,\min\{M,s\},\ N\ge M,\ N-M\ge s. \tag{7.5}$$

Основні числові характеристики гіпергеометричного закону розподілу:

$$M(X)=\frac{Ms}{N};\quad D(X)=\frac{Ms}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(1-\frac{s-1}{N-1}\right);\quad \sigma(X)=\sqrt{D(X)}. \tag{7.6}$$

Гіпергеометричний закон розподілу ймовірностей відбувається за таких обставин: нехай в партії з N виробів є M стандартних $(N>M)$. З партії вибираються s виробів, причому відібраний виріб перед вибором наступного в партію не повертається. Випадкова величина X — число k стандартних деталей серед s відібраних має гіпергеометричний закон розподілу.

Закон розподілу Пуассона

Означення 7.4. Цілочислова випадкова величина X має <u>*закон розподілу Пуассона*</u>, якщо ймовірність її можливих значень обчислюється за формулою Пуассона:

$$p_k=P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\quad k=0,1,2,\ldots,\quad \lambda=np. \tag{7.7}$$

(Розподілу Пуассона визначає ймовірність того, що в серії з великої кількості $(n\to\infty)$ рідкісних випробувань кількість успіхів набуває значення $k(k=0,1,\ldots)$, $\lambda=np$ — параметр розподілу.)

Основні числові характеристики закону розподілу Пуассона:

$$M(X)=np=\lambda;\quad D(X)=\lambda;\quad \sigma(X)=\sqrt{\lambda}. \tag{7.8}$$

Приклад 7.3. Прилад має 1000 мікроелементів, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що мікроелемент вийде з ладу, є величиною сталою і дорівнює 0,004. Визначити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ дискретної випадкової величини X – числа мікроелементів, що вийдуть із ладу під час роботи приладу.

◄ Випадкова величина X є цілочисловою, що має розподіл Пуассона.

Тоді: $M(X)=np=1000\cdot 0{,}004=4$; $D(X)=\lambda=4$; $\sigma(X)=\sqrt{\lambda}=\sqrt{4}=2$. ►

Основні закони розподілу неперервних випадкових величин та їх числові характеристики

Основні закони розподілу неперервних випадкових величин розрізняють за виглядом їх диференціальних функцій розподілу (щільності ймовірностей) $f(x)$. Найчастіше використовується наступні закони розподілу.

Рівномірний закон розподілу.

Означення 7.5. Розподіл ймовірностей називається *<u>рівномірним</u>*, якщо на інтервалі, якому належать всі можливі значення випадкової величини, функція щільності розподілу дорівнює константі.

Випадкова величина X, розподілена рівномірно на проміжку $[a,b]$, має таку функцію щільності розподілу:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le a; \\ \dfrac{1}{b-a}, & a<x\le b; \\ 0, & x>b. \end{cases} \tag{7.9}$$

Функція розподілу ймовірностей має вигляд

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b; \\ 1, & x>b. \end{cases} \tag{7.10}$$

Числові характеристики рівномірного закону:

$$M(X)=\frac{a+b}{2};\quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12};\quad \sigma(X)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \tag{7.11}$$

Графіки диференціальної та інтегральної функцій рівномірного розподілу зображені на рисунку 7.1.

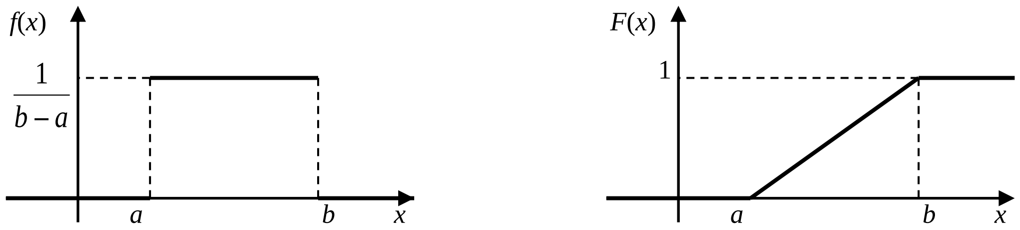

Рис. 7.1

Нормальний закон розподілу

Означення 7.6. *Нормально розподіленою з параметрами* a *та* σ називається випадкова величина X, функція щільності розподілу якої дорівнює:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (7.12)$$

де $-\infty<x<+\infty,\ -\infty<a<+\infty,\ \sigma>0$.

Підпорядкування випадкової величини X нормальному закону розподілу з параметрами a та σ позначають $N(a;\sigma)$.

Означення 7.7. Графік функції щільності нормального розподілу називають *кривою Гауса або нормальною кривою*.

Параметри a та σ впливають на форму кривої розподілу: величина a задає положення максимуму, а σ визначає «ширину» кривої та максимальне значення $f(x)$. Графік функції $f(x)$ симетричний відносно прямої $x=a$; $f(x)$ має максимум в точці $\left(a,\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$.

Інтегральна функція нормального закону розподілу має вигляд

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt. \qquad (7.13)$$

Числові характеристики нормального закону розподілу:

$M(X)=a$ та $D(X)=\sigma^2$, де a та σ — параметри розподілу.

Означення 7.8. Розподіл $N(0;1)$ називають *стандартним нормальним розподілом*. В цьому випадку

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt, \qquad -\infty<x<+\infty.$$

Справедлива формула: $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 0{,}5+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 0{,}5+\Phi(x)$, де

$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ — функція Лапласа.

Твердження 7.1 *Ймовірність того, що нормально розподілена випадкова величина* X з параметрами a та σ *прийме значення на проміжку* (α,β) *визначається за формулою:*

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), \qquad (7.14)$$

Ймовірність заданого відхилення визначається за формулою:

$$P(|X - a| < \delta) = P(a - \delta < X < a + \delta) = \Phi\left(\frac{a + \delta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \delta - a}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \quad (7.15)$$

Правило трьох сигма для нормального закону розподілу

Коли $\delta = 3\sigma$, тоді $P(|X - a| \le 3\sigma) = 2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0{,}49865 = 0{,}9973$.

Звідси випливає:

$$P(|X - a| > 3\sigma) = 1 - P(|x - a| < 3\sigma) = 1 - 0{,}9973 = 0{,}0027 .$$

Тобто, ймовірність того, що внаслідок проведення експерименту випадкова величина X, яка має розподіл $N(a;\sigma)$, не потрапить в проміжок $[a - 3\sigma; a + 3\sigma]$, дорівнює 0,0027.

Сутність правила 3-х сігма: якщо випадкова величина розподілена нормально, то абсолютна величина її відхилення від математичного сподівання не перевищить потроєного середньоквадратичного відхилення.

Приклад 7.4. Відомо, що випадкова величина X має закон розподілу $N(-4;2)$. Записати вирази для $f(x)$, $F(x)$ і побудувати їх графіки. Обчислити $P(-6 < x < 3)$ та $P(|x + 4| < 4)$.

◀ Згідно формул (7.12), (7.13), враховуючи, що параметри розподілу $a = -4$ та $\sigma = 2$, отримаємо: $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+4)^2}{8}}$, $-\infty < x < \infty$; $F(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x+4)^2}{8}} dx.$

Графіки $f(x)$, $F(x)$ наведені на рисунках 7.2 та 7.3.

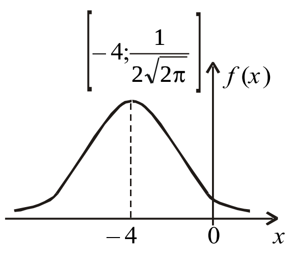

Рис. 7.2

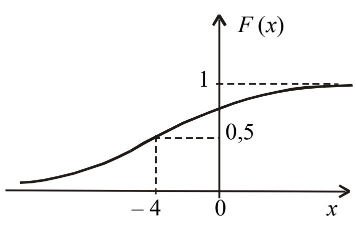

Рис. 7.3

Використовуючи формули (7.14), (7.15), обчислюємо ймовірності:

1) $P(-6 < X < 3) = \Phi\left(\frac{3-(-4)}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-6-(-4)}{2}\right) = \Phi\left(\frac{3+4}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-6+4}{2}\right) =$

$= \Phi(3{,}5) - \Phi(-1) = \Phi(3{,}5) + \Phi(1) = 0{,}4993 + 0{,}3413 = 0{,}8411.$

2) $P(|x + 4| < 4) = 2\Phi\left(\frac{4}{2}\right) = 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}9544.$ ▶

Тема 8. **Поняття про закон великих чисел**

Нерівність Чебишова.

Математичні закони теорії ймовірності одержані внаслідок формалізації реальних статистичних закономірностей, що притаманні масовим випадковим подіям. Під час спостереження масових однорідних випадкових подій у них виявляються певні закономірності типу стабільності. Так, у разі великого числа проведених експериментів, відносна частота події $W(A)$ виявляє стабільність і за ймовірністю наближається до ймовірності $P(A)$; середнє арифметичне для випадкової величини наближається за ймовірністю до її математичного сподівання.

Усі ці явища об’єднуються під спільною назвою *закону великих чисел*, який можна сформулювати так: у разі великого числа експериментів, що здійснюються для вивчення певної випадкової величини, середній їх результат практично перестає бути випадковим і може передбачатися з великою надійністю.

Для доведення цих теорем використовується нерівність Чебишова. Сформулюємо теорему

Теорема 8.1. *Нехай X — випадкова величина, яка може приймати тільки невід’ємні значення $(X \geq 0)$ і $\alpha > 0$, тоді $P(X \geq \alpha) \leq \frac{1}{\alpha} M(X)$.*

Нехай випадкова величина X має математичне сподівання $M(X)$ і стандартне відхилення σ. Закон розподілу випадкової величини X не заданий, але оцінити ймовірність відхилення значення випадкової величини від математичного сподівання $M(X)$ дає змогу така теорема:

Теорема 8.2. *Ймовірність того, що відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання за абсолютною величиною менше, ніж довільне $\varepsilon > 0$, не менша ніж $1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$, тобто*

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \qquad (8.1)$$

Нерівність (8.1) називається — <u>*нерівністю*</u> <u>*Чебишова*</u>.

Доведення. Розглянемо два взаємновиключаючі випадки, а саме: $|X - M(X)| < \varepsilon$ та $|X - M(X)| \geq \varepsilon$. Згідно умови нормування ймовірностей маємо:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) + P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) = 1. \qquad (*)$$

Для оцінки другого доданка в лівій частині останньої рівності використаємо те, що обидві величини, які порівнюються під знаком ймовірності додатні. Якщо $|X - M(X)| \geq \varepsilon$, то і $(X - M(X))^2 \geq \varepsilon^2$ і ймовірності реалізації обох співвідношень однакові, тобто $P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) = P((X - M(X))^2 \geq \varepsilon^2)$. Скористаємося теоремою 8.1, взявши замість величини X величну $(X - M(X))^2$, а замість α — величину ε^2.

Отримаємо: $P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) = P((X - M(X))^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{M[(X - M(X))^2]}{\varepsilon^2} = \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$. Тоді, з рівності (*) будемо мати $P(|X - M(X)| < \varepsilon) = 1 - P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$.

Теорема доведена.

Закон великих чисел. Теорема Чебишова. Теорема Бернуллі

Закон великих чисел об'єднує кілька теорем, у кожній з яких за певних умов виявляється факт наближення середніх характеристик під час проведення великої кількості експериментів до певних невипадкових сталих величин. Наведемо з великої сукупності теорем дві: теорему Чебишова і теорему Бернуллі.

Нехай випадкові величини X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ попарно незалежні. Нехай усі X_i мають однакові математичні сподівання a та однакові обмежені дисперсії σ^2.

У*середнену випадкову величину* визначають таким чином: $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Математичне сподівання усередненої випадкової величини $M(\overline{X}) = a$. Дисперсія усередненої випадкової величини: $D(\overline{X}) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{\sigma^2}{n}$, тобто дисперсія усередненої випадкової величини в n разів менша від дисперсії окремої випадкової величини. Сформулюємо теорему Чебишова.

Теорема 8.3. (Теорема Чебишова) *Нехай* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *— послідовність попарно незалежних випадкових величин, які мають обмежені дисперсії* $D(X_i) \leq C$, *де C — деяке число незалежне від n,* $(i = \overline{1, n})$. *Тоді для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *справедлива рівність*

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right) = 1$$

або

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Доведення. Розглянемо усереднену випадкову величину. $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. $D(\overline{X}) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} D(X_i)}{n^2} \leq \frac{nC}{n^2} = \frac{C}{n}$, тобто $D(\overline{X}) \leq \frac{C}{n}$, так як за умовою теореми $D(X_i) \leq C$. Застосуємо до випадкової величини $\overline{X}$ нерівність Чебишова: $P(|\overline{X} - M(\overline{X})| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(\overline{X})}{\varepsilon^2}$ та перейдемо до границі при $n \to \infty$ і врахуємо, що

$D(\overline{X}) \le \frac{C}{n}$. Отримаємо: $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{X} - M(\overline{X})\right| < \varepsilon\right) \ge \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{D(\overline{X})}{\varepsilon^2}\right) \ge \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}\right) = 1$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{X} - M(\overline{X})\right| < \varepsilon\right) \ge 1$.

Оскільки ймовірність не може перевищувати одиницю будемо мати $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{X} - M(\overline{X})\right| < \varepsilon\right) = 1$. Звідси , одержимо $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right) = 1$. Для протилежного випадку $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| \ge \varepsilon\right) = 0$. *Теорема доведена.*

Зауваження (частинний випадок теореми Чебишова). *Якщо* $X_1, X_2, ..., X_n$ *— послідовність попарно незалежних випадкових величин, які мають однакове математичне сподівання* a *і якщо їх дисперсії обмежені* $D(X_i) \le C, (i = \overline{1,n})$, *де C — деяке число незалежне від n, тоді для будь якого* $\varepsilon > 0$ *справедлива рівність* $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| < \varepsilon\right) = 1$.

Зміст теореми Чебишова полягає в наступному: в той час як окрема випадкова величина може приймати значення, дуже далекі від свого математичного сподівання, середнє арифметичне великої кількості випадкових величин з ймовірністю близькою до одиниці приймає значення, які мало відрізняються від середнього арифметичного їх математичних сподівань.

