МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІНЖЕНЕРНО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА КОМП'ЮТЕРНИХ СИСТЕМ ТА МЕРЕЖ

Король І. Ю., Мамай Л. М., Гапак О. М.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ЗАВДАННЯ
ДО ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ З КУРСУ

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

ЧАСТИНА І

для студентів 2-го курсу інженерно-технічного факультету,
спеціальність "Комп'ютерні системи та мережі"

Ужгород – 2013

Король І. Ю. Методичні вказівки і завдання до лабораторних робіт з курсу "Теорія ймовірностей та математична статистика", частина 1, для студентів 2-го курсу інженерно-технічного факультету спеціальності "Комп'ютерні системи та мережі"/ І. Ю. Король, Л. М. Мамай, О. М. Гапак.— Ужгород: видавництво УжНУ "Говерла", 2013.—60 с.

Укладачі: Король І.Ю., канд. фіз.-мат. наук, доцент;
Мамай Л.М., канд. фіз.-мат наук;
Гапак О.М., канд. пед. наук

Рецензент: Сливка-Тилищак Г. І., канд. фіз.-мат наук, доцент

Відповідальний за випуск: Король І. Ю., канд. фіз.-мат. наук, доцент,
зав кафедри комп'ютерних систем та мереж

Дані методичні вказівки розглянуто та схвалено на засіданні кафедри комп'ютерних систем та мереж, протокол № 8 від 25. 03. 2013р. та методичної комісії інженерно-технічного факультету, протокол № 1 від 18. 04. 2013 р.

ВСТУП

Методи теорії ймовірностей часто застосовуються в різних сферах науки і техніки: в теорії надійності, теорії масового обслуговування, в теоретичній фізиці, геодезії, астрономії, теорії помилок спостережень, теорії автоматичного управління, загальній теорії зв'язку та в багатьох інших науках. Із теорією ймовірностей тісно пов'язана математична статистика — розділ математики, в якому за допомогою математичних методів систематизують, опрацьовують і застосовують статистичні дані для наукових і практичних висновків.

Глибоке засвоєння основних понять та методів теорії ймовірностей сприяє вивченню загально-інженерних та спеціальних дисциплін. Зокрема теорія випадкових процесів широко використовується в теорії керування при створенні високонадійних систем, теорії масового обслуговування, теорії надійності та багатьох інших важливих напрямах сучасної науки і техніки.

Мета даних методичних вказівок — ознайомити студентів з основними поняттями, методами, теоремами та формулами теорії ймовірностей та математичної статистики. Виробити тверді навики дослідження та розв'язування певного кола задач, які мають відношення до інженерно-технічних спеціальностей, набути необхідні навики для практичного застосування теоретичного матеріалу, використовуючи табличний процесор Microsoft Excel та середовище MathCad.

У першій частині рекомендованих методичних вказівок подані чотири лабораторні роботи, які охоплюють теми: випадкові події та випадкові величини. До кожної роботи даються короткі теоретичні відомості, розглядаються типові приклади з відповідної теми та проводиться детальне пояснення процесу їх розв'язання як "вручну" так з використанням табличного процесору Microsoft Excel або середовища MathCad. Крім того запропонована добірка вправ для самостійного розв'язування, до кожної з яких наведено відповідь.

Лабораторна робота № 1

Тема: Класичне означення ймовірностей. Елементи комбінаторики. Основні теореми теорії ймовірностей**.**

Мета роботи: Вивчення можливостей пакету ***Microsoft Excel*** для розв'язання задач з теорії ймовірностей з використанням елементів комбінаторики, класичного означення ймовірностей та основних теорем теорії ймовірностей.

Теоретичні відомості

Основні означення

Стохастичним експериментом (***випробуванням***) називається експеримент, результат якого неможливо точно передбачити наперед.

Подія або ***випадкова подія*** — це результат стохастичного експерименту, все те, що може відбуватися або не відбуватися при даному випробуванні.

Елементарна подія — це така подія, що не може бути розкладена на більш прості.

Якщо в результаті експерименту, здійснюваного з додержанням певного комплексу умов, певна подія обов'язково настає, то вона називається ***достовірною***. Достовірна подія позначається символом Ω.

Подія називається ***неможливою***, якщо в результаті експерименту, проведеного з додержанням певного комплексу умов, вона не настає ніколи. Неможлива подія позначається символом ∅.

Простір елементарних подій даного випробування — це вся сукупність можливих результатів експерименту. Дану множину теж позначають $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n\}$, де $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n$ — елементарні події;

Повною групою подій називається така сукупність подій, сума яких утворює весь простір елементарних подій даного експерименту.

Дві несумісні випадкові події, що утворюють повну групу, називають ***протилежними***.

Випадкові події є ***рівноможливими***, якщо реалізація однієї не має жодних переваг перед реалізацією іншої.

Випадкові події є ***несумісними***, якщо в результаті випробування поява однієї події заперечує можливість появи іншої.

Дві події називаються ***сумісними***, якщо поява однієї з них не виключає появи іншої в одному і тому ж випробуванні.

Подія A називається ***сумою подій*** B і C, тобто $A=B+C$ або $A=B\bigcup C$, якщо при випробуванні відбувається принаймні одна із цих подій.

Подія A називається ***добутком подій*** B і C, тобто $A=B\cdot C$ або $A=B\bigcap C$, якщо в результаті випробування відбуваються як подія B, так і подія C.

Незалежними подіями називаються такі події, коли ймовірність настання довільної з них не залежить від того, відбулася інша подія чи ні.

Декілька подій називають ***незалежними в сукупності*** (або просто незалежними), якщо незалежні кожні дві з них і незалежні кожна подія і всі можливі добутки інших.

Випадкові події A і B називають ***залежними***, якщо ймовірність появи однієї з них залежить від появи або непояви іншої.

Ймовірність події B, обчислена в припущенні, що подія A відбулася, називають ***умовною ймовірність*** події B і позначають $P(B/A)$ або $P_A(B)$.

Чисельну міру об'єктивної можливості реалізації випадкової події в даному випробуванні називають ***ймовірністю*** цієї ***події***.

Класичне означення ймовірності. Елементи* комбінаторики *в теорії ймовірностей.

Ймовірністю випадкової події А називається невід'ємне число $P(A)$, що дорівнює відношенню числа елементарних подій m $(0 \le m \le n)$, які сприяють події A, до кількості всіх елементарних подій n простору **Ω**:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \qquad (1.1)$$

Для неможливої події $P(\varnothing) = 0$, бо $m = 0$; для достовірної події $P(\Omega) = 1$, оскільки $m = n$; для довільної випадкової події $0 \le P(A) \le 1$.

У багатьох випадках для знаходження $\boldsymbol{n}$ та m використовують наступні елементи комбінаторики: ***перестановки, розміщення*** та ***комбінації.***

Сполуками називаються різні підмножини, утворені з елементів універсальної множини, що відрізняються елементами або порядком цих елементів.

Перестановками називаються сполуки з n елементів, що відрізняються лише порядком цих елементів. Число перестановок із n елементів позначають через P_n і знаходять за формулою

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n! \quad (0! = 1) \qquad (1.2)$$

Розміщеннями із n різних елементів по k $(0 < k < n)$ називають такі впорядковані множини, кожна з яких містить k елементів і які відрізняються між собою порядком розташуванням цих елементів або хоча би одним елементом. Кількість таких множин позначають через A_n^k і знаходять за формулою

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-1) \cdot \ldots (n-k+1). \qquad (1.3)$$

Комбінаціями з n елементів по k $(0 < k < n)$ називають такі множини із k елементів, взятих з даних n елементів, що відрізняються між собою хоча б одним елементом без врахування їх порядку. Кількість таких множин позначають через C_n^k і знаходять за формулою

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{1.4}$$

Значне число комбінаторних задач розв’язують використовуючи ***комбінаторні принципи* — правило суми** та ***правило добутку.***

Правило суми. Якщо елемент A можна вибрати m способами, а елемент B — n несумісними способами, то вибрати або A, або B можна $m+n$ способами

Правило добутку. Якщо елемент A можна вибрати m способами, а елемент B при довільному виборі A — n способами, то вибір пари елементів і A і B може бути здійснений $m \cdot n$ способами.

Розв’язуючи комбінаторну задачу, перш за все потрібно ***встановити наступне***:

1) усі елементи множини використовуються чи ні? Якщо використовуються всі, то це — перестановка;
2) важливий порядок розміщення елементів чи ні? Якщо порядок важливий, то це розміщення. У протилежному випадку — комбінація.

Основні теореми теорії ймовірностей

Теорема 1.1 (теорема додавання ймовірностей несумісних подій) Ймовірність суми (об’єднання) двох несумісних випадкових подій дорівнює сумі їх ймовірностей:

$$P(A+B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B). \tag{1.5}$$

Теорема 1.2 Якщо випадкові події $A_1, A_2, ..., A_n$ попарно несумісні, то ймовірність появи хоча би однієї з цих подій дорівнює сумі їх ймовірностей:

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n). \tag{1.6}$$

Теорема 1.3 Сума ймовірностей повної групи випадкових подій дорівнює одиниці:

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1. \tag{1.7}$$

Наслідок 1.1 Дві протилежні події A та $\overline{A}$ утворюють повну групу $A + \overline{A} = \Omega$, тому справедлива рівність $P(A + \overline{A}) = P(\Omega) = 1$, з якої одержуємо формулу

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A). \tag{1.8}$$

Теорема 1.4 (теорема множення ймовірностей незалежних подій) Ймовірність сумісного настання двох ***незалежних*** подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(A \cdot B) = P(A)P(B). \tag{1.9}$$

Узагальнення для трьох і більше несумісних подій записують таким чином: $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

Наслідок 1.2 Ймовірність сумісної появи декількох подій, незалежних в сукупності, дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)\dots P(A_n). \tag{1.10}$$

Теорема 1.5 Ймовірність появи хоча б однієї з подій $A_1, A_2, \dots, A_n$, незалежних в сукупності, обчислюється за формулою

$$P(A) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\dots P(\overline{A_n}). \qquad (1.11)$$

Теорема 1.6 (теорема множення ймовірностей залежних подій) Ймовірність сумісної появи двох випадкових події A та B визначається добутком ймовірності однієї з цих подій на умовну ймовірність іншої при умові, що перша подія відбулася:

$$P(A \cdot B) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A). \qquad (1.12)$$

Звідси

$$P_A(B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)}, \text{ якщо } P(A) \neq 0 \text{ або } P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ якщо } P(B) \neq 0. \qquad (1.13)$$

У випадку n залежних випадкових подій $A_1, A_2, ..., A_n$

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 A_2}(A_3) \dots P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n). \qquad (1.14)$$

Теорема 1.7 (***теорема додавання ймовірностей сумісних подій)*** Якщо випадкові події A і B сумісні, то ймовірність їх суми (об'єднання) дорівнює сумі їх ймовірностей без ймовірності їх сумісної появи, тобто

$$P(A + B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) \qquad (1.15)$$

Зауваження 1.1 Якщо випадкові події A та B незалежні, то формула (1.15) набуває вигляду

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B).$$

Якщо випадкові події A та B залежні, то

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P_A(B).$$

Формула повної ймовірності. Формула Байєса

Теорема 1.8 Якщо випадкова подія A може відбутись лише сумісно з однією з несумісних подій $H_1, H_2, ..., H_n$, що утворюють повну групу, тоді ймовірність події A обчислюється за формулою ***повної ймовірності***:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A). \qquad (1.14)$$

Групу подій $H_1, H_2, ..., H_n$ називають ***гіпотезами***, оскільки невідомо наперед, при якій з них відбудеться подія A.

Щоб перерахувати ймовірність гіпотез, при умові, що подія A відбулася, використовують ***формулу Байєса:***

$$P_A(H_k) = \frac{P(H_k) P_{H_k}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) P_{H_i}(A)}, \; k = 1, 2, ..., n. \qquad (1.15)$$

Приклади виконання завдань

Приклад 1.1 Скільки перестановок можна утворити із трьох букв A, $Б$ і B?

◀ Можна утворити шість перестановок: АБВ, АВБ, ВАБ, ВБА, БАВ, ВБА, якщо букви не повторюються, тоді маємо 3!=6. ▶

Приклад 1.2 Скільки розміщень по дві букви можна скласти із трьох букв А, Б і В?

◀ Із трьох букв А, Б і В можна скласти шість розміщень по дві букви: АБ, БА, АВ, ВА, БВ, ВБ. За формулою (1.2) знаходимо $A_3^2 = 3\cdot(3-1) = 6$.▶

Зауваження 1.2 Факторіал можна обчислити, використовуючи функцію Excel ***ФАКТР,*** яка активізується за допомогою команд ***Вставка⇒ Функция⇒Математические⇒ФАКТР*** (у поле ***"Число***"— потрібно ввести невід'ємне ціле число (n), факторіал якого потрібно знайти)

Обчислити ***число розміщень*** можна за допомогою функції ***ПЕРЕСТ (число; число_выбранных),*** яку викликають за допомогою команд ***Вставка⇒ Функція⇒Статистические⇒ПЕРЕСТ.*** Відкриється діалогове вікно (Рис1.1), де в поле ***«число»*** — необхідно ввести невід'ємне ціле число (n), яке задає кількість елементів, а в поле ***«число_выбранных»*** — ціле число (m), що задає кількість елементів у кожному розміщенні.

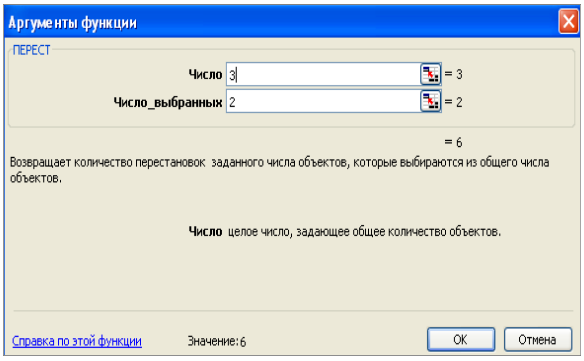


Рис1.1

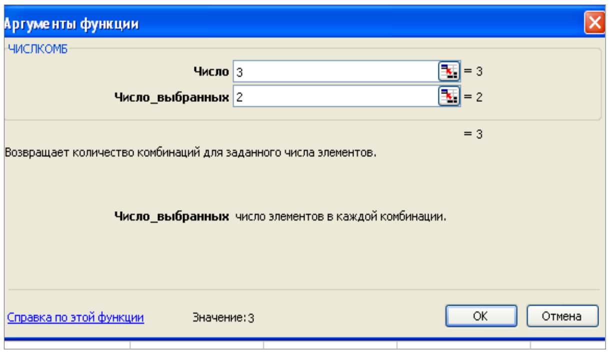


Рис1.2

Приклад 1.3 Скільки комбінацій по дві букви можна скласти із трьох букв А, Б і В?

◀ Із трьох букв А, Б і В по дві букви, без врахування порядку розташування, можна скласти всього три комбінації: АБ, АВ, БВ. За формулою (1.3) знаходимо: $C_3^2 = \dfrac{3!}{2!(3-2)!} = 3$. ▶

Зауваження 1.3 Обчислити C_3^2 можна за допомогою функції ***ЧИСЛОКОМБ (Вставка⇒ Функція⇒ Математические⇒ЧИСЛОКОМБ).*** Див. рис.1.2.

Приклад 1.4 У ящику міститься 15 однотипних деталей, із яких 6 бракованих, а решта — стандартні. Навмання з ящика вибирають одну деталь. Яка ймовірність того, що вона буде стандартною?

◄ Число всіх рівноможливих елементарних подій для цього експерименту: $n = 15$. Нехай A — подія, що полягає в появі стандартної деталі. Тоді число елементарних подій, що сприяють появі події A дорівнює $(m = 9)$. Згідно формули (1.1) отримаємо : $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$.►

Приклад 1.5 Маємо дев'ять однакових карток, на кожній з яких записано одну з цифр: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Навмання беруть чотири картки і розкладають в один рядок. Яка ймовірність того, що при цьому дістанемо 1 9 7 3?

	F	G	H
1			
2	n	=ПЕРЕСТ(9;4)	=3024
3	P(B)	=1/G2	=0,00033
4			

Рис 1.3

◄ Кількість елементарних подій множини Ω буде $n = A_9^4$. Кількість елементарних подій, що сприяють появі 1, 9, 7, 3 (подія ***B)*** дорівнює одиниці $(m = 1)$. Тоді $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{1}{A_9^4} = \frac{1}{3024}$. Число n — можна обчислити за допомогою функції ***ПЕРЕСТ(9;4)*** (Рисунок 1.3) ►

Приклад 1.6 В електричну мережу увімкнено чотири електролампочки. При проходженні електричного струму в мережі кожна електролампочка із певною ймовірністю може перегоріти або не перегоріти. Побудувати простір елементарних подій (множину Ω) — число електролампочок, які не перегорять, і простір таких випадкових події: A — із чотирьох лампочок перегорять не більше як дві; B — не менше як дві. Обчислити $P(A)$ $P(B)$ $P(A \cap B)$.

◄ Нехай A_i $\left(i = \overline{1,4}\right)$ події, що полягають у тому, що відповідно перша, друга, третя та четверта лампочки не перегорять, $\overline{A_i}$ — відповідні лампочки перегорять. Тоді простір елементарних подій буде:

$$\Omega = \{\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}, \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4, \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\overline{A_4}, \overline{A_1}A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4}, A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}, A_1A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4},$$
$$A_1\overline{A_2}A_3\overline{A_4}, A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4, \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3A_4, \overline{A_1}A_2A_3\overline{A_4}, \overline{A_1}A_2\overline{A_3}A_4, \overline{A_1}A_2A_3A_4,$$
$$A_1\overline{A_2}A_3A_4, A_1A_2\overline{A_3}A_4, A_1A_2A_3\overline{A_4}, A_1A_2A_3A_4\}.$$ Розмірність простору: $n = 16$.

Зауважимо, що в даному і в подібних випадках, коли кожний з досліджуваних об'єктів, з певною ймовірністю, може відбутися або не відбутись, кількість елементарних подій простору дорівнює 2^k, де k — кількість елементів (у даному випадку кількість лампочок). У цьому легко переконатись, якщо лампочці, що не перегоріла поставити у відповідність цифру 1, а лампочці, що перегоріла — цифру 0. Тоді простору елементарних подій можна поставити у відповідність послідовність двійкових наборів: 0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111, число яких дорівнює 2^4 =16. Запишемо простір випадкових подій:

$$A = \{A_1A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4}, A_1\overline{A_2}A_3\overline{A_4}, A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4, \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3A_4, \overline{A_1}A_2A_3\overline{A_4}, \overline{A_1}A_2\overline{A_3}A_4,$$
$$\overline{A_1}A_2A_3A_4, A_1\overline{A_2}A_3A_4, A_1A_2\overline{A_3}A_4, A_1A_2A_3\overline{A_4}, A_1A_2A_3A_4\}, \qquad m_1 = C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 = 11;$$

$$B=\{\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4,\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4,\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4,\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4,A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4,A_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4,A_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4,$$
$$A_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4,\overline{A}_1\overline{A}_2A_3A_4,\overline{A}_1A_2A_3\overline{A}_4,\overline{A}_1A_2\overline{A}_3A_4\},\qquad m_2=C_4^2+C_4^3+C_4^4=11;$$

$$A\cap B=\{A_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4,A_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4,A_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4,\overline{A}_1\overline{A}_2A_3A_4,\overline{A}_1A_2A_3\overline{A}_4,\overline{A}_1A_2\overline{A}_3A_4\},\quad m_3=C_4^2=6.$$

Тоді: $P(A)=\dfrac{m_1}{n}=\dfrac{11}{16}$,

$P(B)=\dfrac{m_2}{n}=\dfrac{11}{16}$,

$P(A\cap B)=\dfrac{m_3}{n}=\dfrac{6}{16}=\dfrac{3}{8}$ ►

	A	B	C	D
1	n	=2^4	=16	
2	m1	=ЧИСЛКОМБ(4;0)+ЧИСЛКОМБ(4;1)+ЧИСЛКОМБ(4;2)	=11	
3	m2	=ЧИСЛКОМБ(4;2)+ЧИСЛКОМБ(4;3)+ЧИСЛКОМБ(4;4)	=11	
4	m3	=ЧИСЛКОМБ(4;2)	=6	
5				
6		P(A)=m1/n	=B2/$B$1	=0,688
7		P(B)=m2/n	=B3/$B$1	=0,688
8		P(A∩B)=m3/n	=B4/$B$1	=0,375
9				

Рис 1.4

Використовуючи функцію "**ЧИСЛОКОМБ**", ймовірності подій можна обчислити в Excel (рис 1.4)

Приклад 1.7 У шухляді міститься 10 однотипних деталей, 6 із яких є стандартними, а решта — бракованими. Навмання із шухляди беруть чотири деталі. Обчислити ймовірність таких випадкових подій:

A — усі чотири деталі виявляться стандартними;

B — усі чотири деталі виявляться бракованими;

C — із чотирьох деталей виявляться дві стандартними і дві бракованими.

