

**НАУКОВИЙ ВІСНИК**  
**Ужгородського університету**

*серія*

**МАТЕМАТИКА І  
ІНФОРМАТИКА**

*випуск 23 №1*

**2012**

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД  
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

# НАУКОВИЙ ВІСНИК УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

*Випуск 23 № 1*

Ужгород 2012

ББК 22.1+72.4 (4УКР)

У-33

УДК 51+001

**Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформ.** /  
Редкол.: **П. М. Гудивок** (гол. ред.) та інші. – Ужгород: Видавництво УжНУ  
"Говерла", 2012. – Вип. 23, № 1. – 136 с.

### РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Головний редактор — **Гудивок П. М.**, доктор фізико-математичних наук,  
професор.

Заст. головн. редактора — Маринець В. В., доктор фізико-математичних наук,  
професор.

Відповідальний секретар — Король І. І., доктор фізико-математичних наук,  
доцент.

Члени редакційної колегії:

Бабич М. Д., доктор фізико-математичних наук, професор;

Бовді А. А., доктор фізико-математичних наук, професор;

Волошин О. Ф., доктор технічних наук, професор;

Головач Й. Г., доктор технічних наук, професор;

Гусак Д. В., доктор фізико-математичних наук, професор;

Задирака В.К., член-кореспондент НАН України,

доктор фізико-математичних наук, професор;

Козаченко Ю. В., доктор фізико-математичних наук, професор;

Кузка О. І., кандидат фізико-математичних наук, доцент;

Маляр М. М., кандидат технічних наук, доцент;

Моца А. І., кандидат фізико-математичних наук, доцент;

Перестюк М. О., академік НАН України,

доктор фізико-математичних наук, професор;

Ронто М. Й., доктор фізико-математичних наук, професор.

Рекомендовано до друку Вченою радою Ужгородського національного  
університету, протокол № 6 від 29.05.2012 р.

Свідectво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації  
Серія КВ №7972 від 9.10.2003 року, видане Державним комітетом телебачення  
і радіомовлення України

Засновник і видавець – Державний вищий навчальний заклад «Ужгородський  
національний університет».

Виходить два рази на рік.

Збірник наукових праць видається з 1994 року.

Адреса редакційної колегії: Україна, 88016 Ужгород, вул. Університетська, 14,  
математичний факультет УжНУ. Тел. (факс): (0312) 642725.

© **Гудивок П. М.**,

І. І. Король, упорядкування, 2012

© Ужгородський національний університет,  
2012

## ЗМІСТ

1. Балого С. І., Король І. І., Питьовка О.Ю. Інваріантні многовиди одного класу систем диференціальних рівнянь . . . . .	4
2. Баранецький Я. О., Яржа У. Б., Федунко С. С. Ізоспектральні збурення диференціального оператора Діріхле . . . . .	12
3. Бондаренко В. М., Литвинчук И. В. О некоторых ручных и диких матричных задачах постоянного ранга . . . . .	17
4. Брила А. Ю., Гренджа В. І. Деякі задачі лексикографічної оптимізації альтернативними критеріями . . . . .	26
5. Гусак Д. В. Про наближення ймовірності банкрутства для процесів ризику з випадковими преміями . . . . .	30
6. Дзямко В. Й., Козаченко Ю. В., Моца А. І. Про зображення $\varphi$ -субгауссових періодичних випадкових процесів у вигляді рядів . . . . .	42
7. Динис Р. Ф., Тилищак О. А. Про звідність матриць деякого вигляду над комутативними локальними кільцями головних ідеалів . . . . .	55
8. Король І. Ю., Король І. І. Узагальнюючий підхід до побудови багатокрокових методів розв'язування задачі Коші . . . . .	61
9. Маринець В.В., Питьовка О. Ю. Крайова задача для систем диференціально-функціональних рівнянь гіперболічного типу . . . . .	69
10. Млавець Ю. Ю. Про розподіл супремумів приростів випадкових процесів з просторів $F_\psi(\Omega)$ . . . . .	79
11. Пагіря М. М. Наближення функцій інтерполяційними функціональними ланцюговими дробами . . . . .	89
12. Петенько В. О. Про локальну граничну теорему для квазіймовірнісних гра-тчастих розподілів і її застосування до наближеного знаходження фундаментального розв'язку рівняння типу Ейрі . . . . .	99
13. Погоріляк О. О. Моделювання випадкових процесів Кокса, керованих броу-нівським рухом . . . . .	107
14. Радченко В. М. Асимптотична поведінка розв'язку рівняння теплопровідно-сті зі стохастичною мірою при $t \rightarrow \infty$ . . . . .	113
15. Семенюта М. Ф., Черноусова Ж. Т. Дистанційна магічна розмітка графів . . . . .	119
16. Фекета П. В., Асроров Ф. А. Інтегральні множини розширень неавтномних систем на торі з імпульсними збуреннями . . . . .	125
17. Пам'яті Петра Михайловича Гудивка . . . . .	133

УДК 519.21

Ю. Ю. Млавець (Ужгородський нац. ун-т)

**ПРО РОЗПОДІЛ СУПРЕМУМІВ ПРИРОСТІВ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ З ПРОСТОРІВ  $F_\psi(\Omega)$ .**

The conditions of sampling continuity are investigated and estimates for distributions of supremums increments of processes from spaces  $F_\psi(\Omega)$  are evaluated.