Теорема 8.4. (Теорема Бернуллі) *Якщо* m *— кількість успіхів у n незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність появи успіху стала й дорівнює p, то для довільного* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1, \text{ або } \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \ge \varepsilon\right) = 0.$$

Доведення. Нехай X_i $(i = 1...n)$ дискретна випадкова величина — число появ події в $i-$му випробуванні. X_i приймає тільки два значення: 1 (подія відбулася) і 0 (подія не відбулася). Так як випробування незалежні, то попарно незалежні величини $X_1, X_2, ..., X_n$. Дисперсії $D(X_i) = pq$. Оскільки $p + q = 1$, то максимальне значення добуток pq приймає коли $p = q$, тобто $p = q = \frac{1}{2}$. Звідси $pq \le \frac{1}{4}$, а це значить, що дисперсії обмежені числом $C = \frac{1}{4}$. Всі умови теореми Чебишова виконані. Застосуємо її частинний випадок:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| < \varepsilon\right) = 1, \qquad (**)$$

де $a = M(X_i)$. $\sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = m$ — число появ події в n незалежних випробуваннях. Тому рівність (**) набуде вигляду $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| < \varepsilon\right) = \lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1$. *Теорема доведена.*

Теорема Бернуллі дає можливість зробити *висновок*: з ймовірністю, як завгодно близькою до одиниці, можна стверджувати, що при кількості випробовувань $n \to \infty$ відносна частота $W(A) = \frac{m}{n}$ появи події в одному випробовуванні як завгодно мало відрізняється від ймовірності появи події. Тобто статистична величина $W(A) = \frac{m}{n}$ володіє властивістю стійкості.

Приклад 8.1 Випадкова величина X має закон розподілу $N(-2;4)$. Скориставшись нерівністю Чебишова, оцінити ймовірність $|X - a| < \varepsilon$, якщо $\varepsilon = 4\sigma$.

◀ Оскільки $a = -2$, $\sigma = 4$, $D(X) = 16$, то згідно з (1) маємо: $P(|X + 2| < 16) \geq 1 - \frac{16}{256} = 1 - 0.0625 = 0.9375$.▶

Означення 8.1. Кажуть, що послідовність випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n$, які мають математичні сподівання $M(X_1), M(X_2), ..., M(X_n)$ *<u>підпорядкована</u> <u>закону</u> <u>великих</u> <u>чисел</u>*, якщо середнє арифметичне цих величин $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ при $n \to \infty$ з ймовірністю, яка необмежено наближається до одиниці, як завгодно мало (менше ніж $\varepsilon > 0$) відрізняється від середнього арифметичного їх математичних сподівань, тобто при $n \to \infty$

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Теоретичні запитання до розділу II

1. Означення випадкової величини.
2. Означення дискретної та неперервної випадкової величини.
3. Що називається законом розподілу випадкової величини.
4. Умова нормування для дискретної випадкової величини.
5. Що називається многокутником розподілу?
6. Що називається інтегральною функцією розподілу випадкової величини?
7. Довести, що $F(x_2) \geq F(x_1)$ при $x_2 \geq x_1$.
8. Чому дорівнює $F(-\infty)$, $F(\infty)$?
9. Чому дорівнює $P(\alpha < X < \beta)$?
10. Означення щільності ймовірностей неперервної випадкової величини X.
11. Чому дорівнює $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$?
12. Якщо $X \in [a,b]$, то чому дорівнює $\int_{a}^{b} f(x)dx$, $\int_{a}^{x} f(x)dx$?
13. Властивості інтегральної функції розподілу випадкової величини.
14. Властивості диференціальної функції розподілу.

15. Записати умову нормування неперервної випадкової величини?
16. За якими формулами обчислюється, ймовірність того, що неперервна випадкова величина набуде будь-якого значення з проміжку (a,b)?
17. Записати формули, які виражають зв'язок між інтегральною та диференціальною функціями розподілу неперервної випадкової величини?
18. Які існують числові характеристики випадкових величин?
19. Що називається математичним сподіванням випадкової величини?
20. Формули для обчислення математичного сподівання дискретної та неперервної випадкових величин.
21. Чому дорівнює $M(C)$, де C — стала величина?
22. Якщо $A,\ B$ — сталі величини, то чому дорівнює $M(AX+B)$? Довести.
23. Що характеризує математичне сподівання випадкової величини?
24. Властивості математичного сподівання.
25. Що називають дисперсією випадкової величини?
26. Що характеризує дисперсія випадкової величини?
27. Чому дорівнює $D(C)$, де C — стала величина?
28. Чому дорівнює $D(CX)$, де C — стала величина?
29. Записати робочу формулу для обчислення дисперсії.
30. Якщо $A,\ B$ — сталі, то чому дорівнює $D(AX+B)$?
31. Що називають середнім квадратичним відхиленям випадкової величини?
32. Властивості дисперсії.
33. Біномний закон розподілу дискретної випадкової величини.
34. Числові характеристики біномного закону розподілу.
35. Закон розподілу Пуассона та його числові характеристики.
36. Геометричний закон розподілу дискретної випадкової величини.
37. Числові характеристики для геометричного закону розподілу.
38. Дати означення гіпергеометричного закону розподілу дискретної випадкової величини.
39. Як обчислюються числові характеристики для гіпергеометричного закону розподілу?
40. Що називають рівномірним законом розподілу неперервної випадкової величини?
41. Записати інтегральну та диференціальну функції рівномірно розподіленої випадкової величини.
42. Числові характеристики для рівномірного закону розподілу.
43. Довести справедливість формул (7.11).
44. Дати визначення нормального закону розподілу неперервної випадкової величини.
45. Записати інтегральну та диференціальну функції розподілу випадкової величини X, яка підпорядкована закону $N(a;\sigma)$.
46. Як впливають параметри a та σ на форму кривої Гауса (нормальної кривої)?
47. Що називають стандартним нормальним законом розподілу?
48. Записати функції $f(x)$ та $F(x)$ випадкової величини X, яка підпорядкована стандартному нормальному розподілу.

49. Чому дорівнюють ймовірності $P(\alpha < X < \beta)$ та $P(|X-a| < \delta)$ для нормального закону розподілу?
50. Правило трьох сігма для нормального закону. Сутність правила 3-х сігма.
51. Записати та довести нерівність Чебишова.
52. Сформулювати та довести теорему Чебишова.
53. Сформулювати частинний випадок теореми Чебишова.
54. В чому полягає зміст теореми Чебишова?
55. Сформулювати та довести теорему Бернуллі.
56. В якому випадку послідовність випадкових величин підпорядкована закону великих чисел?

Вправи до розділу II

1. Задано ряд розподілу випадкової величини X — числа знаків, написаних протягом 5-ти хвилин певною групою учнів четвертих класів.

X	230	254	262	274	281	282	285	302	307	308
p_k	0,075	0,125	0,025	0,075	0,175	0,250	0,025	0,10	0,10	0,05

Знайти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ дискретної випадкової величини. Побудувати імовірнісний многокутник.

2. Випадкова величина X задана таблицею розподілу

$X = x_k$	2	5	8	9
p_k	0,1	0,4	p_3	0,2

Знайти p_3 $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Побудувати графіки закону та функції розподілу.

3. За заданим законом розподілу дискретної випадкової величини X:

$X = x_k$	– 4	–1	2	5	8	10
p_k	a	$1{,}5a$	$0{,}5a$	$3{,}5a$	$2{,}5a$	a

Знайти a та обчислити: $P(X<2)$, $P(-4<X<8)$. Побудувати функцію розподілу ймовірностей і накреслити її графік.

4. За заданою функцією розподілу ймовірностей

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, & x \le -4; \\ 0{,}1, & -4 < x \le -1; \\ 0{,}3, & -1 < x \le 2; \\ 0{,}5, & 2 < x \le 5; \\ 0{,}8, & 5 < x \le 8; \\ 1, & x > 8. \end{cases}$$

Обчислити: $P(-4 < X \le 2)$; $P(X > 2)$; $P(X \ge 5)$; $P(X \le 2)$.

5. Троє складають іспит із теорії ймовірностей. Імовірність того, що перший студент складе екзамен, становить 0,9, для другого та третього студентів ця

ймовірність дорівнює відповідно 0,85; 0,8. Побудувати закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X — числа студентів, які складуть іспит з теорії ймовірностей, побудувати $F(x)$ і накреслити її графік.

6. У першому ящику міститься 7 стандартних і 3 браковані деталі, у другому — 6 стандартних і 4 браковані. Навмання з першого ящика беруть чотири деталі, а з другого — одну. Побудувати закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X — появи числа стандартних деталей серед чотирьох навмання взятих — і побудувати $F(x)$.

7. Закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X задано функцією

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \le -6; \\ 0{,}1, & \text{якщо} \quad -6 < x \le -4; \\ 0{,}3, & \text{якщо} \quad -4 < x \le 1; \\ 0{,}4, & \text{якщо} \quad 1 < x \le 3; \\ 0{,}6, & \text{якщо} \quad 3 < x \le 5; \\ 0{,}8, & \text{якщо} \quad 5 < x \le 8; \\ 1, & \text{якщо} \quad x > 8. \end{cases}$$

Обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

8. Садівник восени посадив три саджанці: одну яблуню, одну грушу й одну вишню. Імовірність того, що саджанець яблуні весною прийметься, дорівнює 0,7. Для саджанців груші та вишні ця ймовірність становить відповідно 0,9 і 0,8. Обчислити математичне сподівання та дисперсію числа саджанців, які приймуться весною. Чому дорівнює $Mo(X)$?

9. Четверо студентів складають іспит з теорії ймовірностей. Імовірність того, що перший із них складе іспит, дорівнює 0,9; для другого і третього ця ймовірність дорівнює 0,8, а для четвертого — 0,7. Побудувати закон розподілу величини X — числа студентів, котрі складуть зазначений іспит, і обчислити $M(X)$, $\sigma(X)$. Знайти моду.

10. Імовірність того, що футболіст реалізує одинадцятиметровий штрафний удар дорівнює 0,9. Футболіст виконав три такі удари. Побудувати закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини Х — числа реалізованих штрафних. Обчислити $M(X)$, $D(X)$ та $\sigma(X)$.

11. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X — кількості попадань м'ячем у кошик при двох киданнях, якщо ймовірність попадання дорівнює 0,4. Знати математичне сподівання, дисперсію та середньоквадратичне відхилення.

12. Монета підкидається до першої появи герба. Знайти середню кількість підкидань.

13. Стріляють у ціль до першого влучення. Влучення при різних пострілах — незалежні події, ймовірність влучення при кожному пострілі $p = 0{,}85$. Нехай випадкова величина X — число зроблених пострілів. Знайти розподіл випадкової

величини X, математичне сподівання $M(X)$, $D(X)$ та $\sigma(X)$.

14. Ймовірність влучення в мішень дорівнює 0,5. Стрілок, маючи в запасі 6 патронів, робить постріли по мішені до першого попадання або до використання усіх патронів. Скласти таблицю розподілу, побудувати імовірнісний многокутник та визначити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ дискретної випадкової величини X — числа використаних набоїв.

15. Серед 12 однотипних телевізорів 8 відповідають вимогам стандарту, а решта — ні. Побудувати закони розподілу дискретної випадкової величини X — числа телевізорів, що відповідають вимогам стандарту серед s навмання взятих і обчислити $M(X)$, $D(X)$, якщо: 1) s=4; 2) s=6; 3) s=8; 4) s=6.

16. Телефонна станція обслуговує 1000 абонентів. Ймовірність того, що протягом години абонент розмовлятиме по телефону, дорівнює в середньому 0,002. Знайти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ дискретної випадкової величини X — числа одночасних розмов протягом години. Яка ймовірність того, що протягом години одночасно розмовлятимуть по телефону: 1) 5 абонентів; 2) не більше 5?

17. За заданою функцією розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини X

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -3;\\ \dfrac{\sqrt{x+3}}{2}, & -3<x\le 1;\\ 1, & x>1\end{cases}$$

побудувати її графік і обчислити $P(-2<X<0)$.

18. Задано функцію розподілу ймовірностей

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \sin x, & 0<x\le \dfrac{\pi}{2};\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Знайти $f(x)$. Побудувати графіки $F(x)$, $f(x)$ і обчислити $P\left(\frac{\pi}{6}<X<\frac{\pi}{3}\right)$.

19. Задана щільність розподілу випадкової величини $f(x)=\dfrac{2C}{1+x^2}$ яка визначена на всій дійсній осі. Знайти константу C.

20. За заданим законом розподілу ймовірностей

x_i	–2	2	4	8	10
p_i	0,1	$2a$	0,3	0,1	3a

обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $Mo(X)$.

21. Дисперсія випадкової величини X рівна 5. Знайти дисперсію наступних величин а) $X-1$; б) $-2X$; в) $3X+6$; г) $7X-2$; д) $5-3X$.

22. Дисперсія випадкової величини X рівна 9. Знайти дисперсію наступних величин а) $2X-3$; б) $2X+7$; в) $3X-1$; г) $1-4X$

23. Математичне сподівання та дисперсія випадкової величини X дорівнюють відповідно 2 та 10. Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини $Y=2X+5$.

24. Задано $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{1}{2}(1-\cos x), & 0<x\le\pi;\\ 1, & x>\pi.\end{cases}$ Знайти $M(X)$, $D(X)$.

25. Задано $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{2}{7}\cos\frac{2}{7}x, & 0<x\le\frac{7}{4}\pi;\\ 0, & x>\frac{7}{4}\pi.\end{cases}$ Знайти $M(X)$, $D(X)$.

26. Обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ та записати $F(x)$; знайти $P(\alpha<X<\beta)$, якщо задані диференціальна функція розподілу $f(x)$ неперервної випадкової величини X та значення для α β.

1) $f(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x\le 0;\\ \frac{2x}{9}, & \text{якщо} \quad 0<x\le 3;\\ 0, & \text{якщо} \quad x>3;\end{cases}$ $\qquad \alpha=0, \quad \beta=2$;

2) $f(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x\le 0;\\ 2\cos x, & \text{якщо} \quad 0<x\le\frac{\pi}{6};\\ 0, & \text{якщо} \quad x>\frac{\pi}{6}.\end{cases}$ $\qquad \alpha=\frac{\pi}{12}, \quad \beta=\frac{\pi}{6}$.

27. Задано $f(x)=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{\frac{(x+2)^2}{32}}$, $-\infty<x<\infty$. Знайти ймовірність того, що випадкова величина відхилиться від свого математичного сподівання на величину більшу, ніж 36.