◄ Кількість усіх елементарних подій (множина Ω**:** $n=C_{10}^4=\text{\textit{ЧИСЛОКОМБ}}(10;4)=210$;

кількість елементарних подій, що сприяють події A**:** $m_1=C_6^4=\text{\textit{ЧИСЛОКОМБ}}(6;4)=15$;

кількість елементарних подій, що сприяють події B: $m_2=C_4^4=\text{\textit{ЧИСЛОКОМБ}}(4;4)=1$;

кількість елементарних подій, що сприяють події С:

$$m_3=C_6^2\cdot C_4^2=\text{\textit{ЧИСЛОКОМБ}}(6;2)*\text{\textit{ЧИСЛОКОМБ}}(4;2)=15\cdot 6=90.$$

Ймовірності цих подій будуть:

$$P(A)=\frac{m_1}{n}=\frac{15}{210}=\frac{1}{14},\quad P(B)=\frac{m_2}{n}=\frac{1}{210},\quad P(C)=\frac{m_3}{n}=\frac{90}{210}=\frac{3}{7}.$$ ►

Приклад 1.8 У ящику міститься 12 однакових деталей, серед яких чотири є бракованими, а решта — стандартними. Навмання із ящика беруть три деталі. Яка ймовірність того, що всі три деталі виявляться стандартними або бракованими?

	A	B	C
1	n	=ЧИСЛКОМБ(12;3)	
2			
3	m1	=ЧИСЛКОМБ(8;3)	=56
4	m2	=ЧИСЛКОМБ(4;3)	=4
5			
6			
7	P(A)	=B3/B1	=0,255
8	P(B)	=B4/B1	=0,018
9	P(A)+P(B)	=B7+B8	=0,273

Рис. 1.5

◄ Множина Ω містить $n=C_{12}^3=220$ елементарних подій. Позначимо через A появу трьох стандартних деталей, а через B — трьох бракованих. Тоді кількість наслідків, що сприяють цим подіям буде: $m_1=C_8^3=56$ (для події A) та $m_2=C_4^3=4$ (для події B). Згідно (1.5) отримаємо:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=\frac{56}{220}+\frac{4}{220}=\frac{3}{11}.$$

На рисунку 1.5 вказано приклад обчислення ймовірностей подій, використовуючи Excel. ►

Приклад 1.9 Задана множина цілих чисел $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ $(n=12)$. Навмання беруть одне число. Яка ймовірність того, що це число виявиться кратним 3, коли відомо, що воно є непарне?

◄ Нехай подія A — поява числа кратного 3, а B — кратного 2. Тоді:

$A=\{3,6,9,12\}, m_1=4$; $B=\{2,4,6,8,10,12\}, m_2=6$; $A\cap B=\{6,12\}, m_3=2$;

$$P(A)=\frac{m_1}{n}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3};\ P(B)=\frac{m_2}{n}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2};$$

$$P(A\cap B)=\frac{m_3}{n}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6} \text{ або } P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{m_1}{n}\cdot\frac{m_2}{n}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}.$$

Згідно з формулою (1.13), маємо $P(A/B)=P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{1}{3}$.

Оскільки $P(A)\neq P_B(A)$, то події A і B залежні. ►

Приклад 1.10 Прилад складається з трьох елементів, що працюють незалежно один від одно. Ймовірність того, що перший елемент не вийде з ладу під час роботи приладу дорівнює 0,95; другого – 0,9; третього – 0,85. Яка ймовірність $P(A)$ того, що підчас роботи приладу не вийде з ладу хоча би один елемент?

◄ Нехай $P(A_1)=p_1=0{,}95$ — ймовірність того, що перший елемент не вийде з ладу. Для другого і третього елементів ці ймовірності становитимуть відповідно: $P(A_2)=p_2=0{,}9$; $P(A_3)=p_3=0{,}85$. Ймовірність того, що ці елементи вийдуть з ладу, дорівнюватиме відповідно:

$P(\overline{A}_1)=q_1=1-p_1=0{,}05$; $P(\overline{A}_2)=q_2=1-p_2=0{,}1$; $P(\overline{A}_3)=q_3=1-p_3=0{,}15.$

На підставі формули (1.11) маємо:

$P(A)=1-P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(\overline{A}_3)=1-0{,}05\cdot 0{,}1\cdot 0{,}15=1-0{,}0075=0{,}9925$. ►

Приклад 1.11 У ящику міститься 10 однотипних деталей, із них 6 стандартних , а решта браковані. Із ящика навмання беруть дві деталі і назад не повертають. Яка ймовірність того, що з ящика навмання вийнята деталь буде стандартна?

◄ Позначимо через A подію, яка полягає в тому, що з ящика вийнято навмання одну стандартну деталь після того, як з нього було вийнято дві деталі.

Розглянемо такі події:

H_1 — було взято дві стандартні деталі;

H_2 — було взято одну стандартну і одну браковану деталь;

H_3 — було взято дві браковані деталі

Обчислимо ймовірності гіпотез $P(H_i)$ та $P_{H_i}(A), (i=1,2,3)$. Отримаємо

$$P(H_1)=\frac{C_6^2}{C_{10}^2}=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}, \qquad P_{H_1}(A)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2},$$

$$P(H_2)=\frac{C_6^1\cdot C_4^1}{C_{10}^2}=\frac{6\cdot 4}{45}=\frac{8}{15}, \qquad P_{H_2}(A)=\frac{5}{8},$$

$$P(H_3)=\frac{C_6^0\cdot C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{1\cdot 6}{45}=\frac{2}{15},\qquad\qquad P_{H_3}(A)=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}.$$

Згідно формули (1.14) будемо мати:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{8}{15}\cdot\frac{5}{8}+\frac{2}{15}\cdot\frac{3}{4}=\frac{18}{30}=\frac{3}{5}=0{,}6\,.$$

Використання ЕТ Excel для обчислення $P(A)$ вказано на рисунку 1.5. ►

	A	B	E
1	Число станд.	6	
2	Число нестанд.	4	
3	Всього	10	
4	C_{10}^2=	=ЧИСЛКОМБ(10;2)	
5	P(H_1)=	=ЧИСЛКОМБ(6;2)/B4	
6	P(H_2)=	=ЧИСЛКОМБ(6;1)*ЧИСЛКОМБ(4;1)/B4	
7	P(H_3)=	=ЧИСЛКОМБ(4;2)/B4	
8	P(A/H_1)=	=(6-2)/(10-2)	
9	P(A/H_2)=	=(6-1)/(10-2)	
10	P(A/H_3)=	=6/(10-2)	
11	P(A)=	P(H_1)*P(A/H_1)+P(H_2)*P(A/H_2)+P(H_3)*P(A/H_3)=	
12		=B5*B8+B6*B9+B7*B10	=0,6
13			

Рис. 1.5

	A	B	C
1	P(H_1)=	0,6	
2	P(H_2)=	0,4	
3			
4	P(A\H_1)=	0,94	
5	P(A\H_2)=	0,98	
6			
7	P(A)=	P(H_1)*P(A\$H_1$)+P($H_2$)*P(A\$H_2$)	=0,956
8		=B1*B4+B2*B5	
9			
10	P(H_1\A)=	[P(H1)*P(A\H1)]/P(A)	=0,5899
11		=B1*B4/B8	
12			
13			

Рис. 1.6

Приклад 1.12 Деталі, виготовлені на заводі, попадають для перевірки їх стандартності до одного з двох контролерів. Ймовірність того, що деталь попаде до першого контролера, дорівнює 0,6, а другого — 0,4. Ймовірність того, що деталь буде визнана стандартною першим контролером, дорівнює 0,94, а другим — 0,98. Навмання вибрана деталь виявилась стандартною. Знайти ймовірність того, що деталь перевіряв перший контролер.

◄ Нехай A — випадкова подія, що вибрана деталь є стандартною. Позначимо через H_1 гіпотезу про те, що деталь перевіряв перший контролер, $P(H_1)=0{,}6$, а через H_2 — гіпотезу про те, що деталь перевіряв другий контролер $P(H_2)=0{,}4$. $P_{H_1}(A)$ — ймовірність того, що деталь буде визнана стандартною, якщо її перевіряв перший контролер. $P_{H_1}(A)=0{,}94$. Аналогічно $P_{H_2}(A)=0{,}98$. За формулою Байєса (1.15) при $k=1$ одержимо:

$$P_A(H_1)=\frac{P(H_1)P_{H_1}(A)}{\sum_{k=1}^{2}P(H_k)P_{H_k}(A)}=\frac{0{,}6\cdot 0{,}94}{0{,}6\cdot 0{,}94+0{,}4\cdot 0{,}98}=0{,}59\,.$$

На рисунку 1.6 наведені обчислення $P_A(H_1)$ в Excel ►

Теоретичні запитання до теми

1. Що називається стохастичним експериментом?
2. Які події називаються випадковими, достовірними, неможливими? Навести приклади.
3. Яка подія називається елементарною? Навести приклади.
4. Що називається простором елементарних випадкових подій? Навести приклади.
5. Які події називаються повною групою подій?
6. Які події називаються сумісними, несумісними, рівноможливими, протилежними?
7. Які події називаються незалежними, незалежними в сукупності, залежними?
8. Що називається ймовірністю події?
9. Дати класичне означення ймовірності випадкової події.
10. Що називається сполуками елементів певної множини?
11. Які сполуки елементів певної множини називаються перестановками, розміщеннями та комбінаціями?
12. За якими формулами обчислюються число перестановок, розміщень та комбінацій?
13. За якими функціями табличного процесора ***Microsoft Excel*** обчислюються перестановки, розміщення та комбінації?
14. Які є два основні правила комбінаторики?
15. Як визначити, з яким, із основних понять комбінаторики в даній ситуації ми маємо справу?
16. Дати означення суми випадкових подій. Як формулюють і якою формулою записують теорему додавання ймовірностей несумісних (попарно несумісних) подій?
17. За якою формулою обчислюють ймовірність появи хоча би однієї з попарно несумісних подій?
18. Чому дорівнює сума ймовірностей повної групи випадкових подій?
19. Як обчислюється ймовірність події $\overline{A}$, якщо відома ймовірність $P(A)$?
20. Дати означення добутку випадкових подій. Сформулювати теорему множення ймовірностей незалежних подій.
21. Як обчислити ймовірність появи хоча б однієї з подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$, незалежних в сукупності?
22. Як позначається та обчислюється умовна ймовірність?
23. Сформулювати теорему множення ймовірностей залежних подій.
24. Сформулювати теорему додавання ймовірностей сумісних подій.
25. Сформулювати теорему і записати формулу повної ймовірності.
26. Коли застосовують формулу Байєса та як її записують?

Завдання для самостійного розв'язування

Таблиця 1.1 Номери варіантів та відповідні їм завдання для самостійного розв'язування

Номер варіанту	Номери завдань	Номер варіанту	Номери завдань
1	1.1, 1.11, 1.21, 1.31	6	1.6, 1.16, 1.26, 1.36
2	1.12, 1.12, 1.22, 1.32	7	1.7, 1.17, 1.27, 1.37
3	1.3, 1.13, 1.23, 1.33	8	1.8, 1.18, 1.28, 1.38
4	1.4, 1.14, 1.24, 1.34	9	1.9, 1.19, 1.29, 1.39
5	1.5, 1.15, 1.25, 1.35	10	1.10, 1.20, 1.30, 1.40

1.1. На складі є 10 моніторів з заводу № 1 і вісім моніторів з заводу № 2. Навмання взято чотири монітори. Знайти ймовірність того, що серед них два монітори з заводу № 1 і два монітори з заводу № 2.

1.2. За підсумком року акції десяти фірм мали прибуток, чотирьох фірм знецінились, а акції шести фірм — зберегли свою номінальну вартість. Яка ймовірність того, що з випадково куплених шести акцій різних фірм, три матимуть прибуток?

1.3. Для молодіжної вечірки було заготовано 20 компакт-дисків, 7 з яких з інструментальною музикою. Знайти ймовірність того, що з чотирьох навмання відібраних компактів три будуть з інструментальною музикою.

1.4. У конверті 10 акцій, серед яких три фірми А. Навмання відібрано 4 акції. Яка імовірність того, що серед них буде одна акція фірми А?

1.5. Академічній групі, в якій 12 дівчат та 18 юнаків, запропоновано придбати 10 акцій банку А. Знайти ймовірність того, що власниками акцій стануть 4 юнаки та 3 дівчини, якщо розігрування здійснюється випадковим чином.

1.6. Серед 30 видів акцій будівельних організацій 19 стали прибутковими, 5 — збитковими, а 6 залишилися без змін. Яка ймовірність того, що серед п'яти навмання придбаних акцій різних видів, прибутковими виявляться три?

1.7. У цеху працює 10 верстатів-автоматів, кожний із яких може з певною ймовірністю перебувати в працездатному стані або в стані поломки. Яка ймовірність того, що під час роботи верстатів-автоматів із ладу вийдуть три з них?

1.8. Обчислити ймовірність того, що дні народження 10 осіб припадатимуть на різні місяці року.

1.9. В урні є 10 куль: 3 білі та 7 чорних. Яка ймовірність того, що витягнуті

навмання 3 кулі будуть: а) чорні? б) одна чорна, а дві білі?

1.10. В цеху працює 6 чоловіків і 4 жінки. За табельними номерами навмання відібрали 7 чоловік. Знайти ймовірність того, що серед них буде три жінки.

1.11. Три студенти складають на сесії екзамен з математики. Імовірність того, що перший складе екзамен, дорівнює 0,9, для другого та третього студентів ця ймовірність становить відповідно 0,8 і 0,7. Обчислити ймовірності таких випадкових подій: а) A — три студенти складуть екзамен; б) B — три студенти не складуть екзамену; в) C — два студенти складуть екзамен.

1.12. Для виготовлення деталі необхідно провести чотири незалежні технологічні операції. Імовірність допустити брак при виконанні першої технологічної операції $q_1 = 0{,}1$, а для другої, третьої і четвертої ці ймовірності дорівнюють відповідно $q_2 = 0{,}05$, $q_3 = 0{,}15$, $q_4 = 0{,}2$. Яка ймовірність того, що виготовлена деталь виявиться стандартною?

1.13. Прилад складається з трьох елементів, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що перший елемент не вийде з ладу під час роботи приладу дорівнює $p_1 = 0{,}9$. Для другого і третього елементів ця ймовірність відповідно $p_2 = 0{,}8$ і $p_3 = 0{,}7$. Обчислити ймовірність того, що під час роботи приладу з ладу вийде: а) A — три елементи; б) B — два елементи; в) C — один елемент; г) D — не вийде з ладу жодний елемент.

1.14. Робітник обслуговує три верстати-автомати, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що протягом години перший верстат потребує уваги робітника дорівнює 0,9, другий — 0,85, а третій — 0,8. Яка ймовірність того, що протягом години уваги робітника потребують а) A – два верстати; б) B – хоча би один із трьох?

1.15. Студент шукає потрібну йому формулу у трьох довідниках. Ймовірність того, що формула є в першому, другому і третьому довіднику, відповідно дорівнює 0,6; 0,7 і 0,8. Знайти ймовірність того, що формула є: а) лише в одному довіднику; б) тільки в двох довідниках; в) у всіх трьох довідниках.

1.16. Два мисливці влучають у ціль з ймовірностями 0,7 та 0,8, відповідно. Кожен з них робить один постріл. Яка ймовірність того, що: а) жоден не влучить? б) хоча б один влучить? в) лише один влучить у ціль?

1.17. У цеху є три резервні мотори, для кожного з яких імовірність бути ввімкненим у даний момент дорівнює 0,3. Знайти ймовірність того, що в даний момент ввімкнено: а) принаймні два мотори; б) принаймні один мотор.

1.18. Із партії товарів товарознавець вибирає вироби вищого сорту. Імовірність того, що навмання взятий виріб належить до вищого сорту, дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що із трьох виробів будуть

а) тільки два вищого сорту, б) жодного виробу вищого сорту

1.19. Від аеровокзалу відправились два автобуси. Імовірність своєчасного прибуття кожного з них дорівнює 0,92. Знайти імовірність такої події: а) A — обидва автобуси прибудуть своєчасно; б) B — тільки один автобус прибуде своєчасно.

1.20. Для сигналізації про аварію встановлено два незалежних сигналізатори. Ймовірність того, що при аварії сигналізатор спрацює, дорівнює 0,95 для першого сигналізатора і 0,9 для другого. Знайти ймовірність того, що при аварії спрацює а) тільки один сигналізатор. б) хоча б один сигналізатор.

1.21. На складі 70% кінескопів, виготовлених заводом №1, а решта – заводом №2. Ймовірність того, що кінескопом, виготовлений заводом №1, витримає гарантійний термін, дорівнює 0,8, а для заводу №2 – 0,9. Знайти ймовірність того, що навмання взятий кінескопом витримає гарантійний термін.

1.22. На конвеєр надходять деталі від трьох автоматів. Перший дає 90%, другий — 93%, а третій — 95% придатної продукції. Протягом зміни від першого автомата надходить 60, від другого — 50, від третього — 40 деталей. Знайти ймовірність потрапляння на конвеєр: а) нестандартної деталі; б)стандартної деталі.

1.23. Кількість вантажних автомобілів, що проїжджає по шосе повз заправку, відноситься до кількості легкових автомашин як 3:2. Імовірність того, що заправляється вантажівка — 0,1; легковик — 0,2. Яка ймовірність того, що машина, яка проїжджає по шосе, заправиться?

1.24. Маємо три партії деталей. Перша складається з 10 стандартних і 4 нестандартних, друга — із 14 стандартних і 4 нестандартних, третя — із 16 стандартних і 5 нестандартних деталей. Із навмання вибраної партії береться деталь. Знайти ймовірність того, що деталь буде стандартною

1.25. Для посіву пшениці заготовлено насіння, серед якого 95 % 1-го сорту, 3 % 2-го та 2 % 3-го сорту. Імовірність того, що з насінини виросте колосок, в якому не менш ніж 50 зерен, для 1-го сорту насіння становить 0,5, для 2-го сорту — 0,2, для 3-го — 0,1. Знайти ймовірність того, що навмання взятий колосок у разі такого посіву матиме не менш як 50 зерен.

1.26. На конвеєр надходять деталі від трьох автоматів. Перший дає 90%, другий — 93%, а третій — 95% придатної продукції. Протягом зміни від першого автомата надходить 60, від другого — 50, від третього — 40 деталей. Знайти ймовірність потрапляння на конвеєр нестандартної деталі.

1.27. Металеві заготівки для подальшої обробки надходять із двох цехів: 55 % із першого, 45 % із другого. При цьому продукція з першого цеху містить 3 %, а з другого цеху — 5 % браку. Знайти ймовірність того, що заготівка, яка надійшла на обробку придатна.

1.28. На двох верстатах-автоматах виробляються однакові заготівки, які транспортером перекидаються в одне і те саме місце. Продуктивність другого верстата в 1,5 раза більша, ніж першого. Перший верстат дає 5 % нестандартних заготівок, а другий — 93 % стандартних. Знайти ймовірність того, що взята навмання заготівка буде стандартна.