Досліджуються умови вибіркової неперервності та знаходяться оцінки для розподілів супремумів приростів процесів з просторів  $F_\psi(\Omega)$ .

**Вступ.** Простори випадкових величин  $F_\psi(\Omega)$  були введені Єрмаковим і Островським в [1]. Робота [3], присвячена детальному вивченню цих просторів. Ця робота є продовженням [3]. Тут вивчаються умови вибіркової неперервності випадкових процесів з  $F_\psi(\Omega)$  та оцінки розподілів супремумів їх приростів. Подібні оцінки для процесів з  $Sub_\varphi(\Omega)$  отримані в [2].

Робота складається з вступу та трьох розділів. В першому розділі наведено необхідні відомості з теорії просторів  $F_\psi(\Omega)$ . В другому розділі знайдено оцінки для розподілів супремумів приростів випадкових процесів з  $F_\psi(\Omega)$  та отримано умови вибіркової неперервності з ймовірністю одиниця цих процесів. В третьому розділі результати другого розділу застосовуються до випадкових процесів з  $F_\psi(\Omega)$  визначених на  $[0, T]$ .

**1. Простори  $F_\psi(\Omega)$ .**

**Означення 1.** [3] Нехай  $\psi(u) > 0$ ,  $u \geq 1$  – монотонно зростаюча неперервна функція (вагова функція), така що  $\psi(u) \rightarrow \infty$ , якщо  $u \rightarrow \infty$ . Випадкова величина  $\xi$  належить простору  $F_\psi(\Omega)$ , якщо виконується умова

$$\sup_{u \geq 1} \frac{(E|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)} < \infty.$$

Простір  $F_\psi(\Omega)$  – простір Банаха з нормою [3]

$$\|\xi\|_\psi = \sup_{u \geq 1} \frac{(E|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)}.$$

**Теорема 1.** [3] Нехай випадкова величина  $\xi$  належить простору  $F_\psi(\Omega)$ , то для будь-якого  $x > 0$  виконується нерівність

$$P\{|\xi| > x\} \leq \inf_{u \geq 1} \frac{\|\xi\|_\psi^u (\psi(u))^u}{x^u}.$$

**Означення 2.** [3] Додатньо монотонно неспадна послідовність  $(\kappa(n))$ ,  $n \geq 1$ ) називається  $M$  - характеристикою (мажоруючою характеристикою) простору  $F_\psi(\Omega)$ , якщо для будь-яких випадкових величин  $\xi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  з цього простору виконується нерівність

$$\left\| \max_{1 \leq i \leq n} |\xi_i| \right\|_\psi \leq \kappa(n) \max_{1 \leq i \leq n} \|\xi_i\|_\psi.$$



**Теорема 2.** [3] *Послідовність*

$$\kappa(n) = \sup_{u \geq 1} \inf_{v > 0} n^{\frac{1}{u+v}} \frac{\psi(u+v)}{\psi(u)}$$

є  $M$ -характеристикою (мажоруючою характеристикою) простору  $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ .

**Приклад 1.** [3] Функція  $\psi(u) = u^\alpha$ , де  $\alpha > 0$ , то

$$P\{|\xi| > x\} \leq \exp \left\{ -\frac{\alpha}{e} \left( \frac{x}{\|\xi\|_\psi} \right)^{1/\alpha} \right\}$$

і мажоруюча характеристика  $\kappa(n) = (\ln n)^\alpha \left( \frac{e}{\alpha} \right)^\alpha$ .

**Приклад 2.** [3] Функція  $\psi(u) = e^{au}$ , де  $a > 0$ , то при  $x > \|\xi\|_\psi$

$$P\{|\xi| > x\} \leq \exp \left\{ -\frac{\left( \ln \frac{x}{\|\xi\|_\psi} \right)^2}{2a} \right\}$$

і мажоруюча характеристика  $\kappa(n) = e^{2\sqrt{a \ln n} - a}$ .

**Приклад 3.** [3] Функція  $\psi(u) = e^{u^2}$ , то при  $x > \|\xi\|_\psi$

$$P\{|\xi| > x\} \leq \exp \left\{ -\frac{2 \left( \ln \frac{x}{\|\xi\|_\psi} \right)^{3/2}}{3^{3/2}} \right\}$$

і мажоруюча характеристика  $\kappa(n) = \exp \left\{ \frac{3}{2^{2/3}} (\ln n)^{2/3} - 1 \right\}$ .