28. Закон розподілу неперервної випадкової величини X задано формулою

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x\le 0;\\ \frac{x^2}{9}, & \text{якщо} \quad 0<x\le 3;\\ 1, & \text{якщо} \quad x>3.\end{cases}$$

Знайти $f(x)$ і побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$. Обчислити $P(0<X<2)$

29. Закон розподілу неперервної випадкової величини X задано формулою

$$F(x)=\begin{cases}0, & якщо \quad x\le 0;\\ 2\sin x, & якщо \quad 0<x\le\dfrac{\pi}{6};\\ 1, & якщо \quad x>\dfrac{\pi}{6}.\end{cases}$$ Знайти $f(x)$ і побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$. Обчислити $P(\frac{\pi}{12}<X<\frac{\pi}{6})$

30. Диференціальна функція розподілу випадкової величини x має вигляд

$$f(x)=\begin{cases}0, & якщо \quad x\le 1;\\ x-\dfrac{1}{2}, & якщо \quad 1<x\le 2;\\ 0, & якщо \quad x>2.\end{cases}$$

31. Знайти $F(x)$ і побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$. Обчислити $P(1<X<1{,}5)$, $M(X)$, $D(X)$, та $\sigma(X)$.

32. Диференціальна функція розподілу випадкової величини x має вигляд

$$f(x)=\begin{cases}0, & якщо \quad x\le 1;\\ \sin x, & якщо \quad 0<x\le\dfrac{\pi}{2};\\ 0, & якщо \quad x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Знайти $F(x)$ і побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$. Обчислити $P(\frac{\pi}{6}<X<\frac{\pi}{2})$, $M(X)$, $D(X)$, та $\sigma(X)$.

33. Випадкова величина X розподілена рівномірно на інтервалі $(a;b)$. Записати диференційну $f(x)$ та інтегральну $F(x)$ функції, знайти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, якщо 1) $a=1, \quad b=6$; 2) $a=2 \quad b=8$.

34. Нормальна розподілена випадкова величина X має математичне сподівання $M(X)$ та дисперсію $D(X)$. Записати диференційну та інтегральну функції розподілу X, якщо: 1) $M(X)=3, \quad D(X)=4$; 2) $M(X)=0, \quad D(X)=16$.

35. Неперервна випадкова величина X має розподіл $N(a;\sigma)$. Знайти $P(\alpha<X<\beta)$, якщо 1) $a=10, \quad \sigma=4, \quad \alpha=2, \quad \beta=14$; 2) $a=20, \ \sigma=5, \ \alpha=15, \ \beta=25$.

36. Задано $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+3)^2}{2}}, \quad -\infty<x<\infty$. Обчислити $P(-4<x<2), \quad P(|x+3|<2)$.

37. Випадкова величина X має закон розподілу $N(-4;5)$. Знайти точки перегину кривої розподілу $f(x)$. Випадкова величина X має закон розподілу $N(0;6)$. При якому значенні σ імовірність $P(2<x<4)$ буде найбільшою?

38. Випадкова величина X має закон розподілу $N(4;6)$. Знайти таке значення σ, щоб $P(0<x<8)=0{,}9906$.

РОЗДІЛ ІІІ. Елементи математичної статистики

Тема 9. Основні поняття математичної статистики

Предмет і задачі математичної статистики

Розглянемо деякі поняття, які використовуються в статистиці.

Означення 9.1. *Математична статистика* — це наука, яка займається збором, групуванням та аналізом експериментальних даних з метою вивчення закономірностей випадкових явищ.

Основна її задача полягає в тому, щоб на основі даних, отриманих при вивченні певної підмножини, зробити висновки про властивості всієї множини однорідних об'єктів.

Предмет математичної статистики полягає в розробці методів збору та обробки статистичних даних для одержання наукових та практичних висновків, які базуються на імовірнісних моделях.

Означення 9.2. *Статистичні дані* — це відомості про те, які значення набув той чи інший показник із статистичної сукупності, який цікавить дослідника. Показники бувають *кількісні і якісні*.

Означення 9.3. *Кількісними називаються* показники, значення яких виражаються числами. Кількісні ознаки поділяють на *дискретні* та *неперервні*

Означення 9.4. *Якісними називаються* показники, які характеризуються деякою властивістю або станом показника.

Означення 9.5. *Генеральною сукупністю* називають всю сукупність елементів (об'єктів), які досліджуються. Число об'єктів, які становлять генеральну сукупність, називають *об'ємом генеральної сукупності*.

Розрізняють два види статистичних спостережень: *суцільне і вибіркове.* Суцільне спостереження ознаки у всієї генеральної сукупності здебільшого є нереальним. Нереальність зумовлена обмеженістю коштів і строків на дослідження. Окрім цього, виявлення деяких ознак може супроводжуватись руйнуванням об'єкта.

Означення 9.6. *Вибірковою сукупністю* або *вибіркою***,** називають сукупність випадково вибраних із генеральної сукупності елементів (об'єктів) для дослідження її якісної чи кількісної ознаки. Кількість об'єктів у вибірці становить *об'єм вибірки*.

Дані спостережень з вибірки поширюються на властивості ознаки генеральної сукупності. Методологія такого узагальнення становить зміст *теорії статистичного висновку.*

В залежності від об'єму генеральної сукупності застосовують *повторну* і *безповторну* вибірки. У випадку *повторної вибірки* кожний відібраний об'єкт після дослідження повертається в генеральну сукупність і має всі шанси потрапити до вибірки знову. Така вибірка застосовується в тих випадках, коли генеральна сукупність має невеликий об'єм. Здебільшого використовують

безповторну вибірку, при якій після дослідження відібраний об'єкт не повертається до генеральної **сукупності**.

Основна вимога, що висувається до вибірки — вона повинна бути *репрезентативною* (від лат. representatio — наочне зображення), тобто правильно відображати ті властивості генеральної сукупності, що вивчаються. Вибірка є *репрезентативною,* якщо всі об'єкти генеральної сукупності мали однакову ймовірність потрапити у вибірку

Розглянемо деякі зі способів відбору, застосування яких дозволяє сподіватися на репрезентативний результат.

1. *Простий випадковий відбір* — з усієї генеральної сукупності, без розбиття її на частини, навмання відбирається наперед визначена кількість об'єктів для дослідження. Простий відбір може бути як повторним, так і безповторним.

2. *Механічний відбір***.** При цьому способі відбору усю генеральну сукупність спочатку ділять на частини, кількість яких збігається з об'ємом майбутньої вибірки. З кожної частини відбирають по одному об'єкту. На практиці це здійснюється відбиранням кожного десятого чи кожного двадцятого елемента.

3. *Типовий* відбір — це відбір, при якому об'єкти для дослідження відбираються з генеральної сукупності, розбитої на різні типові частини, причому кількості відібраних об'єктів з кожної частини повинні бути пропорційні об'ємам цих частин. Використовується, якщо досліджувана ознака зазнає значних відмінностей у різних типових частинах. Наприклад, деталі виготовляються на однакових верстатах групою токарів, серед яких, крім досвідчених спеціалістів високого класу, є кілька учнів. При дослідженні генеральної сукупності на предмет якості деталей (всіх виготовлених деталей) її варто розбити на дві типових частини: деталі виготовлені професіоналами та учнями і відібрати у вибірку кількості, пропорційні об'ємам цих частин.

4. *Серійний* — спосіб відбору, при якому об'єкти для дослідження відбираються цілими серіями, що піддаються суцільному дослідженню. Застосовується, якщо досліджувана ознака не сильно відрізняється в різних серіях.

Поняття варіаційного ряду. Емпірична функція розподілу. Гістограма і полігон частот (відносних частот)

Означення 9.7. Значення ознаки, яка при переході від одного елемента сукупності до другого змінюється (варіюється) називаються *варіантами*.

Для позначення використовують малі латинські букви $x, y, z, \ldots$ або змінні з індексами $x_1, x_2, \ldots$.

Припустимо, що з генеральної сукупності відібрано для дослідження на якусь кількісну ознаку n об'єктів. Нехай величина, що досліджується, дискретна і в результаті вимірювань набула n_1 разів значення x_1, n_2 разів — x_2, ... , n_k разів — значення x_k.

Означення 9.8. Кількості *спостережень* $n_1, n_2, \ldots n_k$, при яких зустрічалися варіанти $x_1, x_2, \ldots, x_k$ називають— *частотами даних варіант*.

Означення 9.9. Порядковий *номер* варіанти, розташованих в порядку зростання, називається *рангом*. Величини $w_i = \frac{n_i}{n}$ — називаються *відносними частотами*, де $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ — об'єм вибірки.

Означення 9.10. Сукупність *варіант* x_i і відповідних їм частот n_i або відносних частот w_i називається *статистичним розподілом вибірки*.

Означення 9.11. Якщо розташувати всі варіанти в зростаючому порядку й зазначити для кожної варіанти відповідну частоту (відносну частоту), то одержимо *дискретний варіаційний ряд для частот* (*відносних частот*) :

Таблиця 9.1. Дискретний варіаційний ряд для частот

Значення ознаки (x_i)	x_1	x_2	…	x_k
Частоти (n_i)	n_1	n_2	...	n_k

У випадку невеликого числа варіант для графічного зображення статистичного розподілу будують *полігон.* На осі абсцис відкладають значення ознаки X, а на осі ординат — відповідну частоту n_X (відносну частоту w_X). Лінію, що з'єднує ці точки, називають *полігоном частот (відносних частот)*.

За даними статистичного розподілу (*варіаційного ряду*) вибірки будується емпірична функція розподілу.

Означення 9.12. *Статистичною* чи *емпіричною функцією* розподілу вибірки називається функція $F^*(x)$, що визначає для кожного значення x відносну частоту події $X < x$, тобто

$$F^*(x) = \frac{1}{n}\sum_{x_i<x} n_i = \sum_{x_i<x} w_i \, . \tag{9.1}$$

Властивості функції $F^*(x)$

1. $0 \le F^*(x) \le 1$;
2. $F^*(x)$ неспадна функція, тобто $F^*(x_2) \ge F^*(x_1)$, якщо $x_2 > x_1$;
3. $F^*(x) = 0$, якщо x не більше за найменшу варіанту, тобто якщо $x \le x_1$;
4. $F^*(x) = 1$, якщо x більше за найбільшу варіанту, тобто якщо $x > x_k$.

За даними розрахунків $F^*(x)$ будується графік інтегральної емпіричної функції розподілу. Емпірична функція розподілу служить для оцінки функції розподілу генеральної сукупності $F(x)$, яку в математичній статистиці називають *теоретичною функцією розподілу*.

Приклад 9.1 В результаті дослідження вибірки за кількісною ознакою отримано такий статистичний розподіл для частот:

x_i	12	15	17	22
n_i	5	9	7	4

Записати статистичний ряд відносних частот, емпіричну функцію розподілу та побудувати її графік.

◀ Знайдемо об’єм вибірки та відносні частоти: $n = \sum_{i=1}^{k} n_i = 25$.

$w_1 = \frac{5}{25} = 0{,}2$, $w_2 = 0{,}36$ $w_3 = 0{,}28$ $w_4 = 0{,}16$. Розподіл відносних частот має вигляд:

x_i	12	15	17	22
w_i	0,2	0,36	0,28	0,16

Додаючи відповідні відносні частоти, отримаємо емпіричну функцію розподілу та будуємо її графік (рис. 9.1):

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad x \le 12 \\ 0{,}2 & \textit{при} \quad 12 < x \le 15 \\ 0{,}56 & \textit{при} \quad 15 < x \le 17 \\ 0{,}84 & \textit{при} \quad 17 < x \le 22 \\ 1 & \textit{при} \quad x > 22 \end{cases}$$

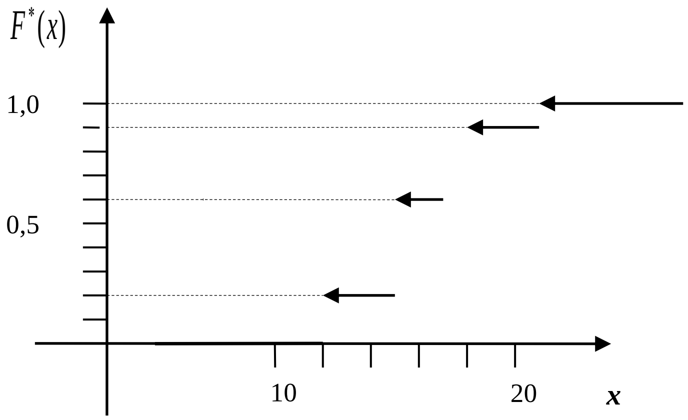

Рис. 9.1 ▶

У випадку, якщо кількість вимірів дуже велика (або ознака є неперервною), то будують інтервальний варіаційний ряд для частот. Тобто, результати вимірів збирають у певні групи, як правило, однакової довжини, яку часто рекомендується визначати за емпіричною формулою Стерджесса:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k},$$

де $k = k(n) = [1 + 3{,}322 \cdot \lg n]$ — кількість класів, n – число одиниць сукупності, $x_{\min}$ і $x_{\max}$ — відповідно найменше і найбільше значення варіант ряду.

Означення 9.13. Різницю $x_{\max} - x_{\min}$ називають *розмахом ознаки* або *розмахом варіаційного ряду*.

До першого і останнього інтервалів групування включають відповідно точки $x_{\min}$ та $x_{\max}$:

1-й інтервал — $[x_{\min}; x_{\min} + h)$; 2-й інтервал — $[x_{\min} + h; x_{\min} + 2h)$;

....

$k-1$ й інтервал — $[x_{\max} - 2h; x_{\max} - h)$; k-й інтервал —$[x_{\max} - h; x_{\max}]$.

Наступним кроком є підрахунок частоти результатів n_i, що потрапляють до певного i-го проміжку $(i = 1,2,\ldots k)$, а також розрахунок відповідних відносних частот (статистичних ймовірностей) $w_i = \frac{n_i}{n}$. Зрозуміло, що $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$, а $\sum_{i=1}^{k} w_i = 1$.

Статистичний ряд результатів дослідження вибірки часто подається у графічному вигляді:

а) полігону частот або відносних частот;

б) гістограми відносних частот — статистичної функції щільності розподілу;

в) статистичної інтегральної функції розподілу.

Означення 9.14. *<u>Полігоном</u> <u>частот</u>* називається ламана лінія, що сполучує точки графіка, координатами яких є середини інтервалів групування X та відповідні їм частоти n_i.