1.29. У лікарню поступають (у середньому) 50% хворих на грип, 30% хворих на ангіну та 20% хворих на запалення легенів. Ймовірність повного одужання від грипу дорівнює 0,7, від ангіни та запалення легенів — 0,8 та 0,9 відповідно. Знайти ймовірність того, що хворий одужає.

1.30. Кожний виготовлений заводом виріб може мати дефект. У цеху є три контролери. Перший виявляє дефект з імовірністю 0,09, другий — з імовірністю 0,95, третій — з імовірністю 0,91. Імовірності потрапляння деталі на перевірку до кожного контролера однакові. Визначити ймовірність того, що виріб буде забраковано.

1.31. На фабриці виготовляють гвинти. Перша машина виготовляє 25%, друга — 35%, третя — 40% усіх виробів. Частка браку відповідно 5%, 4% і 2%. Випадково вибраний гвинт виявився бракованим. Яка ймовірність того, що його зроблено першою машиною?

1.32. На складання агрегату надходять деталі, які виготовляються двома верстатами-автоматами. Перший верстат виготовляє в середньому 0,2% бракованих деталей, а другий 0,1%. На складання агрегату надійшла бракована деталь. Знайти ймовірність того, що вона виготовлена другим верстатом, якщо від першого верстата надійшло 2000 деталей, а від другого — 3000.

1.33. Деталі на конвеєр надходять із двох автоматів. Від першого — 60 %, від другого — 40 %. Перший автомат дає 2 %, а другий — 1 % браку. Деталь, яка надійшла на конвеєр, виявилась стандартною. Знайти ймовірність того, що цю деталь виготовлено другим автоматом.

1.34. Клапани, виготовлені цехом заводу, перевіряють три контролери. Ймовірність того, що клапан попаде на перевірку до першого контролера дорівнює 0,3, до другого — 0,5 і до третього — 0,2. Ймовірність того, що бракована деталь буде виявлена, для першого, другого і третього контролерів відповідно дорівнює 0,95; 0,9; 0,85. Під час повторної перевірки навмання вибрана деталь виявилась бракованою. Яка ймовірність того, що цю деталь перевіряв третій контролер?

1.35. Деталі виробляються на двох заводах. Обсяг продукції другого заводу в 3 разів перевищує обсяг продукції першого заводу. Частка браку на першому заводі 0,1, на другому — 0,05. Навмання взята деталь виявилася бракованою. Яка ймовірність того, що її випущено першим заводом?

1.36. Два працівники виготовили однакову кількість деталей. Ймовірність того, що перший зробить браковану деталь рівна 0,05; другий — 0,1.

При перевірці була виявлена бракована деталь. Знайти ймовірність того, що деталь була виготовлена другим працівником.

1.37. Маємо три партії однакових деталей. У першій 20 стандартних і 5 нестандартних, у другій — 15 стандартних і 3 нестандартні, у третій — 14 стандартних і 2 нестандартні деталі. Із навмання вибраної партії взяли деталь. Вона виявилася стандартною. Знайти ймовірність того, що цю деталь узято із третьої партії.

1.38. Пасажир для придбання квитка може звернутись до однієї з чотирьох кас. Відповідні ймовірності дорівнюють $p_1 = 0{,}2$, $p_2 = 0{,}3$, $p_3 = 0{,}4$, $p_4 = 0{,}1$. Імовірність того, що до моменту появи пасажира в касі буде квиток, дорівнює відповідно 0,6; 0,3; 0,8; 0,5. Пасажир звернувся до однієї із кас і купив квиток. Яка ймовірність того, що квиток пасажир придбав у першій касі?

1.39. Радіоприймач із ймовірностями $p_1 = 0{,}9$ та $p_2 = 0{,}1$ може належати до однієї з двох партій. Імовірність того, що радіоприймач пропрацює заданий проміжок часу без ремонту для цих партій відповідно дорівнює 0,8 і 0,6. Радіоприймач пропрацював заданий проміжок часу. Яка ймовірність того, що він належав до другої партії?

1.40. Партію виготовлених деталей перевіряли два контролери. Перший перевірив 45%, а другий — 55% деталей. Імовірність припуститися помилки під час перевірки для першого контролера становить 0,15, для другого — 0,1. Після додаткової перевірки в партії прийнятих деталей виявлено браковану. Знайти ймовірність помилки для першого контролера.

Лабораторна робота № 2

Тема: Послідовні незалежні випробування за схемою Бернуллі

Мета роботи: Використання можливостей пакету ***Microsoft Excel*** для розв'язання задач за схемою Бернуллі

Теоретичні відомості

Формула Бернуллі та наслідки з неї

Якщо кожний експеримент має лише два несуміжні наслідки (поява і не поява певної події), ймовірності яких відповідно p та q $(q = 1 - p)$відомі відомі, то послідовність таких незалежних однотипних випробувань мають назву ***випробування за схемою Бернуллі.***

Ймовірність того, що в результаті n незалежних експериментів за схемою Бернуллі подія A відбудеться m разів, обчислюється за ***формулою Бернуллі***:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}. \tag{2.1}$$

Наслідок 1. Ймовірність того, що в результаті n незалежних експериментів за схемою Бернуллі подія відбудеться від m_1 до m_2 разів, обчислюється за формулою:

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} C_n^m p^m q^{n-m} = \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}. \tag{2.2}$$

Наслідок 2. Ймовірність того, що в результаті n незалежних експериментів за схемою Бернуллі подія A відбудеться не більше m разів, обчислюється за формулою:

$$P_n(0 \le k \le m) = \sum_{k=0}^{m} C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{m} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}. \tag{2.3}$$

Наслідок 3. Ймовірність того, що в результаті n незалежних експериментів за схемою Бернуллі подія A відбудеться не менше m разів, обчислюється за формулою:

$$P_n(m \le k \le n) = \sum_{k=m}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = 1 - P_n(0 \le k \le m-1) = 1 - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}. \tag{2.4}$$

Наслідок 4. Ймовірність того, що в результаті n незалежних експериментів за схемою Бернуллі подія A відбудеться хоча б один раз, обчислюється за формулою:

$$P_n(0 \le m \le n) = 1 - q^n. \tag{2.5}$$

Найімовірнішим числом появи випадкової події A в результаті n незалежних експериментів за схемою Бернуллі називається таке число m_0, для якого ймовірність $P_n(m_0)$ перевищує або у всякому разі є не меншою за ймовірність кожного з решти можливих наслідків експериментів. Число m_0 називається ***модою*** і визначається нерівностями

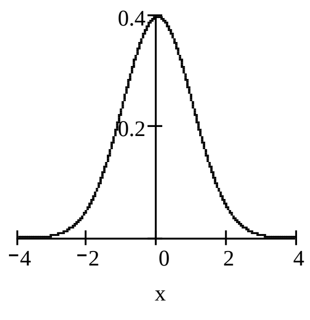
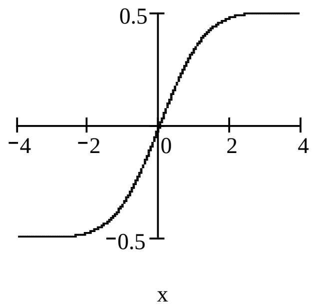
$$np - q \le m_0 \le np + p \text{ або } (n+1)p - 1 \le m_0 \le (n+1)p. \tag{2.6}$$

m_0 — ціле невід'ємне число, яке знаходиться між $(n+1)p-1$ та $(n+1)p$ Якщо $(n+1)p-1 \in Z$, то найбільш імовірних є два значення $(n+1)p-1$ та $(n+1)p$.

Локальна та інтегральна теореми Муавра-Лапласа

Знаходження ймовірностей $P_n(m)$ та $P_n(m_1 \le m \le m_2)$ за формулою Бернуллі ускладнюється при досить великих значеннях n та m. У таких випадках користуються наближеними асимптотичними формулами, які базуються на використанні функцій Гауса та Лапласа. Аналітичний вигляд функцій та основні їх властивості наведені у таблиці 2.1.

Таблиця 2.1 Основні властивості функцій Гауса та Лапласа

Функція Гауса	Функція Лапласа
$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$;	$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$;
Область визначення: $x \in (-\infty;+\infty)$;	Область визначення: $x \in (-\infty;+\infty)$;
$\varphi(-x) = \varphi(x)$ ($\varphi(x)$ парна);	$\Phi(-x) = -\Phi(x)$ ($\Phi(x)$ непарна)
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = 0$, $\varphi_{max} = \varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$;	$\lim\limits_{x\to-\infty} \Phi(x) = -0{,}5$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = 0{,}5$, $\Phi(0) = 0$, $\Phi(x) \approx 0{,}5$ для $\lvert x\rvert \ge 4$;
$\varphi(x)$ 	$\Phi(x)$ 

***Теорема* 2.1 (локальна теорема Муавра-Лапласа).** Якщо у кожному із n незалежних випробувань, проведених за схемою Бернуллі, ймовірність появи події A стала і відмінна від нуля та одиниці $(0 < p < 1)$, то ймовірність $P_n(m)$ того, що при цих n випробуваннях подія A настане рівно m разів обчислюється за асимптотичною формулою:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x_m), \tag{2.7}$$

де $x_m = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x)$ — функція Гауса.

***Теорема 2.*2 (інтегральна теорема Муавра-Лапласа).** Якщо ймовірність p настання успіху в кожному конкретному випробуванні, проведених за схемою Бернуллі, стала і відмінна від нуля та одиниці $(0 < p < 1)$, то ймовірність $P_n(m_1, m_2)$ того,

що при великій кількості випробувань успіх наступить від m_1 до m_2 разів ($m_1 \le m \le m_2$), визначається за асимптотичною формулою:

$$P_n(m_1, m_2) = P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (2.8),$$

де $x_1 = \dfrac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $\Phi(x)$ — функція Лапласа.

За допомогою інтегральної формули Муавра-Лапласа (2.8) можна оцінити ймовірність того, що різниця між відносною частотою появи події $P^*(A) = \dfrac{m}{n}$ й істинним значенням імовірності p успіху в конкретному випробуванні не більша за наперед задану величину.

Теорема 2.3 Нехай p – ймовірність появи випадкової події A в кожному експерименті за схемою Бернуллі, а $P^*(A) = \dfrac{m}{n}$ — відносна частота появи цієї події при n випробуваннях. Тоді ймовірність відхилення відносної частоти від сталої ймовірності p з похибкою ε $(\varepsilon > 0)$, обчислюється за формулою:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \qquad (2.9)$$

Формула Пуассона для малоймовірних випадкових подій

Точність локальної та інтегральної формули Лапласа (2.7), (2.8) для великих значень n знижується з наближенням p до нуля. Справедлива теорема.

Теорема 2.4. (теорема Пуассона). Якщо $n \to \infty$ і $p \to 0$, причому $np = \lambda$ в кожному з випробувань Бернуллі, то ймовірність появи випадкової події m раз ($0 \le m \le n$) обчислюється за формулою Пуассона:

$$P(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}. \qquad (2.10)$$

Із формули (2.10) випливає, що

$$P(m_1 \le m \le m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} P(m) = \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}. \qquad (2.11)$$

Зауваження 2.1 У таблиці 2.2 наведені критерії застосування формул Бернуллі, Муавра-Лапласа та Пуассона для обчислення ймовірностей подій у випробуваннях, проведених за схемою Бернуллі.

Таблиця 2.2 Критерії застосування формул Бернулі, Муавра-Лапласа та Пуассона

Формула Бернуллі	Теореми Муавра-Лапласа	формула Пуассона
При невеликих n	$n \ge 100$ $npq > 20$	$n \to \infty,\ p \to 0$ $0 \le np \le 10$ $(0 \le \lambda \le 10)$

Приклади виконання завдань

Приклад 2.1 Прилад складається з п'яти блоків, які можуть виходити з ладу незалежно один від одного. Ймовірність того, що блок не вийде з ладу, є величиною сталою і дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того що: а) не вийдуть з ладу два блоки; б) не більше ніж два блоки; в) не менше ніж два блоки.

◀ За умовою задачі маємо: $p=0{,}9$; $q=q-1=0{,}1$; $n=5$. Тоді згідно з формулами (2.1), (2.3), (2.4) маємо:

а) $P_5(2)=C_5^2 p^2 q^3=\frac{5!}{2!3!}\cdot 0{,}9^2\cdot 0{,}3^3=0{,}0081$

б) $P_5(0\le m\le 2)=\sum\limits_{m=0}^{2} C_5^m p^m q^{5-m}=C_5^0 p^0 q^5+C_5^1 p^1 q^4+C_5^2 p^2 q^3=0{,}00856$

в) $P_5(2\le m\le 5)=\sum\limits_{m=2}^{5} C_5^m p^m q^{5-m}=1-\sum\limits_{m=0}^{1} C_5^m p^m q^{5-m}=1-0{,}00046=0{,}99954$. ▶

Задачі, пов'язані формулою Бернуллі, можна розв'язувати з використанням функції ***БИНОМРАСП*** (категорія ***Статистические***) пакету Excel, яка має вигляд:

БИНОМРАСП (Число _ успехов; Число _ испытаний; Вероятность _ успеха; Интегральная);

Число_успехов — це кількість успішних випробувань (m);

Число_испытаний — це число незалежних випробувань (n);

Вероятность_успеха — ймовірність успіху кожного випробування (p);

Интегральная — це логічне значення, яке визначає форму функції:

– якщо аргумент задати рівним 0 (***ЛОЖЬ***), то функція ***БИНОМРАСП*** повертає значення ймовірності $P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}$

– якщо аргумент задати рівним 1 (***ИСТИНА***), то функція ***БИНОМРАСП*** повертає значення $P_n(0\le k\le m)=\sum\limits_{k=0}^{m} C_n^k p^m q^{n-m}$.

На рисунку 2.1 наведено застосування функції ***БИНОМРАСП*** для розв'язання прикладу 2.1.

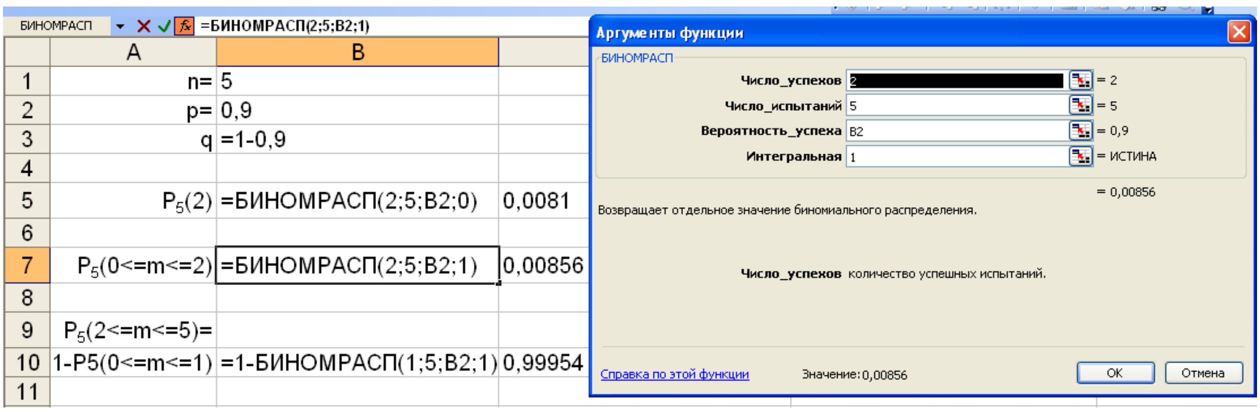


Рис 2.1

Приклад 2.2 Ймовірність появи випадкової події A в кожному з $n=8$ незалежних випробувань є величиною сталою і дорівнює 0,5 ($p=0{,}5$). Користуючись функцією **БИНОМРАСП** обчислити ймовірність подій для m від 0 до 8 і розмістити їх у вигляді таблиці. Визначити найбільш ймовірне число появи події.

◄ Результат використання функції **БИНОМРАСП** наведено на рис. 2.2.

ПУАССОН =БИНОМРАСП(J5;$B$1;$B$2;0)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	*n*=	8										
2	*p*=	0,5										
3	*q*=	0,1			*p(n+1)-1=*	3,5	<=m₀<=	4,5	*p(n+1)*			
4												
5	*m*	0	1	2	3	4	5	6	7	8		
6	$P_8(m)$	1/256	1/32	7/64	7/32	35/128	7/32	7/64	1/32	=БИНОМРАСП(J5;$B$1;$B$2;0)		

Рис. 2.2

Зауваження 2.2 У формулах використовуються адреси зі знаками “$”, наприклад $B$1, $B$2, які називаються ***абсолютними адресами комірок***. Вони не змінюються в процесі копіювання формул.

Зауваження 2.3 Отримати результат у вигляді дробу можна використовуючи форматування вигляду

Формат ячеек > число > дробный > дробями до трех цифр

Найбільш ймовірне число k можна одержати з нерівностей (2.6) $(n+1)p-1\le$ $\le m_0 \le (n+1)p$. Підставивши значення $n=8$ та $p=0{,}5$ отримаємо $3{,}5 \le m_0 \le 4{,}5$ (див. рис. 2.2). Отже $m_0=4$.►

Приклад 2.3 Підприємство випускає 75% виробів 1-го сорту. Із партії готових виробів навмання беруть 400 виробів. Обчислити ймовірність таких випадкових подій: 1) виробів 1-го сорту буде 290 шт.; 2) 300 шт.

◄ За умовою маємо: $n=800$, $p=0{,}75$, $q=1-0{,}75=0{,}25$; $m=290, 300, 320$. Для розв’язання задачі використаємо локальну теорему Муавра-Лапласа (див.таблицю 2.2).

1) Обчислимо $\sqrt{npq}=\sqrt{400\cdot 0{,}75\cdot 0{,}25}=\sqrt{75}\approx 8{,}7$; $np=400\cdot 0{,}75=300$. Тоді $x_{290}=\dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}=\dfrac{290-300}{8{,}7}\approx -1{,}149$. За формулою (2.7) отримаємо

$P_{400}(290)=\dfrac{\varphi(-1{,}15)}{8{,}7}=\dfrac{\varphi(1{,}15)}{8{,}7}=\dfrac{0{,}2059}{8{,}7}=0{,}0237$; Аналогічні обчислення проведемо для другого випадку

2) $x_{300}=\dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}=\dfrac{300-300}{8{,}7}=0$;

$P_{400}(300)=\dfrac{\varphi(0)}{8{,}7}=\dfrac{0{,}3989}{8{,}7}=0{,}046$;

►

Зауваження 2.4. Значення функції $\varphi(x_m)$, $m=290, 300$ взято з таблиці 1 додатка 1.

	A	B	
1	*n*=	400	
2	*p*=	0,75	
3	*q*	=1-B2	
4			
5	$\sqrt{npq}$	=КОРЕНЬ(B1*B2*B3)	=8,66025
6			
7	*m*=	290	
8	$x_{m=}$	=(B7-$B$1*$B$2)/$B$5	
9	$P_{400}(m)$=		
10	$\frac{1}{\sqrt{npq}}*\frac{1}{\sqrt{2\pi}}*\exp\left(-\frac{x_m^{\ 2}}{2}\right)$	=(1/$B$5)*(1/КОРЕНЬ(2*3,14159))*EXP(-(B8^2)/2)	=0,0237
11			

Рис. 2.3

На рисунку 2.3 вказано спосіб розв'язання прикладу 2.3 (1), використовуючи ***Ms Excel.*** Для обчислення $\varphi(1{,}15)$ використано функцію користувача ***(1/КОРЕНЬ(2*3,14159))/EXP(-(1,15^2)/2)".***

Приклад 2.4 Верстат-автомат виготовляє однотипні деталі. Ймовірність того, що виготовлена одна деталь виявиться стандартною, є величина стала і дорівнює 0,95. За зміну верстатом було виготовлено 800 деталей. Яка ймовірність того, що стандартних деталей серед них буде : 1) від 720 до 780 шт.; 2) від 740 до 790 шт.?