**Приклад 4.** Розглянемо простір  $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ , де  $\psi(u) = (\ln(u+1))^\lambda$ ,  $\lambda > 0$ . Знайдемо оцінку для  $P\{|\xi| > x\}$ ,  $x > 0$  і  $\xi \in \mathbf{F}_\psi(\Omega)$ . Оскільки

$$P\{|\xi| > x\} \leq \frac{\|\xi\|_\psi^u (\ln(u+1))^{\lambda u}}{x^u}, u \geq 1, \quad (1)$$

то покладемо  $u+1 = \exp \left\{ \left( \frac{x}{\|\xi\|_\psi} \right)^{1/\lambda} \frac{1}{z} \right\}$ ,  $z > 0$ . Тоді, підставляючи цей вираз в нерівність (1), отримаємо

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\|\xi\|_\psi (\ln(u+1))^\lambda}{x} \right)^u = \frac{1}{z^{\lambda u}} = \exp \{-\lambda u \ln z\} = \\ & = \exp \left\{ -\lambda (\ln z) \left( \exp \left\{ \left( \frac{x}{\|\xi\|_\psi} \right)^{1/\lambda} \frac{1}{z} \right\} - 1 \right) \right\} = \\ & = z^\lambda \exp \left\{ -\lambda (\ln z) \exp \left\{ \left( \frac{x}{\|\xi\|_\psi} \right)^{1/\lambda} \frac{1}{z} \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Далі покладемо в останній нерівності  $z = e$ , то

$$P\{|\xi| > x\} \leq e^\lambda \exp \left\{ -\lambda \exp \left\{ \left( \frac{x}{\|\xi\|_\psi} \right)^{1/\lambda} \frac{1}{e} \right\} \right\}.$$

Знайдемо мажоруючу характеристику цього простору. Оскільки

$$\kappa(n) = \sup_{u \geq 1} \inf_{v > 0} n^{\frac{1}{u+v}} \frac{\psi(u+v)}{\psi(u)} \leq \inf_{v > 0} z(v) n^{\frac{1}{v+1}},$$

де  $z(v) = \sup_{u \geq 1} \frac{\psi(u+v)}{\psi(u)}$ , а  $\left( \frac{\ln(u+v+1)}{\ln(u+1)} \right)' \leq 0$ , то  $z(v) = \left( \frac{\ln(v+2)}{\ln 2} \right)^\lambda$ , тоді  $\kappa(n) = \inf_{v > 0} \left( \frac{\ln(v+2)}{\ln 2} \right)^\lambda n^{\frac{1}{v+1}}$ . Коли  $n = 1$ , то  $\kappa(n) = 1$ , а при  $n > 1$  покладемо  $v = \ln n$ , тоді

$$\kappa(n) = \left( \frac{\ln(\ln n + 2)}{\ln 2} \right)^\lambda n^{\frac{1}{\ln n + 1}} \leq \left( \frac{\ln(\ln n + 2)}{\ln 2} \right)^\lambda e.$$

## 2. Оцінки розподілів супремумів приростів випадкових процесів з $F_\psi(\Omega)$ .

Нехай  $X = \{X(t), t \in T\}$  – випадковий процес,  $T = (T, \rho)$  – компактний метричний простір,  $\rho$  – метрика. Розглянемо  $N(u)$  – метрична масивність (число замкнених куль радіуса  $u$ , що покривають множину  $T$ ) простору  $(T, \rho)$  і  $b = \sup_{t, s \in T} \rho(t, s)$ ,  $\beta = \sigma \left( \inf_{s \in T} \sup_{t \in T} \rho(t, s) \right)$ , покладемо  $\varepsilon_k = \sigma^{(-1)}(bp^k)$ , де  $k = 0, 1, 2, \dots$ , а  $p \in (0, 1)$ .  $V_{\varepsilon_k}$  – множина центрів замкнених куль радіуса не більше  $\varepsilon_k$ , що покривають  $(T, \rho)$  причому число цих куль мінімальне (мінімальна  $\varepsilon_k$  сітка) і  $N(\varepsilon_k)$  – число точок  $V_{\varepsilon_k}$ . Позначимо  $V = \bigcup_{k=0}^{\infty} V_{\varepsilon_k}$ .

**Означення 3.** Випадковий процес  $X \in F_\psi(\Omega)$ , якщо для всіх  $t$  випадкова величина  $X(t) \in F_\psi(\Omega)$ .

**Означення 4.** [3] Відображенням  $\alpha_k(t)$ , де  $t \in V$  називається таке відображення  $V \rightarrow V_{\varepsilon_k}$ , що  $\alpha_k(t) \in V_{\varepsilon_k}$  та  $\rho(t, \alpha_k(t)) \leq \varepsilon_k$  (якщо  $t \in V_{\varepsilon_k}$ , то  $\alpha_k(t) = t$ ).