Аналогічно будується і полігон відносних частот. Відмінність полягає лише в тому, що координатами вершин ламаної лінії є точки з координатами (x_i, w_i).

Означення 9.15. *<u>Гістограмою</u> <u>частот</u>* (*<u>відносних</u> <u>частот</u>*) називають ступінчасту фігуру, яка складається з прямокутників з основами h та висотами $\frac{n_i}{h}$ ($\frac{w_i}{h}$). Площа фігури дорівнює об'єму вибірки (одиниці).

Гістограма частот і гістограма відносних частот більш зручні для проведення подальшого вивчення статистичних закономірностей. Із збільшенням кількості вимірювань (об'єму вибірки) можна проводити групування за більш дрібними інтервалами групування. При цьому гістограма відносних частот буде все більше наближатися до графіку густини розподілу ймовірностей досліджуваної випадкової величини.

За даними згрупованого статистичного ряду можна побудувати емпіричну (статистичну) інтегральну функцію розподілу вибірки, згідно з визначенням.

$$F^*(x) = \frac{1}{n}\sum_{x_i<x} n_i \ .$$

Зауваження. При побудові цієї функції можна окремо враховувати частоти всіх наявних варіант, однак при великому об'ємі — це громіздка робота. Тому емпіричну інтегральну функцію розподілу будують також за частотами, що відповідають інтегралам групування.

Приклад 9.2 Для дослідження генеральної сукупності проведена вибірка 55 спостережень. Величина, що досліджувалася при цих спостереженнях, набула таких значень:

17	19	23	18	21	15	16	13	20	18	15
20	14	20	16	14	20	19	15	19	16	19
15	22	21	12	10	21	18	14	14	17	16
13	19	18	20	24	16	20	19	17	18	18
21	17	19	17	13	17	11	18	19	19	17

Подати дану вибірку у вигляді статистичного ряду частот та відносних частот, використовуючи 7 інтервалів групування. Побудувати гістограму відносних частот.

◄ В даній вибірці $x_{\min} = 10$ та $x_{\max} = 24$, отже, при $k = 7$ величина інтервалу $h = 2$. Згрупуємо варіанти по інтервалах групування та зведемо дані в наступну таблицю:

Номер, інтервалу i	Інтервал	Середина інтервалу x_i	Частота n_i	Відносна частота w_i
1	[10; 12)	11	2	0,0364
2	[12; 14)	13	4	0,0727
3	[14; 16)	15	8	0,1455
4	[16; 18)	17	12	0,2182
5	[18; 20)	19	16	0,2909
6	[20; 22)	21	10	0,1818
7	[22; 24]	23	3	0,0545

Побудуємо таблицю, де вкажемо середини інтервалів групування та відповідні відносні частоти і на її основі зобразимо гістограму відносних частот (рис. 9.2).

Середина інтервалу	11	13	15	17	19	21	23
$\frac{w_i}{h}$	0,018	0,036	0,073	0,109	0,145	0,091	0,027

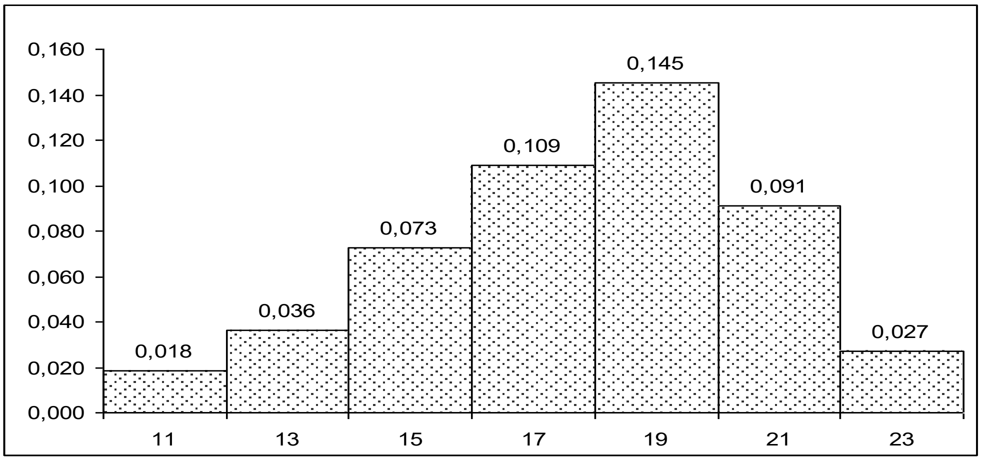

Рис. 9.2 ►

Тема 10. **Точкові та інтервальні оцінки параметрів розподілу**

Поняття статистичного оцінювання

Якщо наперед відомо, що ознака, яка вивчається розподілена в генеральній сукупності нормально, то виникає задача оцінити (знайти наближено) математичне сподівання та середньоквадратичне відхилення, так як ці два параметри цілком визначають нормальний розподіл.

Як правило, відомі лише данні вибірки, наприклад значення $x_1, x_2, \dots x_n$ кількісної ознаки X, отримані в результаті n спостережень. Через ці дані і виражається оцінюваний параметр.

Означення 10.1. Узагальнення властивостей ознак вибірки щодо генеральної сукупності називають <u>*статистичним*</u> <u>*висновком*</u>.

Задачі теорії статистичного висновку умовно поділяють на два класи: *оцінювання* та *перевірка гіпотез*.

Означення 10.2. <u>*Оцінювання*</u> складається з оптимальних методів одержання характеристик розподілу генеральної сукупності на основі даних вибірки.

Поділяють оцінювання на <u>*точкове*</u> та <u>*інтервальне*</u>. *Точкове оцінювання* дає орієнтовне числове значення характеристики розподілу і визначається одним числом. У випадку вибірки малого об'єму точкова оцінка може значно відрізнятися від оцінюваного параметра, тому в даному випадку доцільно користуватися інтервальними оцінками.

<u>*Інтервальне*</u> <u>*оцінювання*</u> вказує на проміжок, у якому з наперед заданою надійністю має перебувати характеристика розподілу і визначається двома числами — кінцями інтервала. Інтервальні оцінки дозволяють встановити точність і надійність оцінок.

Означення 10.3. <u>*Задача*</u> <u>*перевірки*</u> <u>*гіпотез*</u> полягає в формулюванні гіпотез, одержання висновків про їх підтвердження або відхилення на основі даних вибірки.

Точкове оцінювання.

Якщо розглядати $x_1, x_2, \dots x_n$ як незалежні випадкові величини $X_1, X_2, \dots X_n$, то знайти статистичну оцінку означає знайти функцію від випадкових величин, яка і дає наближене значення оцінюваного параметру. Для позначення точкової оцінки використаємо великі букви латинського алфавіту, значення оцінки — малі букви латинського алфавіту, а дійсне значення параметра генеральної сукупності — малою буквою грецькою алфавіту

Точкові оцінки повинні мати властивості, які задовольняють певні вимоги:

1. *Незміщеність* — математичне сподівання оцінки дорівнює оцінюваному параметру генеральної сукупності:

$$M(L) = \lambda .$$

2. *Ефективність* — серед можливих незміщених оцінок вибирають ту, яка має найменшу дисперсію.

3. *Обгрунтованість* — з ймовірністю, близькою до одиниці, різниця між істинною величиною параметра та значенням його оцінки є як завгодно малою при достатньо великому об'ємі вибірки:

$$P(|L - \lambda| < \Delta l) \to 1, \text{коли } n \to \infty .$$

До основних числових характеристик вибіркової сукупності відносяться: вибіркова середня, середня степенева, середня геометрична, вибіркова дисперсія, вибіркове середньоквадратичне відхилення та ін.

Нехай дані вимірювання $x_1, x_2, \ldots x_n$ згруповані у дискретний варіаційний ряд:

Значення ознаки (x_i)	x_1	x_2	…	x_k
Частоти (n_i)	n_1	n_2	...	n_k

Означення 10.4. *Вибірковою середньою* називають середнє арифметичне значення ознаки вибіркової сукупності і обчислюють за формулою

$$\bar{x}_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i, \qquad (10.1)$$

де $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$.

Якщо $n_i = 1$, то вибіркова середня визначається за формулою $\bar{x}_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

Твердження 10.1 *Найкращою точковою оцінкою для математичного сподівання ознаки за даними вибірки $x_1, x_2, \ldots x_n$ є вибіркова середня $\bar{x}_B$.*

Для характеристики розсіяння спостережуваних значень кількісної ознаки вибірки навколо свого середнього значення $\bar{x}_B$, вводять звідну характеристику— *вибіркову дисперсію.*

Означення 10.5. *Вибірковою дисперсією* D_B називають середнє арифметичне квадратів відхилення варіант від вибіркової середньої з врахуванням відповідних частот і обчислюють за формулою:

$$D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i\left(x_i - \bar{x}_B\right)^2 . \qquad (10.2)$$

Зауваження. Обчислення вибіркової дисперсії можна здійснювати за формулою:

$$D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - \left(\bar{x}_B\right)^2 = \overline{x_B^{\;2}} - \left(\bar{x}_B\right)^2. \qquad (10.3)$$

Означення 10.6. *Вибірковим середньоквадратичним відхиленням* називають квадратний корінь із вибіркової дисперсії

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} . \qquad (10.4)$$

Вибіркова дисперсія є зміщеною оцінкою генеральної дисперсії, тобто $M(D_B) = \frac{n-1}{n} D_Г$. Тому вводять величину $s^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{k} (x_i - x_B)^2 n_i$.

Означення 10.7. *Виправленою дисперсією* s^2 називається величина яка, обчислюється за формулою

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} n_i\left(x_i - x_B\right)^2 . \qquad (10.5)$$

Зауваження. Вибіркова дисперсія D_B і виправлена дисперсія s^2 відрізняються дуже мало. Виправленою вибірковою дисперсією користуються при об'ємі вибірки $n < 30$. При $n > 30$ $D_B \approx s^2$.

Твердження 10.2 *Найкращою точковою оцінкою для дисперсії ознаки при невідомій величині математичного сподівання є виправлена дисперсія* s^2.

Приклад 10.1. За заданим статистичним розподілом вибірки:

$X = x_i$	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,1	2,3	2,5	2,7	2,9	3,1
n_i	5	12	18	22	36	24	19	15	11	9	2

обчислити $\bar{x}_{\text{В}}, D_{\text{В}}, \sigma_{\text{В}}$.

◀ Беручи до уваги формули (10.1), (10.3), (10.4) і те, що n = 173, отримаємо:

$$\bar{x}_B = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \frac{5{,}5 + 15{,}6 + 27 + 37{,}4 + 68{,}4 + 50{,}4 + 43{,}73 + 7{,}5 + 29{,}7 + 26{,}1 + 6{,}2}{173} = \frac{347{,}5}{173} \approx 2{,}00867.$$

$$\frac{\sum (x_i)^2 n_i}{n} = \frac{6{,}05 + 20{,}29 + 40{,}5 + 63{,}58 + 129{,}96 + 105{,}84 + 100{,}5193{,}75 + 80{,}19 + 75{,}69 + 19{,}22}{173} =$$

$$= \frac{735{,}58}{173} = 4{,}251908.$$

$$D_{\text{В}} = \frac{\sum (x_i)^2 n_i}{n} - (\bar{x}_B)^2 = 4{,}251908 - (2{,}008671)^2 = 4{,}251908 - 4{,}034759 = 0{,}217149.$$

$$\sigma_{\text{В}} = \sqrt{D_{\text{В}}} = \sqrt{0{,}217149} \approx 0{,}466. \blacktriangleright$$

Інтервальне оцінювання. Точність оцінки, надійність (довірча ймовірність), довірчий інтервал.

Нехай θ — невідомий параметр теоретичного розподілу; θ^* — знайдена за даними вибірки статистична оцінка невідомого параметра.

Означення 10.8. *<u>Надійністю</u> (<u>довірчою ймовірністю</u>) <u>оцінки</u>* θ по θ^* називають ймовірність γ, з якою виконується нерівність $|\theta - \theta^*| < \delta$, а додатне число δ характеризує точність оцінки.

Надійність оцінки γ, як правило, задається наперед, причому в якості γ беруть число близьке до одиниці. Найбільш часто задають надійність рівну 0,95; 0,99 і 0,999.

Припустимо, що виконується рівність:

$$P(|\theta - \theta^*| < \delta) = \gamma, \text{ тобто } P(\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta) = \gamma.$$

Означення 10.9. Інтервал $(\theta^* - \delta, \theta^* + \delta)$, який з ймовірністю γ покриває невідомий параметр θ, називається *<u>довірчим інтервалом.</u>*

Довірчі інтервали для оцінки математичного сподівання нормально розподіленої ознаки

2. Нехай ***відоме середньоквадратичне відхилення*** σ кількісної ознака X. Необхідно оцінити невідоме математичне сподівання a, по вибірковій середній $\bar{x}_B$. Знайдемо довірчі інтервали, які покривають параметр a з надійністю γ.

Якщо випадкова величина X розподілена нормально, то вибіркова середня $\overline{X}$, знайдена по незалежним випробуванням, теж розподілена нормально, причому $M(\overline{X})=a$ $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Тоді $P(|X-a|<\delta)=\gamma$ $\Rightarrow$ $P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$. Замінимо X на $\overline{X}$ а σ на $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ і одержимо $P(|\overline{X}-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right)=2\Phi(t)$, де $t=\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$. Звідси $\delta=\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$, тоді $P\left(|\overline{X}-a|<\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2\Phi(t)$.

Для одержання робочої формули позначимо вибіркову середню $\bar{x}_B$:

$$P\left(\bar{x}_B-\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}_B+\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2\Phi(t)=\gamma. \quad (10.6)$$

Зміст формули (10.6): з надійністю γ можна стверджувати, що довірчий інтервал

$$\left(\bar{x}_B-\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}_B+\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right) \quad (10.7)$$

покриває параметр a. Точність оцінки — $\delta=\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$.

Зауваження. Число t визначається із рівності $2\Phi(t)=\gamma$ і його можна одержати із таблиці функції Лапласа (див. додаток).

Зауваження. Якщо потрібно оцінити математичне сподівання з наперед заданою точністю δ і надійністю γ, то мінімальний об'єм вибірки, що забезпечить задану точність визначається із формули $n=\frac{t^2\sigma^2}{\delta^2}$, яка випливає з рівності $\delta=\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$.