◀ За умовою задачі $n=800$, $p=0{,}95$, $q=0{,}05$**;** $720\le m\le 780$, $740\le m\le 790$. Використаємо формулу (2.8). Отримаємо:

1) $\sqrt{npq}=\sqrt{800\cdot 0{,}95\cdot 0{,}05}=\sqrt{38}\approx 6{,}16;$ $np=800\cdot 0{,}95=760;$

$x_1=\dfrac{m_1-np}{\sqrt{npq}}=\dfrac{720-760}{6{,}16}=-\dfrac{40}{6{,}16}\approx -6.5;$ $x_2=\dfrac{m_2-np}{\sqrt{npq}}=\dfrac{780-760}{6{,}16}=\dfrac{20}{6{,}16}\approx 3.25$;

$P_{800}(720\le m\le 780)=\Phi(3{,}25)-\Phi(-6{,}5)=0{,}4993+0{,}5=0{,}999$;

$x_2=\dfrac{m_2-np}{\sqrt{npq}}=\dfrac{790-760}{6{,}16}\approx 4{,}87;$ $x_1=\dfrac{m_1-np}{\sqrt{npq}}=\dfrac{740-760}{6{,}16}\approx -3{,}25;$

$P_{800}(740\le m\le 790)=\Phi(4{,}78)-\Phi(-3{,}25)=\Phi(4{,}78)+\Phi(3{,}25)=0{,}5+0{,}4993=0{,}999$.

Зауваження. Для отримання значень $\Phi(x_1)$, $\Phi(x_2)$ та обчислення ймовірності можна використати систему Mathcad. Приклад застосування наведено на лістингу 2.1.▶

Лістинг 2.1

$n := 800$ $\quad m1 := 720$

$p := 0.95$ $\quad m2 := 780$ $\quad n\cdot p = 760$

$q := 1-p$

$x1 := \dfrac{m1-n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}$ $\quad x2 := \dfrac{m2-n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}$ $\quad \Phi(x) := \dfrac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\displaystyle\int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}}\,dt$

$x1 = -6.489$ $\quad x2 = 3.244$

$P_{800}\cdot(m1\le m\le m2) = P_{800}\cdot(m1, m2) = \Phi(x2)-\Phi(x1)$ $\qquad \Phi(x2)-\Phi(x1) = 0.999$

Приклад 2. 5 Радіоприлад містить 1000 мікроелементів, які працюють незалежно один від одного, при чому кожний може вийти з ладу з ймовірністю *p*=0,002. Знайти ймовірність таких випадкових подій:

1) під час роботи приладу з роботи вийдуть 3 мікроелементи;
2) від трьох до шести;

◀ За умовою задачі $n=1000$; $p=0{,}002$ $\lambda=np=2$, $m=3$ $(3\le m\le 6)$. Оскільки n велике, а p — мале число, то для обчислення ймовірності застосуємо формули (2.10) і (2.11). 1) Використаємо $P(m)=\dfrac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$ і при $m=3$ та $\lambda=2$ отримаємо $P(3)=\dfrac{2^3}{3!}e^{-2}=0{,}1804$. 2) Згідно формули (2.11) $P(m_1\le m\le m_2)=\sum\limits_{m=m_1}^{m_2}P(m)=\sum\limits_{m=m_1}^{m_2}\dfrac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$.

Тоді $P(3\le m\le 6)=\sum\limits_{m=3}^{6}P(m)=\sum\limits_{m=3}^{6}\dfrac{2^m}{m!}e^{-2}=e^{-2}\left(\dfrac{2^3}{3!}+\dfrac{2^4}{4!}+\dfrac{2^5}{5!}+\dfrac{2^6}{6!}\right)=0{,}3188$, або

$$P(3 \le m \le 6) = \sum_{m=0}^{6} P(m) - \sum_{m=0}^{2} P(m) = 0{,}3188.$$

Щоб обчислити відповідні ймовірності в Excel можна використати функцію ***“ПУАССОН”***, де аргумент x функції вказує — кількість успіхів m; ***“Среднее”*** — величину $\lambda = n \cdot p$; ***“Интегральная”*** — може приймати 0 (ЛОЖЬ) чи 1 (ИСТИНА) (в першому випадку “***ПУАССОН” повертає*** $P(m)$, в другому $P(0 \le k \le m)$). Приклад застосування функції “ПУАССОН” для розв’язання прикладу 2 5 наведено на рисунку 2.4

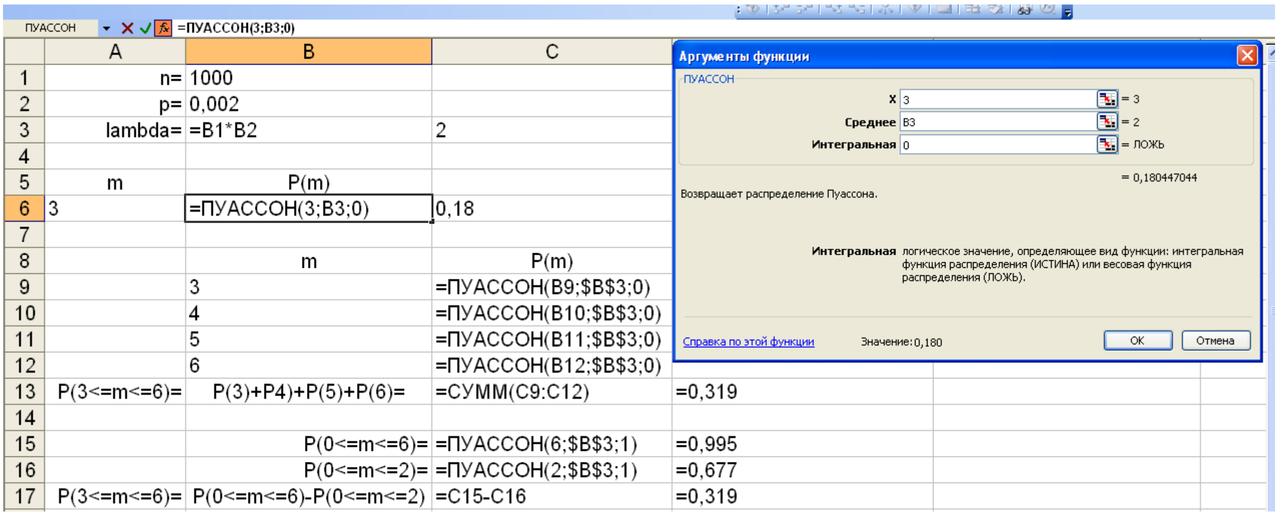


Рис. 2.4

Приклад 2.6 Ймовірність виходу з ладу виробу під час проведення експерименту дорівнює 0,2. Було перевірено 400 виробів. Знайти ймовірність того, що відносна частота появи події відхиляється від заданої ймовірності за абсолютною величиною не більше ніж на 0,01.

◀За умовою задачі n=400; p=0,2; q=0,8; ε =0,01. Підставивши ці значення в формулу (2.9), отримаємо:

$$P\left(\left|\frac{m}{400} - 0{,}2\right| \le 0{,}01\right) \approx 2\Phi\left(0{,}01\sqrt{\frac{400}{0{,}2 \cdot 0{,}8}}\right) = 2\Phi(0{,}5) = 2 \cdot 0{,}1915 = 0{,}383\,.$$ ▶

Теоретичні запитання до теми

1. Які експерименти називають експериментами за схемою Бернуллі?
2. Формула Бернуллі.
3. За якої умови формула Бернуллі застосовується для обчислення ймовірностей?
4. За допомогою якої функції в Excel реалізовуються обчислення за схемою Бернуллі?
5. За якими формулами знаходять ймовірність того, що події A відбудуться від m_1 до m_2 разів; менше m або не менше m разів у випробуваннях за схемою Бернуллі?
6. За якою формулою знаходять ймовірність появи події A хоча б один раз у n випробуваннях?

7. Записати формулу обчислення найімовірнішого числа появи випадкової події A в результаті n незалежних експериментів за схемою Бернуллі.
8. Яка функція називається функцією Гауса, які її властивості і графік?
9. Як можна обчислити функцію Гауса з допомогою Excel?
10. Яка функція називається функцією Лапласа, які її властивості і графік?
11. Як можна обчислити функцію Лапласа з допомогою MathCad?
12. Сформулювати локальну теорему Муавра-Лапласа.
13. Сформулювати інтегральну теорему Муавра-Лапласа.
14. За якою формулою обчислюється ймовірність відхилення відносної частоти від постійної ймовірності p з похибкою ε або чому дорівнює $P(|\frac{m}{n} - p| < \varepsilon)$? Сформулювати теорему.
15. Сформулювати теорему Пуассона. За яких умов використовується формула Пуассона?

Завдання для самостійного розв'язування

Таблиця 2.3 Номери варіантів та відповідні їм завдання для самостійного розв'язування

Номер варіанту	Номери завдань	Номер варіанту	Номери завдань
1	2.1, 2.11, 2.21, 2.31	6	2.6, 2.16 2.26 2.36
2	2.2, 2.12, 2.22, 2.32	7	2.7, 2.17 2.27 2.37
3	2.3, 2.13, 2.23, 2.33	8	2.8, 2.18 2.28 2.38
4	2.4, 2.14, 2.24, 2.34	9	2.9, 2.19, 2.29 2.39
5	2.15, 2.15, 2.25, 2.35	10	2.10, 2.20, 2.30 2.40

2.1. Ймовірність виготовлення робітником деталі відмінної якості становить 0,75. Яка ймовірність того, що серед 6 виготовлених робітником деталей, хоча б одна буде відмінної якості? Знайти найімовірніше число виготовлених робітником деталей відмінної якості й обчислити ймовірність цього числа**.**

2.2. Під час тестування з математики студент має дати правильні відповіді на п'ять запитань. Ймовірність того, що студент відповість на одне запитання, у середньому, дорівнює 0,8. Щоб скласти тест, студентові потрібно дати відповідь не менше ніж на три запитання. Знайти ймовірність того, що студент складе тест.

2.3. Ймовірність того, що електролампочка не перегорить при ввімкненні її в електромережу, є величина стала і дорівнює 0,95. а) Обчислити ймовірність того, що з шести електролампочок, увімкнених в електромережу незалежно (паралельно) не перегорять не менше як три.

б) Знайти найімовірніше число лампочок, які не перегорять і обчислити ймовірність цього числа.

2.4. На автобазі є 12 пасажирських автобусів. Імовірність того, що на маршрутну лінію вийде автобус, у середньому дорівнює 0,85. Знайти ймовірність того, що автобаза працюватиме в нормальному режимі, якщо для цього потрібно, аби на маршрутну лінію виїхало не менш як 9 автобусів.

2.5. Батарея зробила 14 пострілів по об'єкту, ймовірність влучення в який 0,2. Обчислити: а) найбільш імовірне число влучень і його ймовірність; б) ймовірність того, що було не менше 4-х влучень.

2.6. Вироби містять 5% браку. Знайти імовірність того, що серед п'яти виробів: а) не буде жодного бракованого; б) будуть два бракованих.

2.7. Імовірність настання події у кожному з 18 незалежних випробувань дорівнює 0,2. Знайти ймовірність настання цієї події принаймні двічі.

2.8. Імовірність виходу з ладу конденсатора дорівнює $\frac{3}{11}$. Навмання беруть 10 конденсаторів і вмикають паралельно в електричну мережу. Знайти найімовірніше число конденсаторів, які вийдуть із ладу, і обчислити відповідну ймовірність. $m_0 = 2; \quad P_{10}(2) \approx 0{,}3019897$.

2.9. Імовірність того, що студент складе іспит з математики, є величиною сталою і дорівнює в середньому 0,8. Нехай є група з восьми студентів. Знайти а) ймовірність того, що складуть іспит з математики не менше 4-х студентів; б) найімовірнішу кількість членів цієї групи котрі складуть іспит з математики, і обчислити відповідну ймовірність. ***Відповідь***: а) p =0,99;б) m_0 =7, p =0,336

2.10. Робітник обслуговує 10 верстатів-автоматів. Ймовірність того, що верстат потребує уваги робітника протягом однієї години в середньому складає 0,6. Знайти а) ймовірність того, що за 1 годину увагу робітника потребують від 4 до 6 верстатів (ураховуючи межі); б) найімовірніше число верстатів, які потребують увагу робітника протягом однієї години й обчислити ймовірність цього числа.

2.11. Ймовірність появи події в кожному випробуванні дорівнює 0,25. Яка ймовірність того, що при 300 випробуваннях успішними будуть: а) рівно 75 випробувань? б) не менше 85 випробувань?

2.12. У партії однотипних деталей стандартні становлять 82%. Навмання з партії беруть 400 деталей. Яка ймовірність того, що серед них, стандартних буде від 355 до 360. Знайти найімовірніше число появи стандартних деталей і обчислити відповідну ймовірність.

2.13. Фабрика випускає 75% виробів 1-го сорту. Із партії готових виробів навмання беруть 400 деталей. Обчислити ймовірності таких випадкових подій а) виробів 1-го сорту виявиться 290 шт.; б) від 300 до 320 шт.

2.14. В електромережу ввімкнено незалежно одну від одної 500 електролампочок, які освітлюють у вечірній час виробничий цех заводу.

Імовірність того, що електролампочка в електромережі не перегорить, є величиною сталою і дорівнює 0,8. а) Яка ймовірність того, що з 500 електролампочок не перегорить від 380 до 400 шт.? б) Знайти найімовірніше число електролампочок, які не перегорять і обчислити відповідну ймовірність.

2.15. Ймовірність виходу за час τ одного приладу дорівнює 0,1. Визначити ймовірність того, що за час τ зі ста приладів вийдуть з ладу: а) 11 приладів? б) від 6-ти до 18 приладів?

2.16. Відомо, що три чверті населення міста користується послугами кабельного телебачення. Знайти а) ймовірність того, що серед 300 мешканців такими послугами користується хоча б 230. б) найімовірніше число мешканців, що користуються послугами кабельного телебачення та обчислити його ймовірність.

2.17. У середньому 30 % акцій видавничих фірм протягом року стають збитковими. а) Яка ймовірність того, що серед 140 акцій цих фірм збитковими будуть менше як 40? б) Знайти серед 140 акцій найімовірніше число збиткових та обчислити його ймовірність.

2.18. Радіостанція протягом дня транслює 300 музичних програм. Яка ймовірність того, що а) 230; б) менше ніж 225 з них виконуються англійською мовою, коли відомо, що англомовні програми становлять 80 % репертуару радіостанції?

2.19. Імовірність того, що покупець, який завітав до взуттєвого магазину, здійснить покупку, дорівнює в середньому 0,1. Яка ймовірність того, що із 900 покупців, що завітали до магазину, здійснять покупку: 1) 90 покупців; 2) від 100 до 180 покупців?

2.20. . Імовірність виходу із ладу виробу під час його випробування на надійність дорівнює 0,1. Яка ймовірність того, що під час випробувань 300 виробів із ладу вийдуть: 1) 30; 2) не більш як 20?

2.21. До банку надійшло 5000 пачок грошових знаків. Імовірність того, що пачку неправильно укомплектовано, дорівнює 0,0004. Знайти ймовірність того, що серед одержаних пачок буде не більш як одна неправильно укомплектована.

2.22. У середньому, з 200 ламп за місяць виходить з ладу 1 лампочка. Всього встановили 400 ламп. Яка ймовірність того, що за місяць вийде з ладу: а) 3 лампочки? б) не менше 3-х лампочок?

2.23. Середній брак при виробництві продукції на підприємстві становить 0,1 %. Перевіряється партія з 1000 деталей. Яка ймовірність того, що бракованими буде а) 1 деталь? б) від 2-х до 4-х деталей?

2.24. Ймовірність влучення в ціль при кожному пострілі дорівнює 0,001. Знайти ймовірність двох і більше влучень, якщо було зроблено 5000 пострілів.

2.25. По каналу зв’язку передається 1000 знаків. Кожен знак може бути викривлений з ймовірністю 0,004. Знайти ймовірність того, що буде викривлено не більше 3-х знаків.

2.26. Телефонна станція обслуговує 1000 абонентів. Ймовірність того, що протягом години абонент розмовляє по телефону, дорівнює в середньому 0,002. Яка ймовірність того, що протягом години одночасно розмовлятимуть: а) 5 абонентів; б) не більше як 5 абонентів?

2.27. Ткаля обслуговує 1000 веретен. Ймовірність обриву нитки на одному веретені протягом однієї хвилини дорівнює 0,005. Знайти ймовірність того, що протягом однієї хвилини обрив станеться : 1) на 7 веретенах; 2) від 2 до 7 веретеа.

2.28. Імовірність виявити помилку на сторінці книжки дорівнює 0,001. Яка ймовірність, у результаті перевірки книжки з 1000 сторінок, виявити помилку: 1) на 5 сторінках; 2) не більш як на 5 сторінках?

2.29. Знайти ймовірність того, що серед 200 виробів виявиться більше трьох бракованих, якщо в середньому браковані вироби становлять 1 %.

2.30. Завод відправив на базу 9000 якісних виробів. Імовірність пошкодження кожного виробу під час транспортування на базу становить 0,0001. Знайти ймовірність того, що серед 9000 виробів при транспортуванні буде пошкоджено: 1) 3 вироби; 2) не більш як 3.

2.31. Ймовірність появи події в кожному із 625 незалежних випробувань рівна 0,8. Знайти ймовірність того, що відносна частота появи події відхилиться від її ймовірності по абсолютній величині не більш ніж на 0,04.

2.32. Ймовірність появи події в кожному із 900 незалежних випробувань рівна 0,5. Знайти таке додатне число ε, що з ймовірністю 0,7698, абсолютна величина відхилення відносної частоти появи події від її ймовірності не перевищить ε.

2.33. Відділ технічного контролю перевіряє 475 деталей на брак. Ймовірність того, що виріб бракований рівна 0,05. Знайти з ймовірністю 0,9426 межі в яких буде міститися число m бракованих виробів серед перевірених.

2.34. Гральний кубик підкидують 80 разів. Знайти з ймовірністю 0,9973 межі в яких буде міститися число m випадань шести очок на верхній грані кубика.

2.35. Ймовірність появи події в кожному із незалежних випробувань рівна 0,2. Знайти число випробувань n при якому з ймовірністю 0,9876 можна стверджувати, що відносна частота появи події відхилиться від її ймовірності по абсолютній величині не більш ніж на 0,04.

2.36. Ймовірність появи події в кожному із незалежних випробувань дорівнює 0,5. Знайти число випробувань n, при якому з ймовірністю 0,7698 можна чекати, що відносна частота появи події відхиляється від ймовірності за абсолютною величиною не більше ніж на 0,02.

2.37. Імовірність виготовити на заводі виріб найвищої якості дорівнює 0,85. Навмання беруть 700 виробів. Визначити межі, в яких перебуватиме відносна частота появи виробів найвищої якості з імовірністю 0,999.

2.38. Імовірність того, що виготовлена на заводі електролампочка при вмиканні її в електромережу перегорить через певний відрізок часу є величиною

сталою і дорівнює 0,02. Скільки необхідно взяти таких електролампочок, щоб імовірність відхилення відносної частоти електролампочок, що перегорять, від імовірності 0,02, взяте по абсолютному значенню, не перевищувала величини 0,001, дорівнювала б 0,999.

2.39. Відділ технічного контролю перевіряє 475 виробів. Імовірність того, що виріб бракований, дорівнює 0,05. Знайти з імовірністю 0,95 межі, між якими міститься число бракованих виробів серед перевірених.

2.40. Гральний кубик підкинули 1000 разів. Знайти з ймовірністю 0,95 межі, між якими міститься число випадань четвірки.

Лабораторна робота № 3

Тема: Закони розподілу та числові характеристики дискретних випадкових величин.

Мета роботи: Вивчення основних законів розподілу дискретних випадкових величин та застосування табличного процесору ***Microsoft Excel*** для розв'язування задач теорії ймовірностей з використанням цих законів.

Теоретичні відомості

Випадкова величина — це величина, яка в результаті випробування набуде одне (певне) значення з можливих, яке наперед невідоме, бо залежить від випадкових причин, що не можуть бути враховані.