**Теорема 3.** Нехай  $X(t)$  – сепарабельний випадковий процес на  $(T, \rho)$  з простору  $F_\psi(\Omega)$  і виконується умова

$$\sup_{\rho(t,s) \leq h} \|X(t) - X(s)\|_\psi \leq \sigma(h), \quad (2)$$

де  $\sigma(h)$  неперервна монотонно зростаюча функція, така що  $\sigma(0) = 0$ . Виконується умова

$$\int_0^\alpha \kappa(N(\sigma^{(-1)}(u))) du < \infty, \quad (3)$$

де  $\kappa(n)$  – мажоруюча характеристика, а  $\sigma^{(-1)}(u)$  – обернена функція до  $\sigma(u)$ ;  $0 < \varepsilon \leq \alpha$  – деяке число, а  $k$  – таке ціле число, що  $\varepsilon_k < \varepsilon \leq \varepsilon_{k-1}$ . Тоді справджується нерівність

$$\left\| \sup_{\rho(t,s) \leq \varepsilon} |X(t) - X(s)| \right\|_{\psi} \leq \kappa(D_k(\varepsilon, p)) \sigma(\varepsilon) \frac{3-p}{1-p} +$$

$$+ 2 \frac{1}{p(1-p)} \int_0^{\sigma(\varepsilon)p} \kappa(N(\sigma^{(-1)}(u))) du = S_k(\varepsilon, p),$$

де  $D_k(\varepsilon, p)$  – число точок  $u, v$  з  $V_{\varepsilon_k}$ , таких що  $\|X(u) - X(v)\| \leq \sigma(\varepsilon) \frac{3-p}{1-p}$  та при будь-якому  $\delta > 0$  справджується нерівність

$$P \left\{ \sup_{\rho(t,s) \leq \varepsilon} |X(t) - X(s)| > \delta \right\} \leq \inf_{u \geq 1} \frac{(S_k(\varepsilon, p))^u (\psi(u))^u}{\delta^u}. \quad (4)$$

**Доведення.** Зауважимо, що справджуються нерівності

$$\sigma(\varepsilon_k) < \sigma(\varepsilon) \leq \sigma(\varepsilon_{k-1}), \quad bp^k < \sigma(\varepsilon) \leq bp^{k-1}.$$

Позначимо  $V_k = \bigcup_{j=k}^{\infty} V_{\varepsilon_j}$ . Оскільки за умови (2) процес неперервний за ймовірністю (див. доведення теореми 4.1 з [3]), то  $V_k$  – сепаранта, тому

$$\sup_{\substack{\rho(t,s) \leq \varepsilon \\ t,s \in T}} |X(t) - X(s)| = \sup_{\substack{\rho(t,s) \leq \varepsilon \\ t,s \in V_k}} |X(t) - X(s)|.$$

Нехай тепер  $t$  та  $s$  такі точки, що  $t, s \in V_k$  та  $\rho(t, s) \leq \varepsilon$ . Оскільки  $t$  та  $s$  належать  $V_k$  то існують такі  $m \geq k$  та  $r \geq k$ , що  $t \in V_{\varepsilon_m}$ , а  $s \in V_{\varepsilon_r}$ . Позначимо  $t_m = t$ ,  $t_{m-1} = \alpha_{m-1}(t_m)$ ,  $t_{m-2} = \alpha_{m-2}(t_{m-1})$ , ...,  $t_k = \alpha_k(t_{k+1})$  і  $s_r = s$ ,  $s_{r-1} = \alpha_{r-1}(s_r)$ ,  $s_{r-2} = \alpha_{r-2}(s_{r-1})$ , ...,  $s_k = \alpha_k(s_{k+1})$ . Очевидно, що виконується рівність

$$X(t) - X(s) =$$

$$= \sum_{l=k}^{m-1} (X(t_{l+1}) - X(t_l)) + (X(t_k) - X(s_k)) - \sum_{l=k}^{r-1} (X(s_{l+1}) - X(s_l)). \quad (5)$$

З (5) випливає нерівність

$$|X(t_k) - X(s_k)| \leq |X(t) - X(s)| + \sum_{l=k}^{m-1} |X(t_{l+1}) - X(t_l)| + \sum_{l=k}^{r-1} |X(s_{l+1}) - X(s_l)|.$$

Отже,

$$\|X(t_k) - X(s_k)\|_{\psi} \leq \|X(t) - X(s)\|_{\psi} + \sum_{l=k}^{m-1} \|X(t_{l+1}) - X(t_l)\|_{\psi} +$$

$$+ \sum_{l=k}^{r-1} \|X(s_{l+1}) - X(s_l)\|_{\psi} \leq \sigma(\varepsilon) + \sum_{l=k}^{m-1} \sigma(\varepsilon_l) + \sum_{l=k}^{r-1} \sigma(\varepsilon_l) \leq \sigma(\varepsilon) + 2 \sum_{l=k}^{\infty} \sigma(\varepsilon_l) =$$

$$= \sigma(\varepsilon) + 2 \sum_{l=k}^{\infty} bp^l - \sigma(\varepsilon) + 2b \frac{p^k}{1-p} \leq \sigma(\varepsilon) + 2\sigma(\varepsilon) \frac{1}{1-p} = \sigma(\varepsilon) \frac{3-p}{1-p}. \quad (6)$$