Приклад 10.1. Знайти довірчий інтервал для оцінки з надійністю γ=0,95 невідомого математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки X генеральної сукупності, якщо відомі $\sigma=5$, $\bar{x}_B=14$, $n=25$.

◄ Знайдемо довірчий інтервал $\bar{x}_B-\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}_B+\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$. Із формули $2\Phi(t)=\gamma$ знайдемо значення t, тобто $2\Phi(t)=0{,}95$, $\Phi(t)=0{,}475$. По таблиці 2 додатка

отримаємо $t = 1{,}96$. Підставимо відповідні значення у (10.7) і одержимо $12{,}04 < a < 15{,}96$. ►

3. Нехай кількісна ознака X генеральної сукупності розподілена нормально, ***середньоквадратичне відхилення σ невідоме***. Знайдемо довірчий інтервал для математичного сподівання a.

За даними вибірки можна побудувати випадкову величину

$$T = \frac{\overline{X} - a}{s / \sqrt{n}},$$

можливі значення якої будемо позначати t, що має розподіл Стьюдента з $k = n - 1$ ступенями свободи, де $\overline{X}$ — вибіркова середня; s — виправлене середньоквадратичне відхилення, n — об'єм вибірки.

$P(|T| < t_\gamma) = 2\int\limits_0^{t_\gamma} S(t, n)dt = \gamma$, де $S(t, n)$ — функція щільності розподілу Стьюдента (t – розподілу). Тоді

$$P(|T| < t_\gamma) = P\left(\left|\frac{\overline{X} - a}{s / \sqrt{n}}\right| < t_\gamma\right) = P\left(\overline{X} - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} < a < \overline{X} + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}\right) = \gamma.$$

Замінюючи випадкові величини $\overline{X}$ на $\overline{x}_B$, знайденими по вибірці, одержимо довірчий інтервал

$$\overline{x}_B - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_B + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} \tag{10.8}$$

для параметра a з надійністю γ, де значення t_γ знаходяться із таблиці значень t – розподілу при відповідних n та γ (див таблиця 3 додатку).

Приклад 10.1. За вибіркою об'єму $n = 10$, поданої у вигляді таблиці:

x_i	-2	1	2	3	4	5
n_i	2	1	2	2	2	1

Знайти довірчий інтервал з надійністю $\gamma = 0{,}95$ для математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки генеральної сукупності по вибірковій середній.

◄ Згідно умови середньоквадратичне відхилення σ невідоме. Знайдемо вибіркову середню $\overline{x}_B = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{k} x_i n_i$, і виправлене середньоквадратичне відхилення $s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{k} n_i (x_i - x_B)^2}$. Отримаємо $\overline{x}_B = 2$, $s = 2{,}4$. Із таблиці 3 додатка знайдемо t_γ за даними $\gamma = 0{,}95$, $n = 10$. Будемо мати $t_\gamma = 2{,}26$. Підставивши у (10.8) значення $\overline{x}_B = 2$, $s = 2{,}4$ та $n = 10$, отримаємо $0{,}3 < a < 3{,}7$. ►

Оцінка істинного значення вимірюваної величини

Нехай проводяться n незалежних рівноточних вимірювань деякої фізичної величини, істинне значення a якої невідоме. Будемо розглядати

результати окремих вимірювань як випадкові величини $X_1, X_2, \dots X_n$. Ці величини незалежні (незалежні вимірювання), мають одне і те ж математичне сподівання a (істинне значення вимірюваної величини), однакові дисперсії σ^2 (вимірювання рівноточні) і розподілені нормально (таке припущення підтверджується практично). Істинне значення вимірюваної величини можна оцінювати по середньому арифметичному результатів окремих вимірювань за допомогою довірчих інтервалів. Оскільки звичайно σ невідоме, то слід користуватися формулами (10.8).

Довірчі інтервали для оцінки середньоквадратичного відхилення нормально розподіленої ознаки

Нехай кількісна ознака X генеральної сукупності розподілена нормально. Потрібно оцінити невідоме генеральне середньоквадратичне відхилення σ по виправленому середньоквадратичному відхиленню s. Знайдемо довірчі інтервали, що покривають параметр σ з заданою надійністю γ.

Нехай потрібно знайти співвідношення:
$P(|\sigma - S| < \delta) = \gamma \quad \Rightarrow \quad P(\delta - S < \sigma < \delta + S) = \gamma$. Перетворимо подвійну нерівність $\delta - S < \sigma < \delta + S$ в рівносильну нерівність $S\left(1 - \dfrac{\delta}{S}\right) < \sigma < S\left(1 + \dfrac{\delta}{S}\right)$. Покладемо $\dfrac{\delta}{S} = q$ і отримаємо

$$S(1-q) < \sigma < S(1+q). \tag{10.9}$$

Обчисливши по вибірці s і знайшовши $q = q(\gamma, n)$ по таблиці значень 4 додатка, отримаємо шуканий довірчий інтервал, що покриває σ з заданою надійністю γ.

Зауваження. Якщо $q > 1$, то, враховуючи, що $\sigma > 0$, із (10.9) отримаємо:

$$0 < \sigma < S(1+q). \tag{10.10}$$

Оцінка точності вимірювань

В теорії похибок прийнято точність вимірювання (точність приладу) характеризувати за допомогою середньоквадратичного відхилення σ випадкових помилок вимірювань. Для оцінки σ використовують виправлене середньоквадратичне відхилення s. Оскільки, як правило, результати вимірювань взаємно незалежні, мають одне і те ж математичне сподівання (істинне значення вимірюваної величини) і однакову дисперсію (у випадку рівноточних вимірювань), тому використовують оцінки (10.9) або (10.10).

Тема 11. **Елементи теорії кореляції**

Функціональний та статистичний взаємозв'язок між ознаками. Поняття кореляційної залежності

В багатьох задачах потрібно встановити і оцінити залежність випадкової величини Y, що вивчається, від однієї або декількох інших величин.

Означення 11.1. Якщо яка-небудь величина визначається як однозначна функція однієї або декількох величин $y = f(x, z, ..., u)$, то такий зв'язок величини y із величинами $x, z, ..., u$ називається *функціональним*.

Функціональний зв'язок може існувати і між випадковими величинами. Разом з тим між випадковими величинами може існувати зв'язок і іншого характеру, який називається *статистичним*.

Означення 11.2. *Статистичною* називається залежність, при якій зміна однієї з величин приводить до зміни розподілу іншої. Зокрема, якщо при зміні однієї з величин змінюється числова характеристика іншої, наприклад, математичне сподівання чи середнє вибіркове, то в цьому випадку статистичну залежність називають *кореляційною*.

Якщо маємо двовимірну випадкову величину (X, Y), то умовне математичне сподівання $M(Y \setminus X = x)$ є функцією від x:

$$M(Y \setminus X = x) = f(x, \beta_0, \beta_1, \ldots).$$

Означення 11.3. Функцію $M(Y \setminus X = x) = f(x, \beta_0, \beta_1, \ldots)$ називають *функцією регресії* Y на X або *рівнянням регресії*; величини $\beta_0, \beta_1, \ldots$ називаються *параметрами регресії*. Графічне представлення рівняння регресії називають *лінією регресії*.

Кореляційні залежності поділяють на лінійні та криволінійні.

Рівняння лінійної регресії має такий вигляд $f(x, \beta_0, \beta_1) = \beta_0 + \beta_1 x$.

Серед криволінійних залежностей виділяють

$f(x, \beta_0, \beta_1, \beta_2) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$ — параболічну;

$f(x, \beta_0, \beta_1) = \beta_0 e^{\beta_1 x}$ — експонентну;

$f(x, \beta_0, \beta_1) = \beta_0 + \dfrac{\beta_1}{x}$ — гіперболічну.

Кореляційна таблиця.

Нехай вивчається система кількісних ознак (X, Y). В результаті n незалежних спостережень отримані пари чисел (x_i, y_j) $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, m$. Перелік варіант $X = x_i$ $Y = y_j$ та відповідних їм частот n_{ij} спільної їх появи утворюють *двовимірний статистичний розподіл вибірки*, що реалізована з генеральної сукупності. При великому числі спостережень одне і те ж значення x_i може спостерігатися n_{x_i} разів, значення y_j — n_{y_j} разів, а пара чисел (x_i, y_j) —

n_{ij} разів. Тому дані спостережень групують, тобто підраховують частоти n_{x_i}, n_{y_j}, n_{ij} та записують їх у вигляді таблиці, яку називають <u>*кореляційною*</u>:

Таблиця 11.1. Кореляційна таблиця

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_j	$\dots$	y_m	$n_{x_i}=\sum_{j=1}^{m} n_{ij}$
x_1	n_{11}	n_{12}	$\dots$	n_{1j}	$\dots$	n_{1m}	n_{x_1}
x_2	n_{21}	n_{22}	$\dots$	n_{2j}	$\dots$	n_{2m}	n_{x_2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	n_{i1}	n_{i2}	$\dots$	n_{ij}	$\dots$	n_{im}	n_{x_i}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_k	n_{k1}	n_{k2}	$\dots$	n_{kj}	$\dots$	n_{km}	n_{x_k}
$n_{y_j}=\sum_{i=1}^{k} n_{ij}$	n_{y_1}	n_{y_2}	$\dots$	n_{y_j}	$\dots$	n_{y_m}	$n=\sum_{i=1}^{k} n_{x_i}=\sum_{i=1}^{k} n_{y_j}$

Означення 11.4. Середнє арифметичне спостережуваних значень величини Y, обчислене при умові, що X приймає фіксоване значення x $(X=x)$, називається <u>*умовним*</u> <u>*середнім*</u> і позначається через $\bar{y}_x$.

Наприклад, при $X=x_i$ будемо мати $\bar{y}_{x_i}=\dfrac{1}{n_{x_i}}\sum_{j=1}^{m} y_j n_{ij}$.

Існують дві основні задачі теорії кореляції:

Перша задача кореляції — встановити форму кореляційного зв’язку, тобто встановити вигляд функції регресії (лінійна, параболічну, і т.д.). Найбільш часто лінії регресії виявляються лінійними.

Друга задача кореляції — оцінити тісноту (силу) кореляційного зв’язку. Тіснота кореляційної залежності Y від X оцінюється величиною розсіювання значень Y навколо умовного середнього $\bar{y}_x$. Більше розсіювання свідчить про слабу залежність Y від X або відсутність залежності. Мале розсіювання показує наявність сильної залежності, можливо навіть функціональної.

Визначення параметрів вибіркового рівняння прямої лінії середньоквадратичної регресії

Нехай в результаті n незалежних спостережень система кількісних ознак (X,Y) набула значень (x_i, y_j), $i=1,\dots,k$, $j=1,\dots,m$. *Ставиться задача*: провести пряму лінію, сума квадратів відстаней до якої від спостережуваних точок, обчислена по осі y є мінімальною. Про таку пряму говорять, що вона побудована по <u>*методу*</u> <u>*найменших*</u> <u>*квадратів*</u>.

Означення 11.5. Рівняння прямої, яка одержується із умови мінімізації суми квадратів відхилень, виміряних по осі y, називається <u>*середньоквадратичним*</u> <u>*рівнянням*</u> <u>*регресії*</u>.

Невідомі коефіцієнти a та b прямої $y = ax + b$ лінії регресії визначаються за допомогою формул:

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}, \qquad b = \bar{y} - a\bar{x}, \tag{11.1}$$

де, у випадку загальної кореляційної таблиці, величини $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\overline{xy}$ та $\overline{x^2}$ визначаються за формулами:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_{xi}, \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} y_j n_{y_j}, \quad \overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j n_{ij}, \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_{x_i}. \tag{11.2}$$

Якщо в результаті n незалежних спостережень система кількісних ознак $\{X, Y\}$ набула значень $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, тобто $n_{ij} = 0$, коли $i \neq j$, $n_{ii} = 1$, $i, j = 1, \ldots, n$, то величини $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\overline{xy}$ та $\overline{x^2}$ обчислюються наступним чином:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i, \quad \overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2. \tag{11.3}$$

Означення 11.6. Коефіцієнт a називається <u>*вибірковим*</u> <u>*коефіцієнтом*</u> <u>*регресії*</u> Y на X і позначається ρ_{XY}, тобто:

$$a = \rho_{yx} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}. \tag{11.4}$$

Кореляційний момент, вибірковий коефіцієнт кореляції

Під час дослідження двовимірного статистичного розподілу вибірки постає потреба з'ясувати наявність зв'язку між ознаками *X* і *Y*, який у статистиці називають <u>*кореляційним*</u>.

Розглянемо вибірковий коефіцієнт регресії (11.4). Враховуючи, що $\sigma_x^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$, $\sigma_y^2 = \overline{y^2} - (\bar{y})^2$, запишемо (11.4) у вигляді $a = \rho_{yx} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\sigma_x^2}$.

Домножимо ліву і праву частини на $\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$.

Означення 11.7. Вираз

$$R = \rho_{yx} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y}}{\sqrt{(\overline{x^2} - \bar{x}^2)(\overline{y^2} - \bar{y}^2)}} \tag{11.5}$$

називається <u>*вибірковим коефіцієнтом кореляції*</u>

Вибірковий коефіцієнт кореляції служить для харистики зв'язку між ознаками X та Y. Вимірює силу (щільність) лінійного зв'язку між X та Y.

Властивості вибіркового коефіцієнта кореляції:

а) R — величина, що не має одиниць вимірювання;

б) $-1 \le R \le 1$ — обмежена величина;

в) якщо $R = \pm 1$, то величини X та Y зв'язані лінійною функціональною залежністю, тобто завжди зв'язок детермінований. У цьому випадку завжди $y_i = ax_i + b$.

г) якщо $R = 0$, то лінійна кореляція відсутня, але можлива криволінійна кореляція;

д) якщо $R > 0$, то кореляція додатна (збільшенням X величина Y в середньому зростає, то таку кореляцію називають додатною); якщо $R < 0$, то кореляція від'ємна.

Чим більша щільність лінійного зв'язку, тим більшим є абсолютне значення коефіцієнта кореляції.

Коефіцієнт детермінації встановлює наскільки результат є точний і відноситься до універсальної міри залежності однієї випадкової величини від іншої. *Визначається* $R_d = R^2$ в моделі, де вивчається залежність між двома величинами X та Y.