Випадкові ***величини*** поділяють на ***дискретні*** та ***неперервні***.

Дискретною випадковою величиною називається випадкова величина, яка набирає лише певні (конкретні) можливі значення з певними ймовірностями. Можливі значення дискретної випадкової величини складають скінчену або зліченну множину.

Неперервною називають випадкову величину, що може набувати довільні значення з певного скінченого або нескінченного проміжку. Кількість можливих значень неперервної випадкової величини — нескінченна.

Законом розподілу випадкової величини називають однозначну відповідність між можливими значеннями випадкової величини $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ та їх ймовірностями $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$. Цю відповідність часто подають у вигляді таблиці (ряду розподілу) (табл. 3.1). ***Ряд розподілу*** складається з двох рядочків: у верхньому перелічені всі можливі значення випадкової величини в порядку зростання, а в нижньому — відповідні ймовірності:

Таблиця 3.1 Ряд розподілу дискретної випадкової величини

X	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_i	$\dots$	p_n

Завжди виконується рівність $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, яка називається ***умовою нормування для дискретної випадкової величини***.

Закон розподілу дискретної випадкової величини можна подати графічно. У прямокутній системі координат будують точки $M_1(x_1, p_1)$, $M_2(x_2, p_2) \dots$ $M_n(x_n, p_n)$ й сусідні точки сполучають відрізками прямих. Одержану ламану називають ***многокутником розподілу***.

Універсальним способом задання випадкової величини, придатним для всіх типів випадкових величин (як неперервних так і дискретних), є інтегральна функція розподілу (функція розподілу) .

Функцією розподілу (інтегральною функцією розподілу) випадкової величини називають функцію $F(x)$, яка визначає для довільного x ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення, меншого за x:

$$F(x) = P(X < x). \qquad (3.1)$$

Кожен закон розподілу випадкової величини доповнюється кількісними показниками, які називають ***числовими характеристиками*** цього розподілу. Вони узагальнено характеризують випадкову величину. Найбільш часто використовують три числові характеристики: ***математичне сподівання, дисперсію*** та ***середнє квадратичне відхилення*** від математичного сподівання.

Математичне сподівання дискретної випадкової величини визначається як сума добутків можливих значень випадкової величини на відповідні ймовірності:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\ . \tag{3.2}$$

Дисперсією випадкової величини X називають математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання.

$$D(x)=M\left[(X-M(X))^2\right]. \tag{3.3}$$

Формула для розрахунку дисперсії дискретної випадкової величини має вигляд:

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-M(X)\right)^2 p_i\ . \tag{3.4}$$

Для обчислення дисперсії часто користуються робочою формулою

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2, \tag{3.5}$$

де $M\left(X^2\right)=\sum_{k=0}^{4}(x_k)^2 p_k$.

Числову характеристику закону розподілу випадкової величини

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}\,, \tag{3.6}$$

називають ***середньоквадратичним відхиленням*** або ***стандартним відхиленням***.

Серед дискретних випадкових величин особливе місце в теорії ймовірностей посідають такі, які набувають лише цілих невід'ємних значень $X=x_k=0,1,2,\ldots$. Ці випадкові величини називають ***цілочисловими***. Розглянемо деякі найважливіші закони розподілу дискретних випадкових величин та їх числові характеристики.

1. ***Біномний закон розподілу***. Цілочислова випадкова величина ***X*** має біномний закон розподілу, якщо ймовірність її можливих значень обчислюється за формулою Бернуллі.

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k},\quad k=0,1,2,\ldots,n,\quad p+q=1\,. \tag{3.7}$$

$$M(X)=np\,,\ D(X)=npq\,,\quad \sigma(X)=\sqrt{npq}\ . \tag{3.8}$$

2. ***Закон розподілу Пуассона***. Цілочислова випадкова величина X має закон розподілу Пуассона, якщо ймовірність її можливих значень обчислюється за формулою Пуассона

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\quad k=0,1,2,\ldots,\ (\lambda=np). \tag{3.9}$$

$$M(X)=np=\lambda\,;\ \ D(X)=\lambda\,;\ \ \sigma(X)=\sqrt{\lambda}\ . \tag{3.10}$$

3. ***Геометричний закон розподілу***. Цілочислова випадкова величина $\boldsymbol{X}$ має геометричний закон розподілу, якщо ймовірність її можливих значень обчислюється за формулою

$$P(X=k)=pq^{k-1}, \quad k=1,2,3,\dots \tag{3.11}$$

$$M(X)=\frac{1}{p}; \;\; D(X)=\frac{q}{p^2}; \; \sigma(X)=\frac{\sqrt{q}}{p}, \tag{3.12}$$

де $p=P(A)$ – ймовірність появи події A в кожному випробуванні, $q=1-p$, $X=k$ — кількість випробувань до появи події A в серії незалежних повторних випробуваннях.

4. ***Гіпергеометричний закон розподілу***. Цілочислова випадкова величина X має гіпергеометричний закон розподілу, якщо ймовірність її можливих значень обчислюється за формулою

$$P(X=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{s-k}}{C_N^s}, \; k=0,1,2,\dots,\min\{M,s\}, \; N\ge M \tag{3.13}$$

$$M(X)=\frac{Ms}{N}; \;\; D(X)=\frac{Ms}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(1-\frac{s-1}{N-1}\right); \;\; \sigma(X)=\sqrt{D(X)}. \tag{3.14}$$

Гіпергеометричний закон розподілу ймовірностей відбувається за таких обставин: нехай в партії з N виробів є M стандартних $(N>M)$. З партії вибираються s виробів, причому відібраний виріб перед вибором наступного в партію не повертається. Випадкова величина X — число k стандартних деталей серед s відібраних має гіпергеометричний закон розподілу.

Приклади виконання завдань

Приклад 3.1 За даним законом розподілу дискретної випадкової величини X

X	-4	-1	2	6	9	13
$P(X=x_k)=p_k$	0,1	0,2	0,1	0,3	0,1	0,2

побудувати функцію $F(x)$ та її графік.

◄ Згідно властивостей функції $F(x)$ одержимо:

1) якщо $x\le -4$, тоді $F(x)=P(X<x)=0$;
2) якщо $-4<x\le -1$, тоді $F(x)=P(X<x)=P(X=-4)=0{,}1$;
3) якщо $-1<x\le 2$ $F(x)=P(X<x)=P(X=-4)+P(X=-1)=0{,}1+0{,}2=0{,}3$;
4) якщо $2<x\le 6$, тоді
$$F(x)=P(X<x)=P(X=-4)+P(X=-1)+P(X=2)=0{,}1+0{,}2+0{,}1=0{,}4$$
5) якщо, $6<x\le 9$ тоді $F(x)=P(X<x)=P(X=-4)+P(X=-1)+$
$+P(X=2)+P(X=6)=0{,}1+0{,}2+0{,}1+0{,}3=0{,}7$;
6) якщо $9<x\le 13$ тоді $F(x)=P(X<x)=P(X=-4)+P(X=-1)+$
$+P(X=2)+P(X=6)+P(X=9)=0{,}1+0{,}2+0{,}1+0{,}3+0{,}1=0{,}8$;
7) якщо $x>13$ $F(x)=P(X<x)=P(X=-4)+P(X=-1)+$

$$+P(X=2)+P(X=6)+P(X=9)+P(X=13)=0{,}1+0{,}2+0{,}1+0{,}3+0{,}1+0{,}2=1;$$

Отже, функція розподілу $F(x)$ має вигляд (3.15). Її графік зображено на рисунку 3.1.

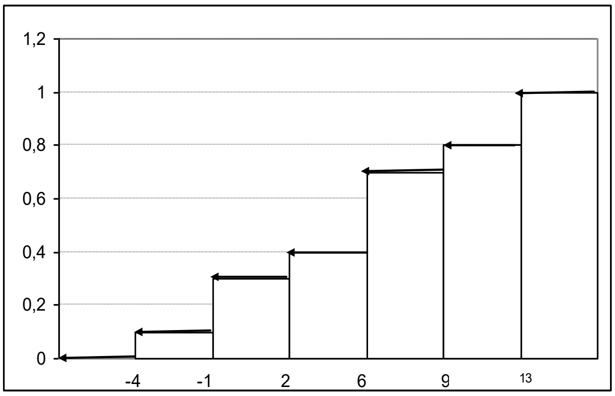


Рис. 3.1

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \le -4; \\ 0{,}1, & \text{якщо} \quad -4 < x \le -1; \\ 0{,}3, & \text{якщо} \quad -1 < x \le 2; \\ 0{,}4, & \text{якщо} \quad 2 < x \le 6; \\ 0{,}7, & \text{якщо} \quad 6 < x \le 9; \\ 0{,}8, & \text{якщо} \quad 9 < x \le 13; \\ 1, & \text{якщо} \quad x > 13. \end{cases} \qquad (3.15)$$

►

Приклад 3.2 По мішені проводяться чотири незалежні постріли. Ймовірність влучення при одному пострілі дорівнює 0,25. Скласти ряд розподілу випадкової величини X — числа влучень в мішень та обчислити його основні числові характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Визначити функцію розподілу $F(x)$.

◄ Випадкова величина X — число попадань в мішень може приймати значення 0, 1, 2, 3, 4. Оскільки розглядувані випробування задовольняють схемі Бернуллі, то X має біномний закон розподілу; $n=4$, $p=0{,}25$, $q=1-p=0{,}75$.

Запишемо ряд розподілу випадкової величини X. Використаємо функцією Excel категорії «Статистические» **БИНОМРАСП** (***число_успехов; число_испытаний; вероятность_успеха; интегральная***) при таких параметрах:

Число_успехов — k — змінна величина, яка приймає значення: 0, 1, 2, 3, 4;

Число_испытаний — 4 — число незалежних випробувань;

Вероятность_успеха — 0,25 —ймовірність успіху у кожному випробуванні;

***Интегральная* — 0** — для знаходження ймовірності події $P(X=k)$.

Відповідні ймовірності, знайдені за допомогою даної функції БИНОМРАСП, наведено в табл. 3.2

Таблиця 3.2

k	0	1	2	3	4	Сума
P	0,3164	0,4219	0,2109	0,0469	0,0039	1

В останньому стовпчику наведена сума $\sum_{k=0}^{4} p_k = 1$, тобто умова нормування виконується.

Знайдемо основні числові характеристики розподілу даної випадкової величини: математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.Оскільки, у даному випадку, маємо справу з дискретною випадковою величиною, яка має біномний розподіл, то основні числові характеристики можна обчислити за формулами (3.8):

$$M(X)=np=4\cdot 0{,}25=1, \quad D(X)=npq=4\cdot 0{,}25\cdot 0{,}75=0{,}75, \quad \sigma(X)=\sqrt{0{,}75}=0{,}866025.$$

Ці самі значення отримаємо, якщо використаємо формули (3.2) та (3.5):

$$M(X)=\sum_{k=0}^{4} x_k p_k = 0\cdot 0{,}3164+1\cdot 0{,}4219+2\cdot 0{,}2109+3\cdot 0{,}0469+4\cdot 0{,}0039=1.$$

Знайдемо $M(X^2)$. Будемо мати $M(X^2)=\sum_{k=0}^{4}(x_k)^2 p_k = 0\cdot 0{,}3164+1\cdot 0{,}4219+4\cdot 0{,}2109+$ $+9\cdot 0{,}0469+16\cdot 0{,}0039=1{,}75$. Звідси $D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=1{,}75-1^2=0{,}75$. Середнє квадратичне відхилення обчислимо за формулою (3.6). Отримаємо $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}75}=0{,}866025$.

Результат застосування табличного процесора Excel для обчислення характеристик $M(X), D(X), \sigma(X)$ наведено на рисунку 3.2.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	n=	4									
2	p=	0,25									
3		Ряд розподілу випадкової величини									
4	*k*	0	1	2	3	4	*Сума*				
5	*P*	0,31641	0,42188	0,21094	0,04688	0,00391	**1**				
6								***M(X)***			
7	***k*P***	0	0,421875	0,421875	0,14063	0,01563		***1***	***M(X²)***	***D(X)=M(X2)- - [M(X)]²***	**s(X)= =[D(X)]^1/2**
8	***k^2*P***	0	0,42188	0,84375	0,42188	0,06250			**1,75**	**0,75**	**0,86603**

Рис 3.2

Щоб отримати функцію розподілу $F(x)$ використаємо функцію ***БИНОМРАСП*** (***число_успехов; число_испытаний; вероятность_успеха; интегральная***) з параметрами: ***Число_успехов*** — k — змінна величина, яка приймає значення: 0, 1, 2, 3, 4; ***Число_испытаний*** — 4 — число незалежних випробувань; ***Вероятность_успеха*** — 0,25 — ймовірність успіху кожного випробування; ***Интегральная*** — **1** — для знаходження функції розподілу $F(x)$ (повертає значення $P(X \le x)$).

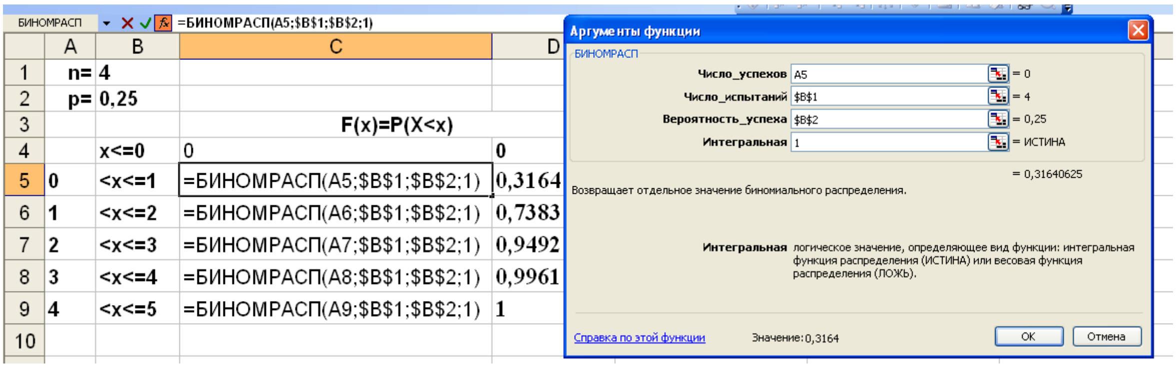
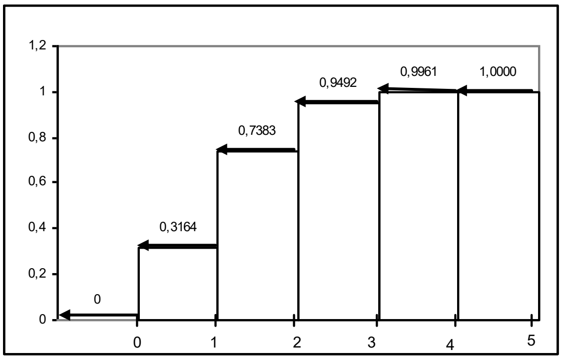


Рис 3.3

Отже, використовуючи дані, отримані в Excel (рисунок 3.3), запишемо функцію розподілу $F(x)$ (формула 3.16) та побудуємо графік (рис 3.4)



$$F(x)=\begin{cases} 0, & якщо \quad x \le 0; \\ 0{,}3164, & якщо \quad 0 < x \le 1; \\ 0{,}7383, & якщо \quad 1 < x \le 2; \\ 0{,}9492, & якщо \quad 2 < x \le 3; \\ 0{,}9961, & якщо \quad 3 < x \le 4; \\ 1, & якщо \quad x > 4. \end{cases} \qquad (3.16)$$

Рис 3.4 ►

Приклад 3.3 Середнє число відвідувачів магазину протягом 15-ти хвилинного інтервалу, дорівнює 2. Поява відвідувачів у магазині відбувається випадково і незалежно один від одного. Потрібно:

а) скласти ряд розподілу числа відвідувачів магазину на протязі 15 хвилин і побудувати многокутник розподілу;
б) знайти числові характеристики випадкової величини X;
в) обчислити функцію розподілу числа відвідувачів на протязі 15 хвилин;
г) обчислити ймовірність того, що на протязі 15 хвилин число відвідувачів магазину виявиться менше 3-х і не менше 3-х.

◄ Нехай випадкова величина X — число відвідувачів магазину на протязі 15 хвилин. Дана дискретна випадкова величина X може приймати значення***:*** $0,1,2,\ldots,n$**,** середнє значення, якої дорівнює 2. Отже, X має закон розподілу Пуассона з параметром $\lambda = 2$.

а) Щоб записати ряд розподілу скористаємось функцією *Excel* ***ПУАССОН*** (x; ***среднее; интегральная);*** при наступних параметрах: x — змінна величина, яка приймає значення: $k = 0,1,2,\ldots,n$; ***среднее*** — 2 — середнє значення $\lambda = n \cdot p$; ***Интегральная*** — 0 — для знаходження ймовірності випадкової події $X = k$.

Відповідні ймовірності, знайдені за допомогою даної функції, наведено в табл. 3.3.

Таблиця 3.3

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p_k	0,1353	0,2707	0,2707	0,1804	0,0902	0,0361	0,0120	0,0034	0,0009	0,0002

Ймовірнісний многокутник (многокутник розподілу) зображено на рисунку 3.5. Для побудови діаграми використно команду **“Диаграмма”** ***(Вставка ⇒ Диаграмма ⇒ Точечная…)*** з відповідними параметрами.

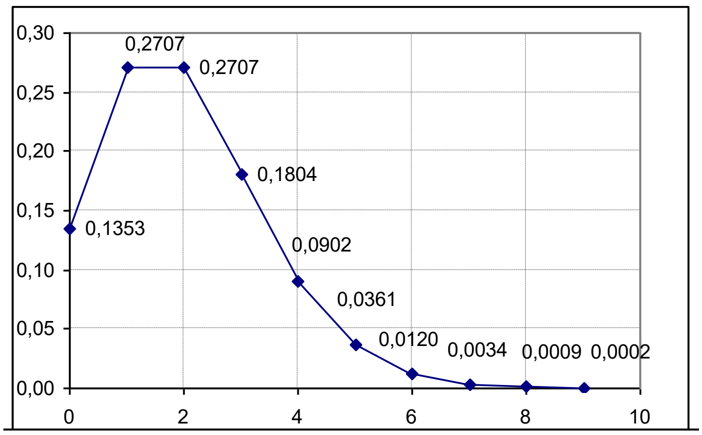


Рис 3.5

б) Числові характеристики обчислюються за формулами (3.10)

$$M(X) = np = \lambda = 2$$

$$D(X) = \lambda = 2;\ \sigma(X) = \sqrt{\lambda} = \sqrt{2} = 1{,}4142.$$

в) Функцію розподілу можна обчислити за допомогою функції ***ПУАССОН*** (x***; среднее; интегральная***); при значеннях параметрів “x” та “среднее” як в завданні а) та “***итегральная”***=1**.** Результати застосування функції наведені на рисунку 3.6.