Із (5) тепер отримуємо нерівність

$$\begin{aligned}
 |X(t) - X(s)| &\leq \sum_{l=k}^{m-1} |X(t_{l+1}) - X(t_l)| + \sum_{l=k}^{r-1} |X(s_{l+1}) - X(s_l)| + \\
 + |X(t_k) - X(s_k)| &\leq \sum_{l=k}^{m-1} \max_{u \in V_{\varepsilon_{l+1}}} |X(u) - X(\alpha_l(u))| + \sum_{l=k}^{r-1} \max_{u \in V_{\varepsilon_{l+1}}} |X(u) - X(\alpha_l(u))| + \\
 + \max_{\substack{u, v \in V_{\varepsilon_k} \\ \|X(u) - X(v)\| \leq \sigma(\varepsilon) \frac{3-p}{1-p}}} |X(u) - X(v)| &\leq \max_{\substack{u, v \in V_{\varepsilon_k} \\ \|X(u) - X(v)\| \leq \sigma(\varepsilon) \frac{3-p}{1-p}}} |X(u) - X(v)| + \\
 + 2 \sum_{l=k}^{\infty} \max_{u \in V_{\varepsilon_{l+1}}} |X(u) - X(\alpha_l(u))|. &\quad (7)
 \end{aligned}$$

Оскільки останній вираз в нерівності (7) не залежить від  $t, s \in V_k$ , таких що  $\rho(t, s) \leq \varepsilon$ , то враховуючи сепарабельність процесу  $X$  з ймовірністю одиниця маємо нерівність

$$\begin{aligned}
 \sup_{\substack{\rho(t, s) \leq \varepsilon \\ t, s \in \mathbf{T}}} |X(t) - X(s)| &= \sup_{\substack{\rho(t, s) \leq \varepsilon \\ t, s \in V_k}} |X(t) - X(s)| \leq \\
 \leq \max_{\substack{u, v \in V_{\varepsilon_k} \\ \|X(u) - X(v)\| \leq \sigma(\varepsilon) \frac{3-p}{1-p}}} |X(u) - X(v)| &+ 2 \sum_{l=k}^{\infty} \max_{u \in V_{\varepsilon_{l+1}}} |X(u) - X(\alpha_l(u))| \leq N^2(\varepsilon_k). \quad (8)
 \end{aligned}$$

Тоді з (8) та означення  $\kappa(n)$  отримаємо нерівність

$$\begin{aligned}
 \left\| \sup_{\rho(t, s) \leq \varepsilon} |X(t) - X(s)| \right\|_{\psi} &\leq \left\| \max_{\substack{u, v \in V_{\varepsilon_k} \\ \|X(u) - X(v)\| \leq \sigma(\varepsilon) \frac{3-p}{1-p}}} |X(u) - X(v)| \right\|_{\psi} + \\
 + 2 \sum_{l=k}^{\infty} \left\| \max_{u \in V_{\varepsilon_{l+1}}} |X(u) - X(\alpha_l(u))| \right\|_{\psi} &\leq \kappa(D_k(\varepsilon, p)) \sigma(\varepsilon) \frac{3-p}{1-p} + 2 \sum_{l=k}^{\infty} \kappa(N(\varepsilon_{l+1})) \sigma(\varepsilon_l).
 \end{aligned}$$

Розглянемо другий доданок в правій частині останньої нерівності

$$\sum_{l=k}^{\infty} \kappa(N(\varepsilon_{l+1})) \sigma(\varepsilon_l) = \sum_{l=k}^{\infty} \kappa(N(\sigma^{(-1)}(bp^{l+1}))) bp^l,$$

то

$$\begin{aligned}
 \int_{bp^{l+2}}^{bp^{l+1}} \kappa(N(\sigma^{(-1)}(u))) du &\geq \kappa(N(\sigma^{(-1)}(bp^{l+1}))) (bp^{l+1} - bp^{l+2}), \\
 bp^l \kappa(N(\sigma^{(-1)}(bp^{l+1}))) &< \frac{1}{p(1-p)} \int_{bp^{l+2}}^{bp^{l+1}} \kappa(N(\sigma^{(-1)}(u))) du.
 \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \sum_{l=k}^{\infty} \kappa(N(\varepsilon_{l+1})) \sigma(\varepsilon_l) &\leq \frac{1}{p(1-p)} \int_0^{bp^{k+1}} \kappa(N(\sigma^{(-1)}(u))) du \leq \\ &\leq \frac{1}{p(1-p)} \int_0^{p\sigma(\varepsilon)} \kappa(N(\sigma^{(-1)}(u))) du. \end{aligned}$$

Теорему доведено.