Таблиця 12.2. Кореляційна таблиця

$X = x_i$	$Y = y_j$		
	1	2	$n_x = \sum_{j=1}^{m} n_{ij}$
1	1	-	1
2	-	3	3
3	1	-	1
$n_y = \sum_{i=1}^{k} n_{ij}$	2	3	5

Приклад12.1 За заданою таблицею 12.2. Обчислити $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{xy}$ та $\overline{x^2}$.

◀ $\overline{x} = \frac{1}{5}(1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1) = 2$,

$\overline{xy} = \frac{1}{5}(1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1) = \frac{16}{5}$,

$\overline{x^2} = \frac{1}{5}(1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 9 \cdot 1) = \frac{22}{5}$.

▶

Приклад 12.2. Задана кореляційна таблиця.

$X \backslash Y$	1	2	3	n_x
10	1	-	-	1
20	2	1	0	3
30	2	2	2	6
40	1	9	16	26
n_y	6	12	18	36

Знайти рівняння лінійної регресії та вибірковий коефіцієнт кореляції.

◀ За формулами (11.1) знаходимо параметри

$$a=\frac{\overline{xy}-\bar{x}\,\bar{y}}{\overline{x^2}-(\bar{x})^2},\qquad b=\bar{y}-a\bar{x}.$$

$$\bar{x}=\frac{1}{36}(10\cdot1+20\cdot3+30\cdot6+40\cdot26)\cong35{,}83;\quad \bar{y}=\frac{1}{36}(1\cdot6+2\cdot12+3\cdot18)\cong2{,}3;$$

$$\overline{x^2}=\frac{1}{36}(100\cdot1+400\cdot3+900\cdot6+1600\cdot26)\cong1342;\quad \overline{y^2}=\frac{1}{36}(1\cdot6+4\cdot12+9\cdot18)\cong6$$

$$\overline{xy}=\frac{1}{36}(10\cdot1\cdot1+20\cdot2\cdot1+20\cdot1\cdot2+30\cdot2\cdot1+30\cdot2\cdot2+30\cdot6+40\cdot1\cdot+40\cdot18+40\cdot48)=86{,}9444;$$

$$a=\frac{\overline{xy}-\bar{x}\,\bar{y}}{\overline{x^2}-(\bar{x})^2}=\frac{96{,}94-35{,}83\cdot2{,}3}{1342-36}=0{,}057831;$$

$$b=\bar{y}-a\bar{x}=2{,}3-0{,}0578\cdot35{,}83=0{,}261044;$$

Використовуючи формулу (11.5) знайдемо вибірковий коефіцієнт кореляції:

$$\sigma_{X_B}=\overline{x^2}-\bar{x}^2=7{,}592028\qquad\qquad \sigma_{Y_B}=\overline{y^2}-\bar{y}^2=0{,}745356.$$

$$R=\frac{\overline{xy}-\bar{x}\,\bar{y}}{\sqrt{(\overline{x^2}-\bar{x}^2)(\overline{y^2}-\bar{y}^2)}}=0{,}5891$$ ▶

Тема 12 **Статистична перевірка статистичних гіпотез**

Статистична гіпотеза. Нульова і конкуруюча, проста і складна гіпотези

Часто небхідно знати закон розподілу генеральної сукупності. Якщо закон розподілу невідомий, але є підстави припустити, що він має певний вид (назвемо його A), то висувають гіпотезу: генеральная сукупність розподілена за законом A, (гіпотеза про вид розподілу генеральної сукупності). Можливий випадок, коли закон розподілу відомий, але невідомі його параметри. В цьому випадку, наприклад, є підстави припустити, що невідомий параметр $\Theta=\Theta_0$, тобто в цьому випадку висувають гіпотезу про величину параметра відомого розподілу.

Означення 12.1. *Статистичною* називають гіпотезу про вид невідомого розподілу або про параметри відомих розподілів.

Означення 12.2. *Нульовою* (*основною*) називають висунуту гіпотезу H_0. *Конкуруючою* (*альтернативною*) називають гіпотезу H_1, яка протирічить нульовій.

Наприклад, $H_0: a=10$; $H_1: a\neq10$.

Означення 12.3. *Простою* називають гіпотезу, яка має тільки одне твердження. Наприклад, $H_0:\lambda=5$. *Складною* називають гіпотезу, яка складається із скінченного чи нескінченного числа простих гіпотез.

Наприклад, $H_0:\lambda>5$.

Помилки першого і другого роду

Висунута гіпотеза може бути правильною або неправильною, тому виникає необхідність її перевірки. Оскільки перевірку проводять статистичними методами, її називають *статистичною*.

У підсумку статистичної перевірки гіпотези у двох випадках може бути прийнято неправильне рішення:

Помилка першого роду полягає в тому, що буде відкинута правильна гіпотеза.

Помилка другого роду полягає в тому, що буде прийнята неправильна гіпотеза.

Зауваження. Правильне рішення може бути прийнято також у двох випадках:

1) гіпотеза приймається, причому і в дійсності вона правильна;

2) гіпотеза відкидається, причому і в дійсності вона невірна.

Означення 12.4. Імовірність зробити помилку першого роду прийнято позначати через α; її називають *рівнем значущості*.

Найчастіше рівень значущості приймають рівним 0,05 або 0,01. Якщо, наприклад, прийнятий рівень значимості рівний 0,05, то це означає, що в п'яти випадках зі ста є ризик допустити помилку першого роду (відкинути правильну гіпотезу).

Статистичний критерій перевірки нульової гіпотези. Спостережуване значення критерію

Для перевірки нульової гіпотези використовують спеціально підібрану випадкову величину, точний або наближений розподіл якої відомий. Позначимо цю величинуну через K.

Означення 12.5. *Статистичним критерієм* (*критерієм*) називають випадкову величину K, яка служить для перевірки нульової гіпотези.

Для перевірки гіпотези за даними вибірок обчислюють частинні значення величин, які входять в критерій і таким чином отримують частинне (спостережуване) значення критерію.

Означення 12.6. *Спостережуваним значенням* $K_{спост}$ називають значення критерію, обчислене за значеннями вибірки.

Критична область. Область прийняття гіпотези. Критичні точки

Після вибору певного критерію множина всіх його можливих значень розбивається на дві підмножини, які не перетинаються: одна з них містить значення критерію, за яких нульова гіпотеза відкидається, а інша — при яких вона приймається.

Означення 12.7. *Критичною областю* називають сукупність значень критерію, за яких нульову гіпотезу відкидають.

Означення 12.8. *<u>Областю</u> <u>прийняття</u> <u>гіпотези</u>* (*<u>областю</u> <u>допустимих</u> <u>значень</u>*) називають сукупність значень критерію, за яких гіпотеза приймається.

Основний принцип перевірки статистичних гіпотез можна ***сформулювати*** так: якщо спостережуване значення критерію належить критичній області — гіпотезу відкидають, якщо спостережуване значення критерію належить області прийняття гіпотези — гіпотезу приймають.

Оскільки критерій K — одномірна випадкова величина, то всі її можливі значення належать деякому інтервалу. Тому критична область і область прийняття гіпотези також є інтервалами, а це значить, що існують точки, які їх розділяють.

Означення 12.9. *<u>Критичними</u> <u>точками</u>* (*<u>межами</u>*) $k_{кр}$ називають точки, що відокремлюють критичну область від області прийняття гіпотези.

Розрізняють односторонню (правосторонню або лівосторонню) та двосторонню критичні області.

Означення 12.10. *<u>Правосторонньою</u>* називають критичну область, яка визначається нерівністю $K > k_{кр}$, де $k_{кр}$ — додатнє число (рис. 12.1).

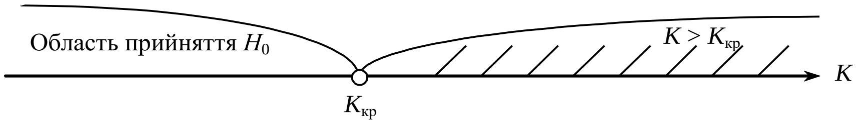

Рис. 12.1

Означення 12.11. *<u>Лівосторонньої</u>* називають критичну область, яка визначається нерівністю $K < k_{кр}$, де $k_{кр}$ — від’ємне число (рис. 12.2).

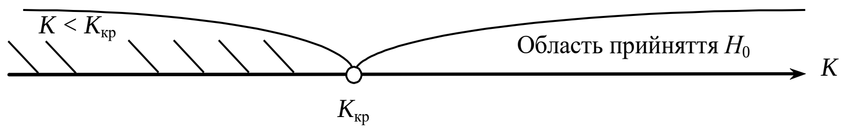

Рис. 12.2

Односторонньої називають правобосторонню або лівосторонню критичну область.
<u>Двосторонньої</u> називають критичну область, яка визначається нерівностями $K < k'_{кр}$, $K > k''_{кр}$, де $k'_{кр} < k''_{кр}$.

Означення 12.12. .

Якщо критичні точки симетричні відносно нуля, то двостороння критична область визначається нерівністю $|K| > k_{кр}$, $k_{кр} > 0$ (рис. 12.3).

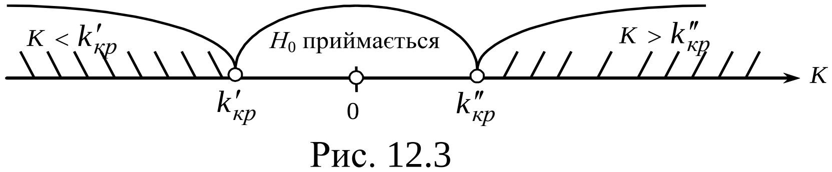

Рис. 12.3

Відшукання правосторонньої критичної області

Для відшукання правосторонньої критичної області досить знайти критичну точку. Для її знаходження задаються достатньою малою величиною

— рівнем значущості α. Потім шукають критичну точку $k_{кр}$, виходячи з вимоги , щоб при умові справедливості нульової гіпотези ймовірність того, що критерій K прийме значення, більше $k_{кр}$, дорівнювала прийнятому рівню значущості:

$$P(K > k_{кр}) = \alpha . \qquad (12.1)$$

Для кожного критерію є відповідні таблиці, по яких і знаходять критичну точку, що задовольняє цій вимозі.

Зауваження. Коли критична точка вже знайдена, обчислюють за даними вибірок спостережуване значення критерію і, якщо виявиться що $K_{спост} > k_{кр}$, то нульову гіпотезу відкидають; якщо ж $K_{спост} < k_{кр}$ то нема підстав відкидати нульову гіпотезу.

Спостережуване значення критерію може виявитися більшим $k_{кр}$ не тому, що нульова гіпотеза помилкова, а з інших причин (малий об'єм вибірки, недоліки методики експеримента та ін). У цьому випадку, відкинувши правильну нульову гіпотезу, роблять помилку першого роду. Ймовірність цієї помилки дорівнює рівню значущості α. Отже, користуючись вимогою (12.1), ми з імовірністю α ризикуємо зробити помилку першого роду.

Відшукання лівосторонньої і двосторонньої критичних областей

Відшукання лівосторонньої і двосторонньої кричних областей зводиться (так само, як і для правосторонньої) до знаходження відповідних критичних точок. Лівостороння критична область визначається нерівністю $K < k_{кр}$ ($k_{кр} < 0$). Критичну точку знаходять виходячи з вимоги, щоб при справедливості нульової гіпотези ймовірність того, що критерій прийме значення, менше $k_{кр}$, дорівнювала б прийнятому рівню значущості:

$$P(K < k_{кр}) = \alpha . \qquad (12.2)$$

Двостороння критична область визначається нерівностями $K < k'_{кр}$, $K > k''_{кр}$. Критичні точки знаходять виходячи з вимоги, щоб при справедливості нульової гіпотези сума ймовірностей того, що критерій прийме значення, менше $k'_{кр}$ або більшу $k''_{кр}$, дорівнювала прийнятому рівню значущості:

$$P(K < k'_{кр}) + P(K > k''_{кр}) = \alpha . \qquad (12.3)$$

Ясно, що критичні точки можуть бути обрані безліччю різних способів. Якщо ж розподіл критерію симетричний відносно нуля і є підстави (наприклад, для збільшення потужності) вибрати симетричні відносно нуля точки $-k_{кр}$ та $k_{кр}$ ($k_{кр} > 0$). Враховуючи (12.3), отримаємо:

$$P(K > k_{кр}) = \alpha/2 . \qquad (12.4)$$

Це співвідношення і служить для відшукання критичних точок двосторонньої критичної області, а критичні точки знаходять за відповідними таблицями.

Перевірка гіпотези про нормальний розподіл генеральної сукупності . Критерій згоди Пірсона

Якщо закон розподілу генеральної сукупності невідомий, але є підстави припустити вид розподілу, то перевіряють нульову гіпотезу: генеральна сукупність має розподіл A. Перевірка гіпотези про передбачуваний закон невідомого розподілу проводиться за допомогою спеціально підібраної випадкової величини — *критерію згоди*.

Означення 12.13. *Критерієм згоди* називають критерій перевірки гіпотез про передбачуваний закон невідомого розподілу.

Є декілька критеріїв згоди: χ^2 (“хі квадрат”) Пірсона, Колмогорова – Смірнова, Стьюдента та ін. Розглянемо застосування критерію Пірсона для перевірки гіпотези про нормальний розподіл генеральної сукупності (критерій аналогічно застосовується і для інших розподілів, що є його перевагою). З цією метою будемо порівнювати емпіричні (спостережувані) і теоретичні (обчислені в припущенні нормального розподілу) частоти.

Отже, нехай за вибіркою об’єму n отримано емпіричний розподіл:

варіанти	x_i	x_1,	x_2,	…	x_s
частоти	n_i	n_1,	n_2,	…	n_s

Нехай, в припущенні нормального розподілу генеральної сукупності обчислені теоретичні частоти n_i'. При рівні значущості α потрібно перевірити нульову гіпотезу: генеральна сукупність розподілена нормально.

За критерій перевірки нульової гіпотези приймають випадкову величину

$$\chi^2 = \sum \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}. \qquad (12.5)$$

Доведено, що при $n \to \infty$ випадкова величина (12.5) незалежно від того, яким законом розподілу підпорядкована генеральна сукупність, наближається до закону розподілу χ^2 з k ступенями вільності.

Означення 12.14. Випадкова величина (12.5), позначена через χ^2, і сам критерій називають *критерієм згоди “хі квадрат”*.