	A	B	C	D
1		Lambda	2	F(x)=P(X<x)
2		x<=0	0	0
3	0	<x<=1	=ПУАССОН(A3;$C$1;1)	0,1353
4	1	<x<=2	=ПУАССОН(A4;$C$1;1)	0,406
5	2	<x<=3	=ПУАССОН(A5;$C$1;1)	0,6767
6	3	<x<=4	=ПУАССОН(A6;$C$1;1)	0,8571
7	4	<x<=5	=ПУАССОН(A7;$C$1;1)	0,9473
8	5	<x<=6	=ПУАССОН(A8;$C$1;1)	0,9834
9	6	<x<=7	=ПУАССОН(A9;$C$1;1)	0,9955
10	7	<x<=8	=ПУАССОН(A10;$C$1;1)	0,9989
11	8	<x<=9	=ПУАССОН(A11;$C$1;1)	0,9998
12	9	x>9	=ПУАССОН(A12;$C$1;1)	1
13				

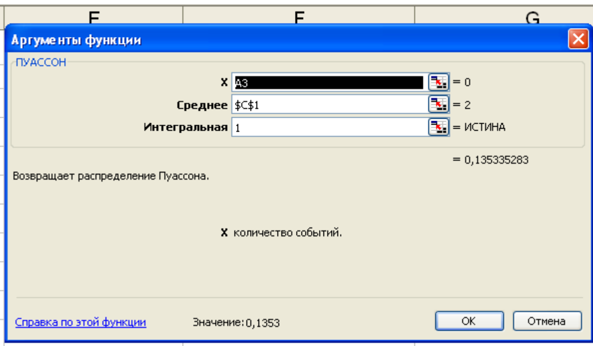


Рис 3.6

г) Ймовірність того, що на протязі 15 хвилин число відвідувачів магазину виявиться менше трьох, можна обчислити за формулою $P(X<3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=0{,}1353+0{,}2707+0{,}2707=0{,}6767$, де числові дані взяті з таблиці 3.3. Ймовірність того, що на протязі 15 хвилин число відвідувачів магазину виявиться не менше 3, тобто 3 і більше, можна обчислити за формулою $P(X\geq 3)=1-P(X<3)=1-0{,}6767=0.3133$. ►

Приклад 3.4 Спортсмен стріляє зі спортивної рушниці по одній і тій самій мішені. Ймовірність влучити в мішень при одному пострілі є величиною сталою і дорівнює 0,8. Стрільба по мішені ведеться до першого влучення. Скласти таблицю розподілу, побудувати імовірнісний многокутник та визначити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ дискретної випадкової величини X — числа витрачених спортсменом набоїв.

◄ Випадкова величина X є цілочисловою з геометричним законом розподілу ймовірностей. За умовою задачі: $p=0{,}8$, $q=0{,}2$. Значення $p_k=P(X=k)$ $k=1,2,3,\ldots$, обчислюються за формулою (3.11). Використаємо табличний процесор *Excel* для побудови закону розподілу випадкової величини X, обчислення числових характеристик за формулами (3.12) та побудови імовірнісного многокутника. Результат застосування наведено на рисунку 3.7.

	A	B	C	D	E	F
1	p	=0,8		M(X)=1/p	=1/B1	=1,25
2	q	=1-B1		D(X)=q/p*p	=B2/B1^2	=0,313
3				$\sigma(X)$	=КОРЕНЬ(E2)	=0,559
4	k	P(X=k)=q^{k-1}p				
5	1	=$B$2^(A5-1)*$B$1	0,8			
6	2	=$B$2^(A6-1)*$B$1	0,16			
7	3	=$B$2^(A7-1)*$B$1	0,032			
8	4	=$B$2^(A8-1)*$B$1	0,0064			
9	5	=$B$2^(A9-1)*$B$1	0,00128			
10	6	=$B$2^(A10-1)*$B$1	0,00026			
11	7	=$B$2^(A11-1)*$B$1	0,00005			
12	8	=$B$2^(A12-1)*$B$1	0,00001			

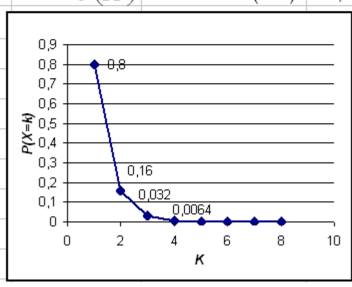


Рис.3.7

Приклад 3.5 Серед дев’яти однотипних виробів п’ять відповідають стандарту, а решта — ні. Навмання береться 5 виробів. Визначити закон розподілу цілочислової

випадкової величини X — появи числа виробів, що відповідають стандарту і обчислити для цієї величини числові характеристики, якщо $s=4$.

◀ У даному випадку випадкова величина X задовольняє гіпергеометричному закону розподілу при $N=9$, $M=5$, $N-M=4$ і $s=4$. Використаємо формулу (3.13) $p_k=P(X=k)=\dfrac{C_5^k C_4^{s-k}}{C_9^s}$.

Якщо $s=4$ $p_k=\dfrac{C_5^k C_4^{4-k}}{C_9^s}$, де $k=s-(N-M),\ldots,s=0,1,2,3,4$.

Для побудови функції розподілу скористаємося функцією пакету Excel. ***ГИПЕРГЕОМЕТ (Число_успехов_в_выборке; Размер_выборки; число_успехов_в_совокупности; Размер_совокупности),*** при наступних параметрах:

Число_успехов_в_выборке — $k=0,1,2,\ldots,\min\{M,s\}$; ***Размер_выборки*** — s — кількість навмання взятих виробів; ***Число_успехов_в_совокупности*** — M — кількість виробів, які відповідають стандарту; ***Размер_совокупности*** — N — загальна кількість виробів.

В таблиці 3.4 наведені закон розподілу дискретної випадкової величини X — появи числа виробів, що відповідають стандарту, та її числові характеристики.

Таблиця 3.4

X	0	1	2	3	4	Сума
p_k	0,0079	0,1587	0,4762	0,3175	0,0397	1
$k\cdot p_k$	0	0,1587	0,9524	0,9524	0,1587	$M(X)$=2,2222
$(k-M(X))^2\cdot p_k$	0,0392	0,2371	0,0235	0,1920	0,1254	$D(X)$=0,6172
						$\sigma(X)$=0,7856

Ряд розподілу отримано, використовуючи функцію Excel ***ГИПЕРГЕОМЕТ***, а $M(X)$, $D(X)$ та $\sigma(X)$ знайдено за формулами (3.2), (3.4) та (3.6). Розрахунки, виконані в Excel, наведено на рисунку 3.8.

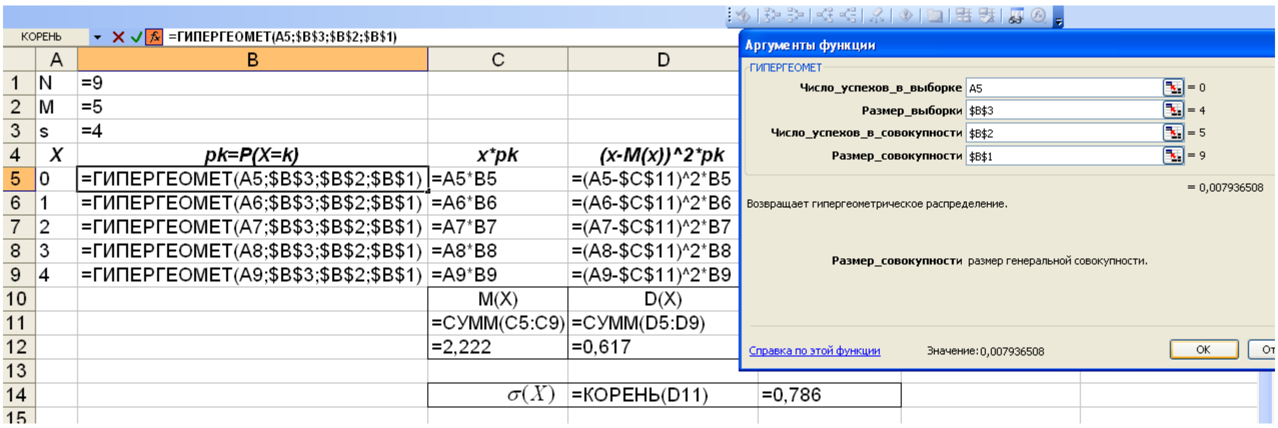


Рис.3.8

Аналогічні результати для $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ можна одержати з формул (13.4):

$$M(X)=\frac{Ms}{N}=\frac{5\cdot 4}{9}=2{,}2222;\quad D(X)=\frac{Ms}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(1-\frac{s-1}{N-1}\right)=\frac{5\cdot 4}{9}\left(1-\frac{5}{9}\right)\left(1-\frac{4-1}{9-1}\right)=0{,}6173;$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}61728}=0{,}7857.$$ ▶

Приклад 3.6 На шляху руху автомобіля стоять три світлофори, перший з них

дозволяє рух з ймовірністю 0,5, другий та третій —з ймовірностями 0,7 та 0,6 відповідно. Побудувати закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X — числа світлофорів, на яких автомобіль затримався.

◄ Випадкова величина X — число світлофорів на яких автомобіль затримався, приймає значення 0, 1, 2, 3. Знайдемо відповідні ймовірності.

Нехай подія A_i $\left(i=\overline{1,3}\right)$ полягає в тому, що автомобіль промине світлофор i, $\left(i=\overline{1,3}\right)$ без зупинки. За умовою задачі $P(A_1)=0{,}5$, $P(A_2)=0{,}7$, $P(A_3)=0{,}6$. Тоді ймовірність того, що автомобіль зупиниться на першому світлофорі дорівнюватиме $P\left(\overline{A}_1\right)=0{,}5$, на другому та третьому — відповідно $P\left(\overline{A}_2\right)=0{,}3$ та $P\left(\overline{A}_3\right)=0{,}4$. Позначимо B_0 подію, що полягає в тому, що автомобіль не затримався на жодному із світлофорів; через B_1 — зупинився на одному, B_2 та B_3 — зупинився відповідно на двох та трьох світлофорах.

Знайдемо $P(B_0)=P(X=0)$. Оскільки $B_0=A_1\cdot A_2\cdot A_3$, а події A_i $\left(i=\overline{1,3}\right)$ незалежні, тоді за теоремою множення ймовірностей незалежних подій (теорема 1.4) отримаємо $P(B_0)=P(A_1\cdot A_2\cdot A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=0{,}5\cdot 0{,}7\cdot 0{,}6=$ $=0{,}21$. Подія $B_1=\overline{A}_1\cdot A_2\cdot A_3+A_1\cdot\overline{A}_2\cdot A_3+A_1\cdot A_2\cdot\overline{A}_3$. Враховуючи, що події $\overline{A}_1\cdot A_2\cdot A_3$, $A_1\cdot\overline{A}_2\cdot A_3$, $A_1\cdot A_2\cdot\overline{A}_3$ несумісні, то за теремами 1.1 та 1.4 отримаємо $P(X=1)=P(B_1)=P\left(\overline{A}_1\cdot A_2\cdot A_3\right)+P\left(A_1\cdot\overline{A}_2\cdot A_3\right)++P\left(A_1\cdot A_2\cdot\overline{A}_3\right)=0{,}5\cdot 0{,}7\cdot 0{,}6+0{,}5\cdot 0{,}3\cdot 0{,}6+$ $+0{,}5\cdot 0{,}7\cdot 0{,}4=0{,}21+0{,}09+0{,}14=0{,}44$. Аналогічно подія $P(X=2)=P(B_2)=$ $=P\left(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot A_3\right)+P\left(A_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3\right)+P\left(\overline{A}_1\cdot A_2\cdot\overline{A}_3\right)=0{,}5\cdot 0{,}3\cdot 0{,}6+0{,}5\cdot 0{,}3\cdot 0{,}4+0{,}5\cdot 0{,}7\cdot 0{,}4=0{,}09+$ $+0{,}06+0{,}14=029$. Так само $B_3=\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3$, $P(X=3)=P(B_3)=P\left(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3\right)=$ $=P\left(\overline{A}_1\right)\cdot P\left(\overline{A}_2\right)\cdot P\left(\overline{A}_3\right)=0{,}5\cdot 0{,}3\cdot 0{,}4=0{,}06$. Отже, закон розподілу X має вигляд:

X	0	1	2	3
p_k	0,21	0,44	0,29	0,06
$M(X)$ =1,2	$D(X)$ =0,7		$\sigma(X)$ =0,8367	

На рисунку 3.9 наведені обчислення в *Excel*.►

	A	B	C	D	E	F	G
1	***p** i= **P(A** i**)***	***p1=***	0,5	**q1=**	=1-C1		
2	***i=1,2,3***	***p2=***	0,7	**q2=**	=1-C2		
3		***p3=***	0,6	**q3=**	=1-C3		
4							
5	$P\left(\overline{A}_1\cdot A_2\cdot A_3\right)$	=E1*C2*C3	$P\left(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot A_3\right)$	=E1*E2*C3			
6	$P\left(A_1\cdot\overline{A}_2\cdot A_3\right)$	=C1*E2*C3	$P\left(A_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3\right)$	=C1*E2*E3			
7	$P\left(A_1\cdot A_2\cdot\overline{A}_3\right)$	=C1*C2*E3	$P\left(\overline{A}_1\cdot A_2\cdot\overline{A}_3\right)$	=E1*C2*E3			
8							
9			Ряд розподілу				
10	x_k	0	1	2	3		
11	p_k	=C1*C2*C3	=СУММ(B5:B7)	=СУММ(D5:D7)	=E1*E2*E3		=СУММ(B11:E11)
12							
13			***Обчислення числових характеристик***				
14							
15	$x_k p_k$	=B10*B11	=C10*C11	=D10*D11	=E10*E11	M(X)=	=СУММ(B15:E15)
16	$(x_k$-M(X))^2*p_k	=(B10-$G$15)^2*B11	=(C10-$G$15)^2*C11	=(D10-$G$15)^2*D11	=(E10-$G$15)^2*E11	D(X)=	=СУММ(B16:E16)
17	$x_k^{2*}p_k$	=B10^2*B11	=C10^2*C11	=D10^2*D11	=E10^2*E11	Sig(X)=	=КОРЕНЬ(G16)
18						D(X)=	=СУММ(B17:E17)-G15^2

Рис 3.9

Теоретичні запитання до теми

1. Означення випадкової величини.
2. Означення дискретної та неперервної випадкової величини.
3. Що називається законом розподілу випадкової величини.
4. Умова нормування для дискретної випадкової величини.
5. Що називається многокутником розподілу?
6. Що називається інтегральною функцією розподілу випадкової величини?
7. Які існують числові характеристики випадкових величин?
8. За якими формулами обчислюються числові характеристики дискретних випадкових величин?
9. Біномний закон розподілу дискретної випадкової величини.
10. Числові характеристики біномного закону розподілу.
11. Закон розподілу Пуассона та його числові характеристики.
12. Геометричний закон розподілу дискретної випадкової величини.
13. Числові характеристики для геометричного закону розподілу.
14. Дати означення гіпергеометричного закону розподілу дискретної випадкової величини.
15. Як обчислюються числові характеристики для гіпергеометричного закону розподілу?

Завдання для самостійного розв'язування

Таблиця 3.5 Номери варіантів та відповідні їм завдання для самостійного розв'язування

Номер варіанту	Номери завдань	Номер варіанту	Номери завдань
1	3.1, 3.11	6	3.6, 3.16
2	3.2, 3.12	7	3.7, 3.17
3	3.3, 3.13	8	3.8, 3.18
4	3.4, 3.14	9	3.9, 3.19
5	3.5, 3.15	10	3.10, 3.20

3.1. Чотири прилади потрібно перевірити на надійність. Імовірність того, що прилад витримає перевірку на надійність, для кожного дорівнює 0,8. Побудувати закон розподілу дискретної випадкової величини X — числа приладів, які пройшли випробування, зобразити многокутник розподілу, знайти функцію розподілу ймовірностей $F(x)$ та $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

3.2. Двічі кидають монету. Нехай дискретна випадкова величина X — число випадань герба. Знайти розподіл ймовірностей випадкової величини X, функцію розподілу ймовірностей $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ та побудувати многокутник розподілу.

3.3. Під час роботи певного пристрою час від часу виникають збої, які можна вважати випадковими подіями, розподіленими за законом Пуассона. Середнє число збоїв за добу роботи машини дорівнює 1,5. Записати закон розподілу

дискретної випадкової величини X — числа збоїв роботи пристрою за добу. Побудувати многокутник розподілу X та знайти функцію розподілу ймовірностей $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

3.4. Стріляють у ціль до першого влучення. Влучення при різних пострілах — незалежні події, ймовірність влучення при кожному пострілі $p = 0{,}85$. Нехай випадкова величина X — число зроблених пострілів. Знайти розподіл випадкової величини X, функцію розподілу ймовірностей $F(x)$, математичне сподівання $M(X)$, $D(X)$ та $\sigma(X)$.

3.5. Радіотелефонна станція отримує цифровий текст. Внаслідок атмосферних завад ймовірність спотворення цифри в середньому дорівнює 0,001. Було отримано текст, що налічує 2000 цифр. Записати закон розподілу дискретної випадкової величини X — числа спотворених цифр в отриманому тексті, функцію розподілу ймовірностей $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ та побудувати многокутник розподілу.

3.6. Записати закон розподілу дискретної випадкової величини X — числа появ події в 8-ми незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність появи події рівна 0,7. Знайти функцію розподілу ймовірностей $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ та побудувати многокутник розподілу.

3.7. Телефонна станція обслуговує 1000 абонентів. Ймовірність того, що протягом години абонент розмовлятиме по телефону дорівнює, в середньому, 0,002. Знайти: $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ дискретної випадкової величини X — числа абонентів, що розмовляють протягом години; функцію розподілу ймовірностей $F(x)$ та побудувати многокутник розподілу.

3.8. Ймовірність влучення в мішень дорівнює 0,5. Стрілок, маючи в запасі 6 патронів, робить постріли по мішені до першого попадання або до використання усіх патронів. Скласти ряд розподілу випадкової величини X — числа використаних набоїв, побудувати імовірнісний многокутник та знайти функцію розподілу ймовірностей $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

3.9. Серед 12 однотипних телевізорів 8 відповідають вимогам стандарту, а решта — ні. Побудувати закони розподілу дискретної випадкової величини X — числа телевізорів, що відповідають вимогам стандарту серед s навмання взятих, якщо: $s = 4$. Знайти функцію розподілу ймовірностей $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ та побудувати многокутник розподілу.

3.10. Монету підкидають доти поки випаде герб. Нехай випадкова величина X — число зроблених підкидань. Знайти закон розподілу випадкової величини X, функцію розподілу ймовірностей $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ та побудувати многокутник розподілу.

3.11. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X — суми числа очок, які можуть з'явитися при киданні грального кубика та монети, якщо вважати, що випадання орла дає 0 очок, а решки — 1 очко. Обчислити $M(X)$ та $D(X)$, $\sigma(X)$.

3.12. Пристрій складається із чотирьох приладів, які працюють незалежно один від одного. Ймовірності відмови приладів наступні: $p_1 = 0{,}3$, $p_2 = 0{,}4$ $p_3 = 0{,}5$, $p_4 = 0{,}6$. Знайти закон розподілу випадкової величини X — числа приладів, які

відмовили та обчислити $M(X)$, $D(X)$ та $\sigma(X)$.

3.13. Підприємство використовує чотири види сировини. Імовірність зриву поставок кожної з них дорівнює відповідно 0,1; 0,05; 0,01; 0,08. Скласти закон розподілу випадкової величини X — кількості видів сировини, поставку яких буде зірвано та обчислити $M(X)$ та $D(X)$, $\sigma(X)$.

3.14. Маршрут руху вантажівки пролягає через чотири перехрестя, які регулюються світлофорами, що з ймовірностями відповідно 0,8, 0,5, 0,6, 0,4 дозволяють рух без зупинки. Записати закон розподілу випадкової величини X — кількості зупинок машини на перехрестях по цьому маршруту, якщо світлофори працюють незалежно один від одного. Обчислити $M(X)$, $D(X)$ та $\sigma(X)$.

3.15. Імовірності зростання вартості кожного із чотирьох видів сировини за прогнозний період становлять відповідно 0,2, 0,8, 0,1, 0,5. Скласти закон розподілу випадкової величини X — кількості видів сировини, для яких відбудеться зростання ціни за цей період, а також знайти $M(X)$, $D(X)$ та $\sigma(X)$.

3.16. Під час виготовлення деталі робітникові необхідно виконати чотири незалежні між собою технологічні операції. Імовірність того, що при виконанні першої операції робітник не допустить дефекту, дорівнює 0,95; для другої, третьої і четвертої операцій ця ймовірність становить відповідно 0,9; 0,85; 0,8. Побудувати закон розподілу дискретної випадкової величини X — числа операції, під час виконання яких робітник не допустить браку.

3.17. За даними відділу маркетингу підприємства з імовірностями 0,8, 0,6, 0,2 прогнозується підвищення попиту на кожний із трьох видів продукції. Скласти закон розподілу випадкової величини X — кількості видів продукції, для яких прогнозується підвищення попиту, а також знайти $M(X)$, $D(X)$ та $\sigma(X)$.