**Зауваження 1.** Всі результати, які мають місце для метричного простору справедливі і в псевдометричному просторі.

**Наслідок 1.** Нехай виконуються умови теореми 3 і крім того справедлива умова  $\sigma(\varepsilon)\kappa(D_k(\varepsilon, p)) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Тоді

$$\left\| \sup_{\rho(t,s) \leq \varepsilon} |X(t) - X(s)| \right\|_{\psi} \rightarrow 0 \quad (9)$$

при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Крім того, випадковий процес  $X(t)$  рівномірно неперервний на  $(T, \rho)$  з ймовірністю одиниця.

**Доведення.** Оскільки за умов наслідку при  $\varepsilon \rightarrow 0$   $S_k(\varepsilon, p) \rightarrow 0$ , то твердження (9) очевидне. З нерівності (4) випливає, що для будь-якого  $u > 1$  справедливо

$$P \left\{ \sup_{\rho(t,s) \leq \varepsilon} |X(t) - X(s)| > \delta \right\} \leq \frac{(S_k(\varepsilon, p))^u (\psi(u))^u}{\delta^u},$$

то при  $\varepsilon \rightarrow 0$   $\sup_{\rho(t,s) \leq \varepsilon} |X(t) - X(s)| \rightarrow 0$ . Отже існує послідовність  $\check{\varepsilon}_n$ , така що  $\check{\varepsilon}_{n+1} < \check{\varepsilon}_n$ ,  $\check{\varepsilon}_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , що  $\sup_{\rho(t,s) \leq \check{\varepsilon}_n} |X(t) - X(s)| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  з ймовірністю одиниця. Оскільки  $\sup_{\rho(t,s) \leq \varepsilon} |X(t) - X(s)|$  монотонно спадає по  $\varepsilon$ , то і  $\sup_{\rho(t,s) \leq \varepsilon} |X(t) - X(s)| \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  з ймовірністю одиниця.

**Теорема 4.** Нехай  $X(t)$  – сепарабельний випадковий процес на  $(T, \rho)$  з простору  $F_{\psi}(\Omega)$ , де  $\psi(u)$  – така вагова функція, що для мажоруючої характеристики простору  $F_{\psi}(\Omega)$  виконується умова

$$\kappa(n^2) \leq C\kappa(n), \quad (10)$$

де  $C > 0$  – деяка константа.

Якщо виконується умова (3), тоді має місце нерівність

$$\left\| \sup_{\rho(t,s) \leq \varepsilon} |X(t) - X(s)| \right\|_{\psi} \leq A(C) \int_0^{\sigma(\varepsilon)} \kappa(N(\sigma^{(-1)}(u))) du = \check{S}_k(\varepsilon), \quad (11)$$

$$\text{де } A(C) = \frac{4(3C^2 - 12C + 4)}{3C + 2} \cdot \left(\frac{C+2}{C-2}\right)^2.$$

І при будь-якому  $\delta > 0$  справджується нерівність

$$P \left\{ \sup_{\rho(t,s) \leq \varepsilon} |X(t) - X(s)| > \delta \right\} \leq \inf_{u \geq 1} \frac{(\check{S}_k(\varepsilon))^u (\psi(u))^u}{\delta^u}. \quad (12)$$

**Доведення.** Теорема 4 випливає з теореми 3. Дійсно,  $D_k(\varepsilon, p) \leq (N(\varepsilon_k))^2 \leq (N(\sigma^{(-1)}(bp^k)))^2$ , тому

$$\sigma(\varepsilon) \kappa(D_k(\varepsilon, p)) \leq \kappa(N^2(\sigma^{(-1)}(bp^k))) \sigma(\varepsilon).$$

Оскільки виконується нерівність (10) то

$$\kappa(N^2(\sigma^{(-1)}(bp^k))) \sigma(\varepsilon) \leq C \kappa(N(\sigma^{(-1)}(bp^k))) \sigma(\varepsilon). \quad (13)$$

Легко бачити, що

$$\int_{bp^{k+1}}^{bp^k} \kappa(N(\sigma^{(-1)}(u))) du \geq \kappa(N(\sigma^{(-1)}(bp^k))) bp^k(1-p),$$

тому

$$\begin{aligned} \kappa(N(\sigma^{(-1)}(bp^k))) &\leq \frac{1}{bp^{k-1}p(1-p)} \int_{bp^{k+1}}^{bp^k} \kappa(N(\sigma^{(-1)}(u))) du \leq \\ &\leq \frac{1}{\sigma(\varepsilon)p(1-p)} \int_0^{\sigma(\varepsilon)} \kappa(N(\sigma^{(-1)}(u))) du. \end{aligned}$$