Число ступенів свободи знаходять з рівності $k = s - 1 - r$, де s — число груп (частинних інтервалів) вибірки; r — число параметрів передбачуваного розподілу, які оцінені за даними вибірки. Зокрема, якщо передбачуваний розподіл — нормальний, то оцінюють два параметри (математичне сподівання a і середньоквадратичне відхилення σ), тому $r = 2$ і число ступенів вільності $k = s - 1 - r = s - 1 - 2 = s - 3$.

Зауваження. Якщо, наприклад, припускають, що генеральна сукупність розподілена за законом Пуассона, то оцінюють один параметр λ, тому $k = s - 2$.

Побудуємо правосторонню критичну область, виходячи з умови, щоб ймовірність потрапляння критерію в цю область в припущенні справедливості нульової гіпотези дорівнювала прийнятому рівню значущості α:

$$P\left[\chi^2 > \chi^2_{кр}(\alpha, k)\right] = \alpha \qquad (12.6)$$

Таким чином, правостороння критична область визначається нерівністю $\chi^2 > \chi^2_{кр}(\alpha,k)$, а область прийняття нульової гіпотези — нерівністю $\chi^2 < \chi^2_{кр}(\alpha,k)$. Позначимо значення критерію, обчислене по даним спостережень, через $\chi^2_{спост}$ і сформулюємо **правило перевірки нульової гіпотези**:

Правило. Для того щоб при заданому рівні значущості перевірити нульову гіпотезу H_0: генеральна сукупність розподілена нормально, треба спочатку обчислити теоретичні частоти, а потім спостережуване значення критерію:

$$\chi^2_{спост} = \sum \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$$

і по таблиці критичних точок розподілу χ^2 за заданим рівнем значущості α і кількістю ступенів вільності $k = s - 3$ знайти критичну точку $\chi^2_{кр}(\alpha,k)$.Якщо

— $\chi^2 < \chi^2_{кр}(\alpha,k)$ — немає підстав відкинути нульову гіпотезу;

— $\chi^2 > \chi^2_{кр}(\alpha,k)$ — нульову гіпотезу відкидають.

Зауваження. Обсяг вибірки має бути досить великий, у всякому разі, не менше 50. Кожна група повинна містити не менше 5-8 варіант. Оскільки можливі помилки першого і другого роду, можна повторити дослід, збільшити число спостережень, скористатися іншими критеріями, побудувати графік розподілу.

Нехай емпіричний розподіл (вибірка) задана у вигляді рівновіддалених варіант і відповідних їм частот:

варіанти x_i	x_1,	x_2,	…	x_s
частоти n_i	n_1,	n_2,	…	n_s

Для перевірки узгодженості даних вибірки з гіпотезобію про нормальний розподіл генеральної сукупності потрібно обчислити:

1) теоретичні (вирівнюючі) частоти згідно формули:

$$n_i' = \frac{nh}{\sigma}\varphi(u_i),$$

n — об'єм вибірки, h — різниця між сусідніми варіантами, σ — вибіркове середньоквадратичне відхилення. $u_i = \dfrac{x - \overline{x}_B}{\sigma}$, $\overline{x}_B$ — середнє вибіркове, а $\varphi(u)$ — функція Гауса;

2) величину $\chi^2_{спост} = \sum \dfrac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$,

де n_i — емпіричні частоти; n_i' — теоретичні частоти.

3) число ступенів вільності $k = s - 3$, де s—число різних значень x_i.

Далі вибирають рівень значущості α та Знаходять $\chi^2_{кр}(\alpha,k)$ за таблицею по знайденим k та α. Якщо $\chi^2_{спост} < \chi^2_{кр}(\alpha,k)$ — немає підстав відкинути нульову гіпотезу. Якщо $\chi^2_{спост} > \chi^2_{кр}(\alpha,k)$ — нульову гіпотезу відкидають.

Приклад 12.1 Користуючись критерієм Пірсона при рівні значущості 0,05, встановичи чи узгоджується гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності з даними вибірки об'єму $n = 200$:

x_i	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	15	26	25	30	26	21	24	20	13

◄ Знайдемо $\bar{x}_B$ та σ. Для цього побудуємо розрахункову таблицю 12.3.

Таблиця 12.3. Розрахункова таблиця

i	x_i	n_i	$x_i n_i$	$x_i^2 n_i$
1	5	15	75	375
2	7	26	182	1274
3	9	25	225	2025
4	11	30	330	3630
5	13	26	338	4394
6	15	21	315	4725
7	17	24	408	6936
8	19	20	380	7220
9	21	13	273	5733
Сума		200	2526	36312

Використаємо формули (10.1), (10.2):

$$\bar{x}_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i = \frac{1}{200}\cdot 2526 = 12{,}63;$$

$$\overline{x^2}_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i = \frac{1}{200}\cdot 36312 = 181{,}56;$$

$$D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - (\bar{x}_B)^2 = \overline{x_B^2} - (\bar{x}_B)^2 =$$

$$= 181{,}56 - 12{,}63^2 = 22{,}0431 \quad \sigma = \sqrt{D_B} = 4{,}695.$$

Обчислимо $\chi^2_{спост} = \sum \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$,

використовуючи наступну розрахункову таблицю:

i	x_i	n_i	$u_i = \frac{x - \bar{x}_в}{\sigma}$	$\varphi(u_i)$	$n_i' = \frac{nh}{\sigma}\varphi(u_i)$	$\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$
1	5	15	-1,625	0,1065	9,0748	3,8687
2	7	26	-1,199	0,1944	16,5610	5,3798
3	9	25	-0,773	0,2959	25,2074	0,0017
4	11	30	-0,347	0,3756	32,0008	0,1251
5	13	26	0,079	0,3977	33,8833	1,8341
6	15	21	0,505	0,3512	29,9227	2,6607
7	17	24	0,931	0,2587	22,0399	0,1743
8	19	20	1,357	0,1589	13,5397	3,0824
9	21	13	1,783	0,0814	6,9375	5,2979
					Сума	22,4248

Обчислимо число степенів вільності $k = s - 3 = 9 - 3 = 6$. Згідно таблиці 5 додатку, $\chi^2_{кр}(0{,}05;6) = 12{,}6$, а $\chi^2_{спост} = 22{,}4248$, тобто $\chi^2_{спост} > \chi^2_{кр}$. Звідси гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупноті не узгоджується з даними вибірки.

Теоретичні запитання до розділу III

1. Предмет і задачі математичної статистики.
2. Дати визначення поняттям: статистичні дані, кількісні та якісні показники.
3. Дати визначення генеральної та вибіркової сукупності.
4. Вимоги, що висуваються до вибірки.
5. Що називається варіантою, варіаційним рядом?
6. Що таке частота, відносна частота варіант?
7. Дати визначення дискретного статистичного розподілу вибірки.
8. $\bar{x}_В, D_В, \sigma_В$ для дискретного статистичного розподілу вибірки.
9. Що являє собою полігон частот і відносних частот?
10. Що називається емпіричною функцією? Властивість $F^*(x)$.
11. Записати формулу Штерджесса. Що називається розмахом варіаційного ряду?
12. Що називається гістограмою частот і відносних частот?
13. Задачі теорії статистичного висновку.
14. Що називається точковою статистичною оцінкою?
15. Що таке незміщена (зміщена) точкова статистична оцінка?
16. Що називають ефективною точковою статистичною оцінкою?
17. Що називають ґрунтовною точковою статистичною оцінкою?
18. Дати визначення вибіркової середньої, вибіркової дисперсії D_B?
19. Що є найкращою точковою оцінкою для математичного сподівання ознаки?
20. Що називається виправленою дисперсією, виправленим середнім квадратичним відхиленням?
21. Що є найкращою точковою оцінкою для дисперсії ознаки при невідомій величині математичного сподівання?
22. Визначення інтервальної статистичної оцінки для параметрів генеральної сукупності.
23. Що називають точністю і надійністю оцінки, довірчим інтервалом?
24. Як побудувати довірчий інтервал із заданою надійністю γ для оцінки математичного сподівання нормально розподіленої ознаки при відомому значенні $\sigma_Г$?
25. Як побудувати довірчий інтервал із заданою надійністю γ для оцінки математичного сподівання нормально розподіленої ознаки при невідомому значенні $\sigma_Г$?
26. Як оцінити істинне значення вимірюваної величини?
27. Як побудувати довірчі інтервали для оцінки середньоквадратичного відхилення нормально розподіленої ознаки?
28. Як оцінити точності вимірювань?
29. Дати визначення статистичної залежності між ознаками X та Y.
30. Що означає кореляційна залежність між ознаками X та Y?
31. Дати визначення поняттям: функція регресії, параметри та лінія регресії.
32. Що називається двовимірним статистичним розподілом вибірки, кореляційною таблицею, умовним середнім?
33. Сформулювати основні задачі теорії кореляції.

34. У чому сутність методу найменших квадратів?
35. Що називається середньоквадратичним рівнянням регресії?
36. Визначення параметрів вибіркового рівняння прямої лінії середньоквадратичної регресії?
37. Що називається вибірковим коефіцієнтом регресії Y на X?
38. Що називається кореляційним моментом, вибірковим коефіцієнтом кореляції R? Властивості R.
39. Дати визначення поняттям: статистична; нульова; альтернативна; проста; складна гіпотеза.
40. Помилки першого і другого роду.
41. Що називається статистичним критерієм?
42. Область прийняття нульової гіпотези, критична область, критична точка.
43. Які існують критичні області?
44. Відшукання односторонньої та двосторонньої критичних областей.
45. Критерій узгодженості Пірсона.
46. Перевірка гіпотези про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Вправи до розділу III

1. Для заданої вибірки із генеральної сукупності скласти розподіли частот та відносних частот, побудувати полігон частот:

а) 7, 4, 4, 8, 12, 12, 12, 7, 8, 12, 8, 12, 4, 12, 12, 4, 12, 4,1 2, 12;
б) 6, 9, 5, 3, 6, 6, 9, 3, 5, 6, 9, 5, 6, 6, 9, 6, 9, б, 6, 6;
в) 2, 2, 8, 5, 4, 2, 5, 4, 2, 8, 8, 2, 4, 8, 2, 2, 8, 2, 2, 2.

2. У результаті спостереження одержали такі значення ознаки *X*: -3, 2, -1, -3, 5, -3, 2. Побудувати полігон частот цієї вибірки.

3. У результаті спостереження одержали розподіл ознаки *X* вибірки у вигляді таблиці:

x_i	- 2	0	1	2	3	5	7
n_i	4	5	7	8	6	2	1

Побудувати гістограму частот цього розподілу.

4. Побудувати гістограму відносних частоти заданого розподілу:

Інтервали	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
Частоти	4	6	16	36	24	10	4

5. Для заданої вибірки із генеральної сукупності скласти розподіли частот та відносних частот, побудувати емпіричну функцію розподілу, полігон та гістограму частот та відносних частот:
а) 7, 5, 5, 8, 14, 12, 14, 7, 8, 12, 5, 12, 12, 5, 14, 5, 12, 12;

б) 7, 3, 10, 4, 7, 7, 3, 4, 10, 3, 7, 7, 4, 7, 4, 7, 4, 7, 7, 7.

6. Знайти емпіричну функцію заданого розподілу вибірки:

x_i	2	5	7	8
n_i	1	3	2	4

та побудувати її графік

7. Побудувати гістограму частот заданого розподілу вибірки:

Інтервали	(3, 5)	(5, 7)	(7, 9)	(9, 11)	(11, 13)	(13, 15)	(15, 17)
Частоти	4	6	20	40	20	4	6

8. Маємо вибірку з 20 елементів: 7, 10, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 13, 15, 14, 15, 14, 16, 12, 16, 14, 14, 16, 15. Виконати такі завдання:

а) побудувати статистичний розподіл вибірки та його емпіричну функцію розподілу;
б) побудувати полігон і гістограму частот та відносних частот, розбивши інтервал на чотири рівні підінтервали;
в) знайти моду та медіану.

9. Дано вибірку з 20 елементів: 8, 5, 7, 9, 10, 9, 8, 4, 7, 8, 10, 9, 4, 8, 11, 9, 11, 8, 10, 11. Виконати такі завдання:

а) побудувати статистичний розподіл вибірки та його емпіричну функцію розподілу;
б) побудувати полігон і гістограму частот та відносних частот, розбивши інтервал на чотири рівні підінтервали;
в) знайти моду та медіану.

10. Побудувати емпіричну функцію розподілу, гістограму та полігон частот вибірки, поданої у вигляді таблиці частот:

Інтервали	[- 3; -2)	[-2; -1)	[-1; 0)	[0; 1)	[1; 2)	[2; 3)	[3; 4)	[4; 5)
Частоти	3	10	15	24	25	13	7	3

11. Побудувати емпіричну функцію розподілу, гістограму та полігон частот вибірки, поданої у вигляді таблиці частот:

Інтервали	[0,2; 2,2)	[2,2; 4,2)	[4,2; 6,2)	[6,2; 8,2)	[8,2; 12,2)
Частоти	70	20	4	3	3

12. При вивченні випадкової величини X у результаті 40 незалежних спостережень дістали вибірку: 10, 13, 10, 9, 9, 12, 12, 6, 7, 9, 8, 9, 11, 9, 14, 13, 9, 8, 8, 7, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 8, 7, 9, 10, 14, 13, 8, 8, 9, 10, 11, 11, 12, 12. Потрібно: а) побудувати дискретний статистичний розподіл для цієї вибірки, полігон частот та $F^*(x)$; б) 2. Обчислити $\bar{x}_{\text{В}}$, S.

13. П’ятдесят абітурієнтів на вступних іспитах з інформатики дістали таку кількість балів: 12, 14, 19, 15, 14, 18, 13, 16, 17, 12, 20, 17, 15, 13, 17, 16, 20, 14,

14, 13, 17, 16, 15, 19, 16, 15, 18, 17, 15, 14, 16, 15, 15, 18, 15, 15, 19, 14, 16, 18, 18, 15, 15, 17, 15, 16, 16, 14, 14, 17. Потрібно: а) побудувати дискретний статистичний розподіл, полігон частот, $F^*(x)$; б) обчислити $\bar{x}_В$, S.