3.18. В цеху можуть одночасно працювати три однотипних верстати, які вмикаються незалежно. Ймовірність того, що в даний момент працює перший, другий чи третій верстат дорівнює 0,2; 0,5; 0,3 відповідно. Записати ряд розподілу для дискретної випадкової величини X — кількості одночасно працюючих верстатів та знайти $M(X)$, $D(X)$ та $\sigma(X)$.

3.19. У першому ящику міститься 7 стандартних і 3 браковані деталі, у другому — 6 стандартних і 4 браковані. Навмання з першого ящика беруть дві деталі, а з другого — одну. Побудувати закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X — появи числа стандартних деталей серед трьох навмання взятих. Обчислити $M(X)$ та $D(X)$, $\sigma(X)$.

3.20. Троє складають іспит із теорії ймовірностей. Імовірність того, що перший студент складе екзамен, становить 0,9, для другого та третього студентів ця ймовірність дорівнює відповідно 0,85; 0,8. Побудувати закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X — числа студентів, які складуть іспит з теорії ймовірностей. Обчислити $M(X)$ та $D(X)$, $\sigma(X)$.

Лабораторна робота № 4

Тема: Закони розподілу та числові характеристики неперервних випадкових величин.

Мета роботи: Використання можливостей пакету *Microsoft Excel* та системи *MathCad* для розв'язання задач теорії ймовірності з використанням основних законів розподілу неперервних випадкових величин.

Теоретичні відомості

Неперервною називають випадкову величину, що може набувати довільні значення з певного скінченого або нескінченного проміжку. Кількість можливих значень неперервної випадкової величини - нескінченна.

Ймовірність того, що випадкова величина набуде значення на проміжку (a,b) дорівнює приросту функції розподілу $F(x)$ на цьому проміжку:

$$P[X \in (a,b)] = F(b) - F(a). \qquad (4.1)$$

Оскільки ймовірність того що, випадкова величина X набуде конкретного можливого значення, завжди дорівнює нулю, тобто $P(X = x_k) = 0$, то справедливі рівності

$$P(a < X < b) = P(a \le X < b) = P(a < X \le b) = P(a \le X \le b).$$

Крім інтегральної функції розподілу $F(x)$, неперервну випадкову величину можна задавати ще за допомогою так званої диференціольної функції або функції щільності розподілу.

Диференціальною функцією розподілу або ***щільністю ймовірностей неперервної випадкової величини називають*** функцію $f(x)$, яка дорівнює похідній першого порядку від її інтегральної функції розподілу:

$$f(x) = F'(x). \qquad (4.2)$$

Теорема 4.1 Ймовірність того, що неперервна випадкова величина X набуде будь-яке значення з проміжку (a,b) обчислюється за формулою

$$P(X \in (a,b)) = P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx \qquad (4.3)$$

Наслідок 4.1 Функцію розподілу випадкової величини визначають через її функцію щільності $f(x)$ за формулою

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt. \qquad (4.4)$$

Умова нормування неперервної випадкової величини X :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1. \qquad (4.5)$$

Якщо неперервна випадкова величина X визначена лише на проміжку (a,b) то умова нормування має вигляд $\int_a^b f(t)dt = 1$

Числові характеристики неперервних випадкових величин

Якщо неперервна випадкова величина приймає значення із інтервалу $(-\infty,-\infty)$ та має диференціальну функцію розподілу $f(x)$, то її математичне сподівання та дисперсія обчислюються за формулами:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, \qquad (4.6)$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-M(X)\right)^2 f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx-M^2(X) \qquad (4.7)$$

або

$$M(X)=\int_{a}^{b} xf(x)dx, \qquad (4.8)$$

$$D(X)=\int_{a}^{b}\left(x-M(X)\right)^2 f(x)dx=\int_{a}^{b} x^2 f(x)dx-\left[M(X)\right]^2, \text{ якщо } X\in(a,b) \qquad (4.9)$$

Числову характеристику закону розподілу випадкової величини

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$$

називають ***<u>середньоквадратичним відхиленням</u>***, або ***<u>стандартним відхиленням</u>.***

Основні закони розподілу неперервних випадкових числових величин та їх числові характеристики

Основні закони розподілу неперервних випадкових величин розрізняють за виглядом їх диференціальних функцій розподілу (щільності ймовірностей) $f(x)$. Найчастіше використовують наступні закони розподілу.

Рівномірний закон розподілу. Розподіл ймовірностей називається ***<u>рівномірним</u>,*** якщо на інтервалі, якому належать всі можливі значення випадкової величини, функція щільності розподілу дорівнює константі.

Випадкова величина X, розподілена рівномірно на проміжку $[a,b]$, має таку функцію щільності розподілу:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le a; \\ \dfrac{1}{b-a}, & a<x\le b; \\ 0, & x>b. \end{cases} \qquad (4.10)$$

Функція розподілу ймовірностей має вигляд

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b; \\ 1, & x>b. \end{cases} \qquad (4.11)$$

Числові характеристики рівномірного закону:

$$M(X)=\frac{a+b}{2};\quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12};\quad \sigma(X)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \qquad (4.12)$$

Нормальний закон розподілу. Нормально розподіленою з параметрами a ***та*** σ називається випадкова величина X, функція щільності розподілу якої має вигляд:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\ -\infty<x<+\infty,\ \ -\infty<a<+\infty,\ \ \sigma>0. \qquad (4.13)$$

Підпорядкування випадкової величини X ***нормальному законy*** розподілу з параметрами a та σ ***позначають*** $N(a;\sigma)$.

Графік функції щільності нормального розподілу називають ***кривою Гауса або нормальною кривою*** (рис 4.1).

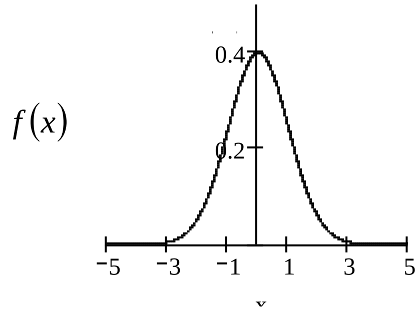


Рис 4.1

Параметрами a та σ впливають на форму кривої розподілу: величина a задає положення максимуму, а σ визначає «ширину» кривої та максимальне значення $f(x)$. Графік функції $f(x)$ симетричний відносно прямої $x=a$; $f(x)$ має максимум в точці $\left(a,\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$. $M(X)=a$ та $D(X)=\sigma^2$, де a та σ — параметри розподілу $N(a;\sigma)$.

Інтегральна функція нормального закону розподілу має вигляд

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt. \qquad (4.14)$$

Розподіл $N(0;1)$ ($N(a;\sigma)$ з параметрами $a=0,\sigma=1$) називають ***стандартним нормальним розподілом***. В цьому випадку

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt. \qquad (4.15)$$

Ймовірність того, що нормально розподілена випадкова величина X набуде значення на проміжку (α,β) визначається за формулою:

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right), \qquad (4.16)$$

Ймовірність заданого відхилення обчислюється за формулою

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \qquad (4.17)$$

Правило трьох сігма для нормального закону**:**

$$P(|x-a|<3\sigma)=2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right)=2\Phi(3)=2\cdot 0{,}49865=0{,}9973. \qquad (4.18)$$

Звідси випливає: $P(|x-a|>3\sigma)=1-P(|x-a|<3\sigma)=1-0{,}9973=0{,}0027$.

Сутність правила 3-х сігма: якщо випадкова величина розподілена нормально, то абсолютна величина її відхилення від математичного сподівання не перевищить потроєного середньоквадратичного відхилення.

Приклади виконання завдань

Приклад 4.1 Закон розподілу неперервної випадкової величини X задано функцією $F(x)=\begin{cases} 0, & якщо \quad x\le -1; \\ \dfrac{(x+1)^3}{64}, & якщо \quad -1<x\le 3; \\ 1, & якщо \quad x>3. \end{cases}$ Знайти $f(x)$ та побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$. Обчислити $P(0<X<2)$ за формулами (4.1) та (4.3).

◄ Згідно (4.2) будемо мати $f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0, & якщо \quad x\le -1; \\ \dfrac{3\cdot(x+1)^2}{64}, & якщо \quad -1<x\le 3; \\ 0, & якщо \quad x>3. \end{cases}$

Графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$, побудовані в *Excel*, зображено відповідно на рисунках 4.1 та 4.2; значення функцій у відповідних точках наведені в наступній таблиці

x	-1	0	1	2	3	4
$F(x)$	0	0,016	0,016	0,016	0,016	1
$f(x)$	0	0,047	0,188	0,422	0,750	0

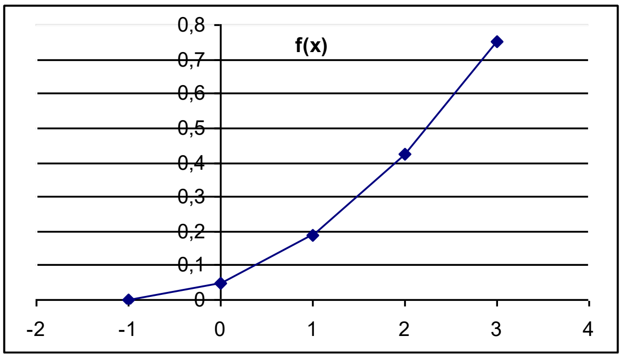


Рис.4.1

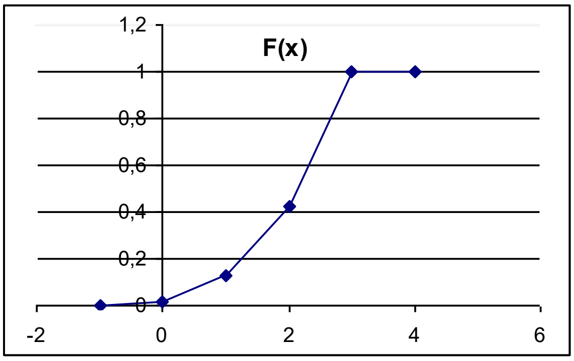


Рис.4.2

Ймовірність події $0<X<2$ обчислимо за формулою (4.1). Будемо мати

$$P(0<x<2)=F(2)-F(0)=\frac{27}{64}-\frac{1}{64}=\frac{13}{32}.$$

Те саме можна отримати, використовуючи формулу (4.3):

$$P(0<x<2)=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 \frac{3\cdot(x+1)^2}{64}dx=\left.\frac{(x+1)^3}{64}\right|_0^2=\frac{27}{64}-\frac{1}{64}=\frac{13}{32}. \ ►$$

Приклад 4.2 Обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ випадкової величини X та знайти $P(\frac{\pi}{6}<X<\frac{\pi}{2})$, якщо диференціальна функція розподілу випадкової величини

$$f(x)=\begin{cases} 0, & якщо \quad x\le 0; \\ \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}, & якщо \quad 0<x\le\pi; \\ 0, & якщо \quad x>\pi. \end{cases}$$

◄ В даному випадку $\frac{\pi}{6} \in (0, \pi]$ та $\frac{\pi}{2} \in (0, \pi]$, тому за формулою (4.3) будемо мати $P(\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{2}) = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\right)dx$. Обчислення ймовірності $P(\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{2})$ та числових характеристик за формулами (4.9) проведено у *MathCad* і наведено на лістингу 4.1.

Лістинг 4.1

$$\alpha := \frac{\pi}{6} \qquad \beta := \frac{\pi}{2} \qquad a := 0 \qquad b := \pi$$

$$f1(x) := \frac{1}{2}\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$P(\alpha,\beta) := \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx \qquad P(\alpha,\beta) \to \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} - \frac{1}{4}\cdot\sqrt{6} + \frac{1}{12}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{3} = 0.448$$

$$M(x,a,b) := \int_{a}^{b} x\cdot f1(x)\,dx \qquad M(x,a,b) \to \pi - 2 = 1.142$$

$$D(x,a,b) := \int_{a}^{b} (x - M(x,a,b))^2\cdot f1(x)\,dx \qquad D(x,a,b) \to -12 + 4\cdot\pi = 0.566$$

$$D1(x,a,b) := \int_{a}^{b} (x)^2\cdot f1(x)\,dx - M(x,a,b)^2 \qquad D1(x,a,b) \to \pi^2 - 8 - (\pi - 2)^2 = 0.566$$

$$\sigma(x,a,b) := \sqrt{D(x,a,b)} \qquad \sigma(x,a,b) \to 2\cdot(-3 + \pi)^{\frac{1}{2}} = 0.753$$

►

Приклад 4.3 Диференціальна функція розподілу випадкової величини X має вигляд $f(x) = \begin{cases} 0, & якщо \quad x \le \frac{\pi}{3}; \\ \frac{2}{3}\sin x, & якщо \quad \frac{\pi}{3} < x \le \pi; \\ 0, & якщо \quad x > \pi. \end{cases}$ Знайти $F(x)$ та обчислити $P\left(\frac{\pi}{2} < X < \pi\right)$.

◄ Знайдемо $F(x)$. Для цього використаємо формулу (4.4).

1) Якщо $x \le \frac{\pi}{3}$, тоді $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dt = 0$;

2) якщо $\frac{\pi}{3} < x \le \pi$, тоді $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{\frac{\pi}{3}} 0dt + \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{x} \frac{2}{3}\sin t dt = 0 + \frac{2}{3}(-\cos t)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{x} =$

$$= \frac{2}{3}\left(-\cos x + \cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} - \cos x\right);$$

3) якщо $x > \pi$, тоді $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{\frac{\pi}{3}} 0dt + \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{2}{3}\sin t dt + \int\limits_{\pi}^{x} 0 \cdot dt = 0 + \frac{2}{3}(-\cos t)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} + 0 =$

$$= \frac{2}{3}\left(-\cos\pi + \cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 1.$$

Таким чином, функція розподілу ймовірностей має вигляд

$$F(x) = \begin{cases} 0, & якщо \quad x \le \frac{\pi}{3}; \\ \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} - \cos x\right), & якщо \quad \frac{\pi}{3} < x \le \pi; \\ 1, & якщо \quad x > \pi. \end{cases}$$

Ймовірність події $P\left(\frac{\pi}{2} < X < \pi\right)$ можна обчислити за формулою (4.1):
$P\left(\frac{\pi}{2} < X < \pi\right) = F(\pi) - F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} - \cos\pi\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} - \cos\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$
Знайти $P\left(\frac{\pi}{2} < X < \pi\right)$ можна також за формулою (4.3). Будемо мати

$$P\left(\frac{\pi}{2} < X < \pi\right) = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2}{3}\sin t dt = \frac{2}{3}(-\cos t)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\frac{2}{3}\left(\cos\pi - \cos\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3}. \blacktriangleright$$

Приклад 4.4 Нормально розподілена випадкової величина X має математичне сподівання $M(X) = 30$ та середньоквадратичне відхилення $\sigma(X) = 10$. Знайти: а) вигляд диференціальної функції розподілу $f(x)$, побудувати її графік та графік інтегральної функції розподілу $F(x)$; б) ймовірність того, що в наслідок випробування випадкова величина X набуде значення з інтервалів: $(10,50)$, $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$ (тобто знайти $P(10 < X < 50)$ і $P(a - 3\sigma < X < a + 3\sigma)$).

◀ а) За умовою задачі $a = 30$, $\sigma = 10$, тому згідно (4.13) функція щільності розподілу буде мати вигляд

$$f(x) = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-30)^2}{2\cdot 10^2}} = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-30)^2}{200}}.$$

Для побудови графіка функції $f(x)$ знайдемо значення $f(x)$ у точках $x = 5, 10, \ldots, 50$, використовуючи функцією пакету Excel ***НОРМРАСП (x; Среднее; Стандартное_откл; Интегральная)***, де "***x***"-значення, для якого будується розподіл;

Среднее—математичне сподівання $M(X)$;

Стандартное_откл – середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$;

Интегральный—логічне значення 0 або 1. (Якщо "***Интегральный*"=0,** отримаємо значення диференціальної функції розподілу $f(x)$ в точці ***x***, якщо ***"Интегральный"=1*** — функція повертає значення інтегральної функції розподілу $F(x)$ в точці ***x*).**

Для побудови графіка функції $F(x)$ знайдемо значення $F(x)$ у точках $x = 5, 10, \ldots, 50$, використовуючи функцією ***НОРМРАСП(x; 30; 10; 1).***

б) Щоб знайти $P(10 < X < 50)$ використаємо формулу (4.16). Будемо матии

$$P(10 < X < 50) = \Phi\left(\frac{50-30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{10-30}{10}\right) = 2\Phi(2) = 0{,}9544\,,$$

де $\Phi(2)$ знаходимо за таблицею значень функції Лапласа, або це саме значення можна отримати за формулою $P(10 < X < 50) = F(50) - F(10)$, використовуючи при цьому вираз ***"НОРМРАСП(50;30;10;1) — НОРМРАСП(10;30;10;1)"***. Результат застосування функції ***"НОРМРАСП"*** та графіки функції $f(x)$ і $F(x)$ наведено на рисунку 4.3.

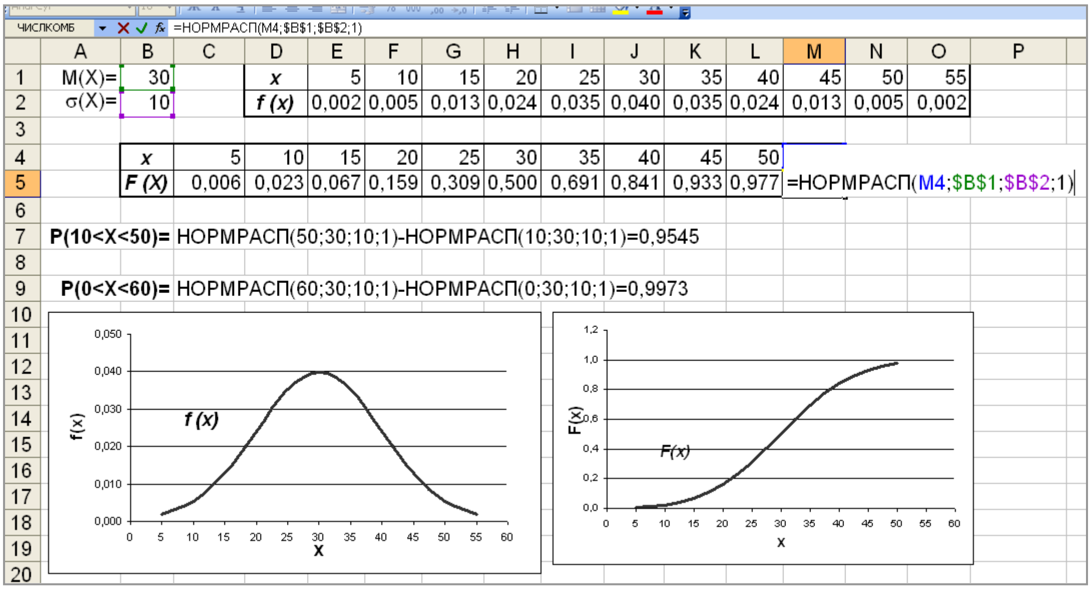


Рис.4.3

Обчислимо $P(a - 3\sigma \le X \le a + 3\sigma) = P(30 - 3\cdot 10 \le X \le 31 + 3\cdot 10) = P(0 \le X \le 60)$. Шукану ймовірність знайдемо за допомогою виразу ***=НОРМРАСП(60;30;10;1)— НОРМРАСП(0;30;10;1)*** (рис 4.3). Отримаємо 0,9973, що співпадає з результатами, одержаними за формулою (4.28).

Теоретичні питання та завдання до теми

1. Дати визначення неперервної випадкової величини.
2. Як визначають інтегральну функцію розподілу та диференціальну функцію розподілу (щільність ймовірностей) неперервної випадкової величини?