Отже, з (13) випливає

$$\begin{aligned} \kappa(D_k(\varepsilon, p)) \sigma(\varepsilon) \frac{3-p}{1-p} + \frac{2}{p(1-p)} \int_0^{\sigma(\varepsilon)p} \kappa(N(\sigma^{(-1)}(u))) du &\leq \\ \leq \kappa(N^2(\sigma^{(-1)}(bp^k))) \sigma(\varepsilon) \frac{3-p}{1-p} + \frac{2}{p(1-p)} \int_0^{\sigma(\varepsilon)} \kappa(N(\sigma^{(-1)}(u))) du &\leq \\ \leq C \kappa(N(\sigma^{(-1)}(bp^k))) \sigma(\varepsilon) \frac{3-p}{1-p} + \frac{2}{p(1-p)} \int_0^{\sigma(\varepsilon)} \kappa(N(\sigma^{(-1)}(u))) du &\leq \\ \leq \frac{1}{p(1-p)} \left( C \cdot \frac{3-p}{1-p} + 2 \right) \int_0^{\sigma(\varepsilon)} \kappa(N(\sigma^{(-1)}(u))) du. \end{aligned}$$

Мінімум виразу  $\frac{1}{p(1-p)} \left( C \cdot \frac{3-p}{1-p} + 2 \right)$  набувається в точці  $p = \frac{3C+2}{2C+4}$ . Підставляючи це значення в останню нерівність, отримаємо потрібне.

Теорему доведено.

**Зауваження 2.** Умови теореми виконуються для функцій  $\psi(u) = u^\alpha$ ,  $\psi(u) = (\ln(u+1))^\lambda$ . Якщо  $\psi(u) = u^\alpha$ , то  $\kappa(n^2) = 2^\alpha \kappa(n)$  тобто  $C = 2^\alpha$ , а коли  $\psi(u) = (\ln(u+1))^\lambda$ , то  $\kappa(n^2) = \left(\frac{\ln(2(\ln n+1))}{\ln 2}\right)^\lambda e \leq 2^\lambda \kappa(n)$  тобто  $C = 2^\lambda$ .

**Зауваження 3.** Нехай  $W(h)$ ,  $h > 0$  неперервна монотонно спадна функція, що  $N(h) \leq W(h)$ . Тоді умова (3) виконується коли

$$\int_0^z \kappa(W(\sigma^{(-1)}(u))) du < \infty \quad (14)$$

**Наслідок 2.** Нехай в теоремі 4

$$\sigma(h) = \frac{R}{(\kappa(W(h)))^{1/\gamma}},$$

де  $\gamma$  – деяке число, таке що  $0 < \gamma < 1$ . Тоді

$$\left\| \sup_{\rho(t,s) \leq \varepsilon} |X(t) - X(s)| \right\|_\psi \leq A(C) \frac{R}{1-\gamma} (\kappa(W(\varepsilon)))^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = Q(\varepsilon, \gamma)$$

та для будь-якого  $\delta > 0$  має місце нерівність

$$P \left\{ \sup_{\rho(t,s) \leq \varepsilon} |X(t) - X(s)| > \delta \right\} \leq \inf_{u \geq 1} \frac{(Q(\varepsilon, \gamma))^u (\psi(u))^u}{\delta^u}. \quad (15)$$

**Доведення.** Дійсно, в цьому випадку  $\sigma^{(-1)}(u) = W^{(-1)}(\kappa^{(-1)}(\frac{R^\gamma}{u^\gamma}))$ . Тоді

$$\int_0^{\sigma(\varepsilon)} \kappa(W(\sigma^{(-1)}(u))) du = \int_0^{\sigma(\varepsilon)} \frac{R^\gamma}{u^\gamma} du = \frac{R^\gamma}{1-\gamma} \sigma(\varepsilon)^{1-\gamma} < \infty. \quad (16)$$

**Приклад 5.** Якщо вагова функція  $\psi(u) = u^\alpha$ , де  $\alpha > 0$ , то

$$P \{ |\xi| > \delta \} \leq \exp \left\{ -\frac{\alpha}{e} \left( \frac{\delta}{Q(\varepsilon, \gamma)} \right)^{1/\alpha} \right\}$$

і використовуючи значення мажоруючої характеристики з прикладу 1 отримаємо

$$\sigma(h) = R \left( \frac{e}{\alpha} \ln W(h) \right)^{-\alpha/\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1.$$

**Приклад 6.** Якщо  $\psi(u) = e^{au}$ , де  $a \neq 0$ , то при  $\delta > Q(\varepsilon, \gamma)$

$$P \{ |\xi| > \delta \} \leq \exp \left\{ -\frac{\left( \ln \frac{\delta}{Q(\varepsilon, \gamma)} \right)^2}{2a} \right\}$$

і використовуючи значення мажоруючої характеристики з прикладу 2 отримаємо

$$\sigma(h) = R \cdot \exp \left\{ -\frac{2}{\gamma} \sqrt{a \ln W(h)} + \frac{a}{\gamma} \right\}, \quad 0 < \gamma < 1.$$

**Приклад 7.** Якщо  $\psi(u) = e^{u^2}$ , то при  $\delta > Q(\varepsilon, \gamma)$

$$P\{|\xi| > \delta\} \leq \exp \left\{ -\frac{2 \left( \ln \frac{\delta}{Q(\varepsilon, \gamma)} \right)^{3/2}}{3^{3/2}} \right\}$$