14. Через кожну годину вимірювалась напруга в електромережі. Результати вимірювання напруги у вольтах наведені у вигляді статистичного ряду: 222, 219, 224, 220, 218, 217, 221, 220, 215, 218, 223, 225, 220, 226, 221, 216, 211, 219, 220, 221, 222, 218, 221, 219. Побудувати дискретний статистичний розподіл для цієї вибірки, а також полігон частот і $F^*(x)$. Знайти моду та медіану.

15. На кожну сотню деталей, що їх виготовляє цех, у середньому припадає дві браковані. Було перевірено 10 партій по 100 деталей у кожній. Відхилення кількості виявлених бракованих деталей від середнього x_i наведено в таблиці:

Номер партії	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	–1	0	1	1	–1	1	0	–2	2	1

Потрібно: а) побудувати дискретний статистичний розподіл, полігон частот $F^*(x)$; б) обчислити $\bar{x}_В$, S.

16. У відділі технічного контролю було виміряно діаметри 200 валиків із партії, виготовленої одним верстатом-автоматом. Відхилення виміряних діаметрів від номіналу наведено як інтервальний статистичний розподіл, де $X = x_i$ вимірюється в мікронах:

$h = 5$,мк	–20…–15	–15…–10	–10…–5	–5…0	0…5	5…10	10…15	15…20	20…25	25…30
n_i	7	11	15	24	49	41	26	17	7	3

Потрібно: а) побудувати гістограму частот і $F^*(x)$; б) обчислити $\bar{x}_В$, S

17. Із партії однотипних сталевих болтів, виготовлених заводом, була здійснена вибірка обсягом 200 шт. і результати вимірювання їх діаметрів x_i наведено у вигляді інтервального статистичного розподілу:

x, мм $h = 2$ мм	14,40—14,42	14,42—14,44	14,44—14,46	14,46—14,48	14,48—14,50	14,50—14,52	14,52—14,54	14,54—14,56	14,56—14,58	14,58—14,60	14,60—14,62	14,62—14,64
n_i	2	2	8	9	9	14	41	76	21	11	4	3

Потрібно: а) Побудувати гістограму частот і $F^*(x)$; б) обчислити $\bar{x}_В$, S.

18. Число розладнань у роботі верстатів-автоматів заводу протягом року наведено у вигляді інтервального статистичного розподілу:

x_i $h = 2$	0—2	2—4	4—6	6—8	8—10	10—12	12—14	14—16	16—18	18—20	20—22	22—24
n_i	2	5	7	11	15	18	26	20	14	10	6	3

Потрібно: а) побудувати гістограму частот, $F^*(x)$.; обчислити $\bar{x}_В$ та $\sigma_В$.

19. Знайти вибіркові середню та дисперсію заданої вибірки:

x_i	18,6	19	19,4	19,8	20,2	20,6
n_i	4	6	30	40	18	2

20. Знайти вибіркові середню та дисперсію заданої вибірки: а)

x_i	12	14	16	18	20	22
n_i	5	15	50	16	10	4

б) 2,30; 2,28; 2,29; 2,28; 2,30; 2,28; 2,32; 2,29; 2,31; 2,32; 2,31; 2,30; 2,32; 2,30; 2,31; 2,30; 2,284 2,29; 2,28; 2,30; 2,28; 2,32; 2,29; 2,31; 2,32; 2,31; 2,30; 2,32; 2,30; 2,31.

21. По вибірці об'ємом n = 51 знайдена зміщена оцінка $D_B = 5$ генеральної дисперсії. Знайти незміщену оцінку дисперсії генеральної сукупності.

22. В результаті п'яти вимірів довжини стержня одним прибором (без систематичних помилок) отримали такі результати (в мм): 92, 94, 103, 105, 106. Знайти:

а) вибіркову середню довжини стержня;
б) вибіркову і виправлену дисперсії похибок пристрою.

23. В результаті чотирьох вимірювань деякої фізичної величини одним прибором (без систематичних помилок) отримали такі результати: 8, 9, 11, 12. Знайти: а) вибіркову середню результатів вимірювань;

б) вибіркову та виправлену дисперсії похибок пристрою.

24. Знайти виправлену дисперсію за даним розподілом вибірки об'ємом n=10:

x_i	186	192	194
n_i	2	5	3

25. Знайти вибіркову середню та дисперсію, виправлені дисперсію та середньоквадратичне відхилення за даним розподілом вибірки об'ємом n=100:

x_i	340	360	375	380
n_i	20	50	18	12

26. По вибірці об'єму n=41 знайдена зміщена оцінка D_B=3 генеральної сукупності. Знайти незміщену оцінку дисперсії генеральної сукупності.

27. В результаті 5-ти вимірювань довжини стержня одним приладом (без систематичних помилок) отримали наступні результати: x_1=92, x_2=94, x_3=103, x_4=105, x_5=106. Знайти а) вибіркову середню довжину стержня; б) вибіркову і виправлену дисперсії помилок приладу.

28. Маємо такі дані про розміри основних фондів (у млн. грн.) на 30-ти випадково вибраних підприємствах:

4,2; 2,4; 4,9; 6,7; 4,5; 2,7; 3,9; 2,1; 5,8; 4,0;
2,8; 7,8; 4,4; 6,6; 2,0; 6,2; 7,0; 8,1; 0,7; 6,8;
9,4; 7,6; 6,3; 8,8; 6,5; 1,4; 4,6; 2,0; 7,2; 9,1.

Побудувати інтервальний статистичний розподіл із довжиною кроку h=2 млн. грн. З надійністю γ = 0,999 знайти довірчий інтервал для $\overline{x}_Г$, якщо $\sigma_Г$ =5 млн. грн.

29. Якого значення має набувати надійність оцінки γ, щоб за обсягу вибірки n=100 похибка її не перевищувала 0,01 при $\sigma_Г$ = 5.

30. Визначити обсяг вибірки n, за якого похибка, що дорівнює 0,01, гарантується з ймовірністю 0,999, якщо $\sigma_Г$ = 5.

31. У 30 телевізорів була виміряна чутливість x_i. Результати вимірювання подано як дискретний статистичний розподіл:

x_i, *мкВ*	200	250	300	350	400	450	500
n_i	2	7	6	8	4	2	1

Із надійністю γ = 0,99 побудувати довірчий інтервал для a, якщо $\sigma = 4$.

32. Однотипних приладів були випробувані щодо їх безвідмовної роботи x_i. Результати вимірювання наведено як дискретний статистичний розподіл:

x_i, год	100	110	120	130	140	150
ni	10	6	5	4	2	1

З надійністю γ = 0,99 побудувати довірчий інтервал для $\overline{X}_Г$, якщо $\sigma_Г = 4$.

33. Навмання вибрано 29 різців, які випробувані на знос. Результати експерименту наведено у вигляді дискретного статистичного розподілу:

x_i, год	2	3	4	5	6	7	8
n_i	10	8	6	2	1	1	1

З надійністю γ = 0,99 побудувати довірчий інтервал $\overline{X}_Г$, якщо $\sigma_Г = 2$.

34. Випадково вибрана партія з двадцяти приладів була випробувана щодо терміну безвідмовної роботи кожного з них. Результати випробувань наведено у вигляді дискретного статистичного розподілу:

x_i	100	170	240	310	380
n_i	2	5	10	2	1

З надійністю γ = 0,99 побудувати довірчий інтервал для середнього часу безвідмовної роботи приладу α.

35. Обчислити для наступних задач коефіцієнт кореляції R та детермінації, знайти параметри лінійної регресії.

а) Результати вимірювання чутливості відео y_i та звукового каналів x_i наведено в таблиці:

y_i	250	200	180	160	140	110	100	95	90	85	80	75	80	70	65	60	55
x_i	180	230	240	250	300	320	330	340	350	360	370	380	390	400	410	420	430

б). Зі старшого класу навмання вибраної середньої школи було відібрано групу учнів. Дані про їх середньорічні оцінки з математики та решти дисциплін в балах наведено в таблиці:

$Y = y_i$	45	25	48	52	54	51	59	60	62	69	72	78	76	80	82	85	81	90	93
$X = x_i$	30	35	31	38	41	48	50	55	51	58	60	59	65	73	78	71	79	80	81

в) Конденсатор було заряджено до повної напруги в певний момент часу t, після цього він починає розряджатися. Залежність напруги Y від часу розряджання X наведено в таблиці:

$Y = y_i$	100	85	70	65	60	55	50	45	40	35	30	25	22	20
$X = x_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

г) Результати вимірювання чутливості Y відеоканалу та звукового каналу X наведено в таблиці:

$Y = y_i$	240	200	190	180	170	160	150	140	130	120	110	100	90	80	70	65	60	55	50	45
$X = x_i$	170	180	200	230	240	250	280	300	310	320	330	350	380	400	410	420	430	440	450	460

36. У результаті спостережень одержано статистичний розподіл 100 га ріллі за кількістю внесених добрив X і урожайністю Y. Вибрати форму залежності

між випадковими величинами *X* і *Y*, знайти рівняння ліній регресії й оцінити тісноту зв'язку.

$X \backslash Y$	10	12	14	16	18	20	n_{x_i}
10	9	4	1				14
30	1	10	9	3			23
50		2	6	14	6		28
70			1	10	18	6	35
n_{y_j}	10	16	17	27	24	6	10

37. Виготовлені в цеху втулки сортувалися за відхиленням внутрішнього діаметра *X* і зовнішнього *Y*. Спільний статистичний розподіл ознак *X* і *Y* наведено в таблиці:

$X = x_j$, мм	$Y = y_i$, мм				
	0,002	0,004	0,006	0,008	n_{yi}
0,01	1	3	4	2	
0,02	2	2	24	10	
0,03	4	15	8	3	
0,04	4	6	8	2	
n_{xj}					

Обчислити R, $\bar{y}_{x=0,03}$, $\bar{x}_{y=0,04}$.

38. Розбіжність вимірів діаметрів кульок $X = x_i$ є випадковою величиною, що має закон розподілу $N(a;\ 4)$. При рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ перевірити правильність $H_0 : a = 240$ мм, якщо альтернативна гіпотеза $H_\alpha : a > 240$ мм, коли відомо, що $\sigma_Г = 4$ мм і вибіркове середнє значення виміряних у 100 однотипних кульок $\bar{x}_В = 225$ мм.

39. Проведено 10 незалежних експериментів над випадковою величиною *X*, що має нормальний закон розподілу з невідомими значеннями a, σ. Наслідки експериментів подано у вигляді статистичного ряду:

x_i	2,5	2	–2,3	1,9	–2,1	2,4	2,3	–2,5	1,5	–1,7
n_i	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

При рівні значущості $\alpha = 0{,}001$ перевірити правильність нульової гіпотези $H_0 : a = 0{,}9$, при альтернативній гіпотезі $H_\alpha : a < 0{,}9$.

40. Реалізувавши вибірку з генеральної сукупності, ознака якої *X* має нормальний закон розподілу, дістали статистичний розподіл:

x_i	6	7	8	9	10	11	12	13	14

n_i	1	3	6	8	6	6	5	3	2

При рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ перевірити правильність нульової гіпотези $H_0 : a = 8$, якщо альтернативна гіпотеза $H_\alpha : a \neq 8$.

41. Користуючись критерієм Пірсона при рівні значущості 0,05, встановити чи узгоджується гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності з даними вибірки об'єму $n = 200$:

x_i	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,1	2,3
n_i	6	9	26	25	30	26	21	24	20	8	5

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Андронов А. М., Е. А. Копытов, Л. Я. Гринглаз Теория вероятностей и математическая статистика — СПб.: Питер, 2004 — 464 с.

2. Берк К., Кэйри П. Анализ данных с помощью Microsoft Excel.: Пер. с англ. –М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. –560 с.:

3. Валь О. Д., С. І. Королюк Теорія ймовірностей… від найпростішого: навчальний посібник. Чернівці: Книги-ХХІ, 2004 —160 с.

4. Вентцель Е. С. Теория вероятностей: учеб. для вузов. М.: Высш. шк., 1999 — 576 с.

5. Волощенко А. Б., Джалладова І. А. Теорія ймовірностей та математична статистика: Навч.-метод. посібник для сам. вивчення дисц. — К.: КНЕУ, 2003. — 256 с.

6. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для вузов. 9-е изд., стер. М.: Высш. шк., 2003. – 479 с.

7. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. Учебное пособие для втузов. М.: "Высшая школа", 1970.

8. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1987. – 400 с.

9. Жлуктенко В. І., Наконечний С. І. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч.-метод. посібник. У 2 ч. – Ч. 1. Теорія ймовірностей. К.: КНЕУ, 2000. – 304 с.

10. Жлуктенко В. І., Наконечний С. І. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч.-метод. посібник. У 2 ч. – Ч. 2. Математична статистика. К.: КНЕУ, 2001. – 336 с.

11. Іванюта І.Д., Рибалка В. І., Рудоміно-Дусятська І. А. Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики: навчальний посібник, – Київ: «Слово», 2006 –272с.

12. Руденко В. М. Математична статистика. Навч. посіб. – К.: Центр учбової літератури, 2012. – 304 с.

ДОДАТОК

Таблиця 1. Значення функції Гауса $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

Таблиця 2. Значення функції Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4986	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

Таблиця 3. Таблиця значень $t_\gamma = t(\gamma, n)$

$n \backslash \gamma$	0,95	0,99	0,999	$n \backslash \gamma$	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,001	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Таблиця 4. Таблиця значень $q = q(\gamma, n)$

$n \backslash \gamma$	0,95	0,99	0,999	$n \backslash \gamma$	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	От, 46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,16	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Таблиця 5. Критичні точки розподілу χ^2

Число степенів вільності k	Рівень значущості α					
	0,01	0,025	0,05	0,98	0,975	0,59
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

ЗМІСТ

Навчально-методичний посібник з курсу «Теорія ймовірностей та математична статистика», для студентів 2-го курсу інженерно-технічного факультету спеціальності 123 — «Комп'ютерна інженерія»

Укладачі: Мамай Л.М., канд. фіз.-мат наук

Рецензенти: — доктор фіз.-мат. наук, професор кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу Сливка-Тилищак Г. І.

Відповідальний за випуск: Туряниця І.І., канд. фіз.-мат. наук, професор, декан інженерно-технічного факультету.

Даний навчально-методичний посібник розглянуто та схвалено на засіданні кафедри комп'ютерних систем та мереж, протокол № 7 від 28. 02. 2018р. та методичної комісії інженерно-технічного факультету, протокол № 3 від березня 2021 р.