3. Записати умову нормування неперервної випадкової величини?
4. За якими формулами обчислюється, ймовірність того, що неперервна випадкова величина набуде будь-якого значення з проміжку (a,b)?
5. Записати формули, які виражають зв’язок між інтегральною та диференціальною функціями розподілу неперервної випадкової величини?
6. За якими формулами обчислюється числові характеристики неперервних випадкових величин?
7. Що називають рівномірним законом розподілу неперервної випадкової величини?
8. Записати інтегральну та диференціальну функції рівномірно розподіленої випадкової величини.
9. Числові характеристики для рівномірного закону розподілу.
10. Дати визначення нормального закону розподілу неперервної випадкової величини.
11. Записати інтегральну та диференціальну функції розподілу випадкової величини X, яка підпорядкована закону $N(a;\sigma)$.
12. Як впливають параметри a та σ на форму кривої Гауса (нормальної кривої)?
13. Що називають стандартним нормальним законом розподілу?
14. Записати функції $f(x)$ та $F(x)$ випадкової величини X, яка підпорядкована стандартному нормальному розподілу.
15. Чому дорівнюють ймовірності $P(\alpha < X < \beta)$ та $P(|X-a| < \delta)$ для нормального закону розподілу?
16. Правило трьох сігма для нормального закону. Сутність правила 3-х сігма.

Завдання для самостійного розв’язання

Таблиця 4.1 Номери варіантів та відповідні їм завдання для самостійного розв’язування

Номер варі-анту	Номери завдань	Номер варі-анту	Номери завдань
1	4.1(1), 4.2(1), 4.3(1), 4.4(1),	6	4.1(6), 4.2(6), 4.3(6), 4.4(6),
2	4.1(2), 4.2(2), 4.3(2), 4.4(2),	7	4.1(7), 4.2(7), 4.3(7), 4.4(7),
3	4.1(3), 4.2(3), 4.3(3), 4.4(3),	8	4.1(8), 4.2(8), 4.3(8), 4.4(8),
4	4.1(4), 4.2(4), 4.3(4), 4.4(4),	9	4.1(9), 4.2(9), 4.3(9), 4.4(9),
5	4.1(5), 4.2(5), 4.3(5), 4.4(5),	10	4.1(10), 4.2(10), 4.3(10), 4.4(10),

4.1 Випадкова величина X розподілена рівномірно на інтервалі $(a;b)$. Записати диференційну $f(x)$ та інтегральну $F(x)$ функції, знайти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, якщо

1) $a=1,\quad b=6$;
2) $a=2\quad b=8$; 5) $a=3\quad b=8$; 8) $a=3\quad b=6$;
3) $a=3\quad b=7$; 6) $a=4\quad b=10$; 9) $a=-1\quad b=4$;
4) $a=2\quad b=9$; 7) $a=2\quad b=7$; 10) $a=3\quad b=9$.

4.2 Нормальна розподілена випадкова величина X має математичне сподівання $M(X)$ та дисперсію $D(X)$. Записати диференційну та інтегральну функції розподілу X, якщо:

1) $M(X)=3,\quad D(X)=4$; 5) $M(X)=3,\quad D(X)=25$; 8) $M(X)=-1,\quad D(X)=1$;
2) $M(X)=0,\quad D(X)=16$; 6) $M(X)=1,\quad D(X)=4$; 9) $M(X)=2,\quad D(X)=9$;
3) $M(X)=2,\quad D(X)=1$; 7) $M(X)=-2,\quad D(X)=9$; 10) $M(X)=-3,\quad D(X)=1/$
4) $M(X)=1,\quad D(X)=25$;

4.3 Неперервна випадкова величина X має розподіл $N(a;\sigma)$. Знайти $P(\alpha < X < \beta)$, якщо

1) $a=10,\quad \sigma=4,\quad \alpha=2,\quad \beta=14$;
2) $a=20,\quad \sigma=5,\quad \alpha=15,\quad \beta=25$;
3) $a=1,\quad \sigma=1,\quad \alpha=2,\quad \beta=3$;
4) $a=3,\quad \sigma=5,\quad \alpha=0{,}5,\quad \beta=3{,}5$;
5) $a=2,\quad \sigma=3,\quad \alpha=1{,}5,\quad \beta=3{,}2$;
6) $a=5,\quad \sigma=2,\quad \alpha=0{,}5,\quad \beta=7$;
7) $a=12,\quad \sigma=4,\quad \alpha=5,\quad \beta=10$;
8) $a=11,\quad \sigma=2,\quad \alpha=3,\quad \beta=12$;
9) $a=4,\quad \sigma=6,\quad \alpha=4,\quad \beta=6{,}5$;
10) $a=3,\quad \sigma=4,\quad \alpha=0{,}5,\quad \beta=9$.

4.4 Обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ та записати $F(x)$; знайти $P(\alpha < X < \beta)$, використовуючи формули (4.2) та (4.4), якщо задані диференціальна функція розподілу $f(x)$ неперервної випадкової величини X та значення для α β.

1) $$f(x)=\begin{cases} 0, & \textit{якщо} \quad x\le 0; \\ \dfrac{2x}{9}, & \textit{якщо} \quad 0<x\le 3; \\ 0, & \textit{якщо} \quad x>3; \end{cases} \qquad \alpha=0,\quad \beta=2;$$

2) $$f(x)=\begin{cases} 0, & \textit{якщо} \quad x\le 0; \\ 2\cos x, & \textit{якщо} \quad 0<x\le \dfrac{\pi}{6}; \\ 0, & \textit{якщо} \quad x>\dfrac{\pi}{6}. \end{cases} \qquad \alpha=\frac{\pi}{12},\quad \beta=\frac{\pi}{6};$$

3) $$f(x)=\begin{cases} 0, & \textit{якщо} \quad x \le 0; \\ \dfrac{\sin x}{2} & \textit{якщо} \quad 0 < x \le \pi; \\ 0, & \textit{якщо} \quad x > \pi. \end{cases} \qquad \alpha=\frac{\pi}{6}, \quad \beta=\frac{\pi}{3} \ ;$$

4) $$f(x)=\begin{cases} 0, & \textit{якщо} \quad x \le -\dfrac{\pi}{2}; \\ \dfrac{1}{\pi}(1+\cos 2x), & \textit{якщо} \quad -\dfrac{\pi}{2} < x \le \dfrac{\pi}{2}; \\ 0, & \textit{якщо} \quad x > \dfrac{\pi}{2}; \end{cases} \qquad \alpha=-\frac{\pi}{6}, \quad \beta=\frac{\pi}{2};$$

5) $$f(x)=\begin{cases} 0, & \textit{якщо} \quad x \le \dfrac{\pi}{6}, \\ 3\sin 3x, & \textit{якщо} \quad \dfrac{\pi}{6} < x \le \dfrac{\pi}{3}, \\ 0, & \textit{якщо} \quad x > \dfrac{\pi}{3}. \end{cases} \qquad \alpha=\frac{\pi}{6}, \quad \beta=\frac{\pi}{4}$$

6) $$f(x)=\begin{cases} 0, & \textit{якщо} \quad x \le 0, \\ 3x^2, & \textit{якщо} \quad 0 < x \le 1, \\ 0, & \textit{якщо} \quad x > 1; \end{cases} \qquad \alpha=0{,}5, \quad \beta=1$$

7) $$f(x)=\begin{cases} 0, & \textit{якщо} \quad x \le 2; \\ 2(x-2), & \textit{якщо} \quad 2 < x \le 3; \\ 0, & \textit{якщо} \quad x > 3. \end{cases} \qquad \alpha=2{,}2, \quad \beta=3;$$

8) $$f(x)=\begin{cases} 0, & \textit{якщо} \quad x \le 1; \\ x-\dfrac{1}{2}, & \textit{якщо} \quad 1 < x \le 2; \\ 0, & \textit{якщо} \quad x > 2. \end{cases} \qquad \alpha=\frac{1}{2}, \quad \beta=\frac{3}{2};$$

9) $$f(x)=\begin{cases} 0, & \textit{якщо} \quad x \le 0; \\ \sin x, & \textit{якщо} \quad 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}; \\ 0, & \textit{якщо} \quad x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases} \qquad \alpha=\frac{\pi}{12}, \quad \beta=\frac{\pi}{6}$$

10) $$f(x)=\begin{cases} 0, & \textit{якщо} \quad x \le 0; \\ \dfrac{1}{2}(2x-1), & \textit{якщо} \quad 0 < x \le 2; \\ 0, & \textit{якщо} \quad x > 2. \end{cases} \qquad \alpha=\frac{2}{5}, \quad \beta=\frac{3}{2}$$

ВІДПОВІДІ

1.1 0,412; ***1.2*** 0,372; ***1.3*** 0,094; ***1.4*** 0,5; ***1.5*** 0,331; ***1.6*** 0,3744; ***1.7*** 0,117; ***1.8*** 0,004; ***1.9*** а) 0,292, б) 0, 175; ***1.10*** 0,5; ***1.11*** а) 0,504; б) 0,006; в) 0,398; ***1.12*** 0,5814; ***1.13*** а) 0,006 б) 0,015296 в) 0,398 г) 0,496; ***1.14*** а) 0,329 б) 0,997; ***1.15*** а) 0,188 б) 0,452, в) 0,336; ***1.16*** а) 0,06 б) 0,94 в) 0,38; ***1.17*** а) 0,216 б) 0,657; ***1.18*** а) 0,384, б) 0,008; ***1.19*** а) 0,846, б) 0,147; ***1.20*** а) 0,14 б) 0,995; ***1.21*** 0,83; ***1.22*** 0,923; ***1.23*** 0,14; ***1.24*** 0,751; ***1.25*** 0,483; ***1.26*** 0,077; ***1.27*** 0,961; ***1.28*** 0,938; ***1.29*** 0,77; ***1.30*** 0,046; ***1.31*** 0,362; ***1.32*** 0,429; ***1.33*** 0,402; ***1.34*** 0,188; ***1.35*** 0,4; ***1.36*** 0,667; ***1.37*** 0,349; ***1.38*** 0,207; ***1.39*** 0769; ***1.40*** 0,449; ***2.1*** 0,9997559; 5, 0,356; ***2.2*** 0,9421; ***2.3*** а) 0,09999 б) 6, 0,735; ***2.4*** 0,908; ***2.5*** а) 2, 3, 0,25, б) 0,302; ***2.6*** а) 0,7738, б) 0,0214; ***2.7*** 0,9; ***2.8*** 2, 0,302; ***2.9*** а) 0,99;б) 7, 0,336; ***2.10*** а) 0,562; б) 6; 0,251; ***2.11*** а) 0,053;б) 0,0912; ***2.12*** 1) 0,00021; 2) 328; 0,052; ***2.13*** а) 0,024; б) 0,4895; ***2.14*** 400, 0,045; б)0,4873; ***2.15*** 0,126; б) 0,8985; ***2.16*** а) 0,2524, б) 225, 0,0532; ***2.17*** а) 0,39, б) 42, 0,073; ***2.18*** а) 0,0203;б) 0,015; ***2.19*** 1) 0,044, 2) 0,134; ***2.20*** 1) 0,077; 2) 0,9726; ***2.21*** 0,406; ***2.22*** а) 0,1804, б) 0, 3233; ***2.23*** а) 0,3679, б) 0,2606; ***2.24*** 0,96; ***2.25*** 0,238; ***2.26*** 1) 0,036; 2) 0,983; ***2.27*** 1) 0,104, 2) 0,826; ***2.28*** а) 0,003, б) 0,9994; ***2.29*** 0,3233; ***2.30*** а) 0,494, б) 0,987; ***2.31*** 0,988; ***2.32*** 0,02; ***2.33*** $15 \le m \le 33$; ***2.34*** $4 \le m \le 24$; ***2.35*** 625; ***2.36*** 1800; ***2.37*** $0{,}81 \le m/n \le 0{,}89$; ***2.38*** 212153; ***2.39*** $14 \le m \le 33$; ***2.40*** $14 \le m \le 190$;

3.1

X	0	1	2	3	4
p_k	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096
$M(X)$=3,1		$D(X)$=0,64		$\sigma(X)$=0,8	

3.2

X	0	1	2
p_k	0,2500	0,5000	0,2500
	$M(X)$=1	$D(X)$=0,5	$\sigma(X)$=0,7071

3.3

X	0	1	2	3	4	5	6
p_k	0,2231	0,3347	0,2510	0,1255	0,0471	0,0141	0,0035
$M(X)$=1,5					$D(X)$=1,5		$\sigma(X)$=1,2247

3.4

X	1	2	3	4	5	6	7
p_k	0,85000	0,12750	0,01913	0,00287	0,00043	0,00006	0,00001
$M(X)$=1,1765		$D(X)$=0,2076		$\sigma(X)$=0,4556			

3.5

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
p_k	0,1353	0,2707	0,2707	0,1804	0,0902	0,0361	0,0120	0,0034	0,0009
	$M(X)$=2			$D(X)$=3		$\sigma(X)=\sqrt{2}$			

3.6

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
p_k	0,0007	0,00122	0,01	0,04668	0,13614	0,25412	0,29648	0,1977	0,0576
	$M(X)=5{,}6$		$D(X)=1{,}68$		$\sigma(X)=1{,}2961$				

3.7

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
p_k	0,1353	0,2707	0,2707	0,1804	0,0902	0,0361	0,0120	0,0034	0,0009
$M(X)=2$			$D(X)=2$		$\sigma(X)=1{,}4142$				

3.8

X	1	2	3	4	5	6
p_k	0,5	0,25	0,125	0,625	0,03125	0,015625
$M(X)=1{,}969$	$D(X)=1{,}655$		$\sigma(X)=1{,}287$			

3.9

X	0	1	2	3	4
p_k	0,0020	0,0646	0,3394	0,4525	0,1414
$M(X)=2{,}667$		$D(X)=0{,}646$		$\sigma(X)=0{,}804$	

3.10

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p_k	0,500	0,250	0,120	0,063	0,031	0,016	0,008	0,004	0,002
	$M(X)=2$		$D(X)=2$		$\sigma(X)=1{,}4142$				

3.11

X	1	2	3	4	5	6	7
p_k	0,083	0,167	0,167	0,167	0,167	0,167	0,083
	$M(X)=4$		$D(X)=3{,}1667$		$\sigma(X)=1{,}7795$		

3.12

X	0	1	2	3	4
p_k	0,036	0,198	0,380	0,302	0,084
$M(X)=2{,}2$		$D(X)=0{,}94$		$\sigma(X)=0{,}9695$	

3.13

X	0	1	2	3	4
p_k	0,000004	0,000554	0,018	0,203094	0,778734
$M(X)=3{,}76$		$D(X)=0{,}221$		$\sigma(X)=0{,}4701$	

3.14

X	0	1	2	3	4
p_k	0,096	0,328	0,380	0,172	0,024
$M(X)=1{,}7$		$D(X)=0{,}89$		$\sigma(X)=0{,}943$	

3.15

X	0	1	2	3	4
p_k	0,072	0,386	0,420	0,114	0,008
$M(X)=1{,}6$		$D(X)=0{,}66$		$\sigma(X)=0{,}8124$	

3.16

X	0	1	2	3	4
p_k	0,5814	0,3432	0,07	0,0056	0,0002
$M(X)$ =0,5		$D(X)$ =0,425		$\sigma(X)$ =0,6519	

3.17

X	0	1	2	3
p_k	0,064	0,368	0,472	0,096
$M(X)$ =1,6		$D(X)$ =0,56	$\sigma(X)$ =0,7483	

3.18

X	0	1	2	3
p_k	0,28	0,47	0,22	0,03
$M(X)$ =1		$D(X)$ =0,62	$\sigma(X)$ =0,7874	

3.19

X	0	1	2	3
p_k	$\frac{12}{450}$	$\frac{102}{450}$	$\frac{210}{450}$	$\frac{126}{450}$
$M(X)$ =2	$D(X)$ =0,613		$\sigma(X)$ =0,7832	

3.20

X	0	1	2	3
p_k	0,003	0,056	0,329	0,612
$M(X)$ =2,55		$D(X)$ =0,378	$\sigma(X)$ =0,6144	

Завдання 4.1

№ варіанту	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$M(X)$	3,50	5,00	5,00	5,50	5,50	7,00	4,50	4,50	1,50	6,00
$D(X)$	2,08	3,00	1,33	4,08	2,08	3,00	2,08	0,75	2,08	3,00
$\sigma(X)$	1,44	1,73	1,15	2,02	1,44	1,73	1,44	0,87	1,44	1,73

Завдання 4.3

№ варіанту	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(\alpha < X < \beta)$	0,819	0,683	0,136	0,231	0,222	0,829	0,268	0,691	0,162	0,667

Завдання 4.4

№ варіанту	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(\alpha < X < \beta)$	0,444	0,482	0,183	0,804	0,707	0,875	0,96	0,375	0,1	0,495
$M(X)$	2	0,256	1,571	0	0,714	0,75	2,667	1,583	1	1,583
$D(X)$	0,5	0,023	0,467	0,322	0,016	0,038	0,056	0,076	0,142	0,142

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Андронов А. М. Теория вероятностей и математическая статистика / А. М. Андронов, Е. А. Копытов, Л. Я. Гринглаз, — СПб.: Питер, 2004 — 461 с.

2. Валь О. Д. Теорія ймовірностей… від найпростішого: навчальний посібник \ О. Д. Валь, С. І. Королюк, – Чернівці: Книги-XXI, 2004 — 160 с.

3. Вентцель Е. С. Теория вероятностей: учеб. для вузов. — М.: Высш. шк., 1999 — 576 с.

4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика.— М.: "Высшая школа", 1982.

5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. Учебное пособие для втузов.— М.: "Высшая школа", 1970.

6. Гнеденко В. В. Курс теории вероятностей. М. – Наука, 1988.

7. Гурский Е.И. Теория вероятностей с элементами математической статистики. – М.: "Высшая школа", 1971.

8. Іванюта І.Д. Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики: навчальний посібник / І. Д. Іванюта, В. І. Рибалка, І. А. Рудоміно-Дусятська, – Київ: «Слово», 2006 –272с.

9. Теория вероятностей и математическая статистика в задачах: Учебное пособие для вузов / В. А. Ватутин [и др.]. – М.: Дрофа, 2003. – 328с.

ДОДАТОК

Таблиця 1

Значення функції $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0.1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0.2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0.3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0.4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0.5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0.6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0.7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0.8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0.9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1.0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1.1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1.2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1.3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1.4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1.5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1.6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1.7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,833	0,0818	0,0804
1.8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,694	0,0681	0,0669
1.9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2.0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2.1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2.2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2.3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2.4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2.5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,151	0,0147	0,0143	0,0139
2.6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2.7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2.8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2.9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3.0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3.1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,026	0,0025	0,0025
3.2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3.3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3.4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3.5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3.6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3.7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3.8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3.9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

Таблиця 2

ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ ЛАПЛАСА $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0.1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0.2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0.3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0.4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0.5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0.6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0.7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0.8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0.9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1.0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1.1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1.2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1.3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1.4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1.5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1.6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1.7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1.8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1.9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2.0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2.1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2.2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2.3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2.4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2.5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2.6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2.7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2.8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2.9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3.0	0,4986	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3.1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3.2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3.3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3.4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3.5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3.6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3.7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3.8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3.9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

ЗМІСТ

Методичні вказівки і завдання до лабораторних робіт з курсу “Теорія ймовірностей та математична статистика” частина 1 для студентів 2-го курсу інженерно-технічного факультету спеціальності “Комп’ютерні системи та мережі”

Укладачі: Король І.Ю., канд. фіз.-мат. наук, доцент;
Мамай Л.М., канд. фіз.-мат наук;
Гапак О.М., канд. пед. наук

Рецензент: Сливка-Тилищак Г. І., канд. фіз.-мат наук, доцент

Відповідальний за випуск: Король І.Ю., канд. фіз.-мат. наук, доцент,
зав. кафедри комп’ютерних систем та мереж

Дані методичні вказівки розглянуто та схвалено на засіданні кафедри комп’ютерних систем та мереж, протокол № 8 від 25. 03. 2013р. та методичної комісії інженерно-технічного факультету, протокол № 1 від 18. 04. 2013 р