і використовуючи значення мажоруючої характеристики з прикладу 3 отримаємо

$$\sigma(h) = R \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{\gamma} \left( \frac{3}{2^{2/3}} (\ln W(h))^{2/3} - 1 \right) \right\}, \quad 0 < \gamma < 1.$$

**Приклад 8.** Якщо  $\psi(u) = (\ln(u+1))^\lambda$ , де  $\lambda > 0$ , то

$$P\{|\xi| > \delta\} \leq z^\lambda \exp \left\{ -\lambda (\ln z) \exp \left\{ \left( \frac{\delta}{Q(\varepsilon, \gamma)} \right)^{1/\lambda} \frac{1}{z} \right\} \right\}$$

і використовуючи значення мажоруючої характеристики з прикладу 4 отримаємо

$$\sigma(h) = R e^{-1/\gamma} \left( \frac{\ln 2}{\ln(\ln W(h) + 2)} \right)^{\lambda/\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1.$$

### 3. Випадкові процеси визначені на $[0, T]$ .

**Теорема 5.** Нехай  $X = \{X(t), t \in [0, T]\}$ , де  $T > 0$  – сепарабельний процес з простору  $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ . Нехай виконується умова

$$\sup_{|t-s| \leq h} \|X(t) - X(s)\|_\psi \leq \sigma(h),$$

де  $\sigma = \{\sigma(h), h > 0\}$  – неперервна монотонно зростаюча функція, така що  $\sigma(0) = 0$ . Для будь-якого  $\alpha > 0$  виконується умова

$$\int_0^z \kappa \left( \frac{T}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) du < \infty,$$

тоді справджується нерівність

$$\left\| \sup_{t \in [0, T]} |X(t) - X(s)| \right\|_\psi \leq A(C) \frac{R}{1-\gamma} \left( \kappa \left( \frac{T}{2\varepsilon} + 1 \right) \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \tilde{Q}(\varepsilon, \gamma).$$

Крім того? для будь-якого  $\delta > 0$  має місце нерівність

$$P \left\{ \sup_{t \in [0, T]} |X(t) - X(s)| > \delta \right\} \leq \inf_{u \geq 1} \frac{(\tilde{Q}(\varepsilon, \gamma))^u (\psi(u))^u}{\delta^u}. \quad (17)$$

**Доведення.** Теорема 5 випливає з наслідку 2, оскільки метрична масивність інтервалу  $[0, T]$  оцінюється так

$$N(u) \leq \frac{T}{2u} + 1 = W(u).$$



**Приклад 9.** Якщо функція  $\psi(u) = u^\alpha$ , де  $\alpha > 0$ , то

$$P\{|\xi| > \delta\} \leq \exp \left\{ -\frac{\alpha}{e} \left( \frac{\delta}{A(C) \frac{R}{1-\gamma} \left( \frac{e}{\alpha} \ln \left( \frac{T}{2\varepsilon} + 1 \right) \right)^{\frac{\alpha(\gamma-1)}{\gamma}}} \right)^{1/\alpha} \right\}$$

Аналогічно можна розглянути всі інші приклади, які були наведені.

В багатьох випадках легко отримати таку оцінку

$$\|X(t) - X(s)\|_\psi \leq g \cdot |t - s|^\tau, \quad (18)$$

де  $0 < \tau \leq 1$ . Покажемо, як з такої оцінки можна отримати оцінку вигляду

$$\sup_{|t-s| \leq h} \|X(t) - X(s)\|_\psi \leq R \left( \frac{e}{\alpha} \ln \left( \frac{T}{2h} + 1 \right) \right)^{-\alpha/\gamma} \quad (19)$$

Нехай  $0 < j < 1$  і  $u > 0$ , то  $j \ln \left( 1 + \frac{1}{u} \right) \leq \ln \left( 1 + \frac{1}{u^j} \right) \leq \frac{1}{u^j}$ , тобто  $u^j \leq \frac{1}{j \ln \left( 1 + \frac{1}{u} \right)}$ . Тепер, якщо будь-яке  $r > 0$ , то  $u^{rj} \leq \frac{1}{j^r \left( \ln \left( 1 + \frac{1}{u} \right) \right)^r}$ . І якщо взяти  $r$ , таке що  $rj = \tau$ , то маємо  $u^\tau \leq \frac{1}{\left( \frac{\tau}{r} \right)^r \left( \ln \left( 1 + \frac{1}{u} \right) \right)^r}$ . Перенішемо нерівність (18) так

$$\|X(t) - X(s)\|_\psi \leq g \left| \frac{2h}{T} \right|^\tau \cdot \frac{T^\tau}{2^\tau} \leq g \frac{T^\tau}{2^\tau} \frac{1}{\left( \frac{\tau}{r} \right)^r \left( \ln \left( 1 + \frac{T}{2h} \right) \right)^r}. \quad (20)$$

Якщо в останній нерівності покладемо, що  $r = -\frac{\alpha}{\gamma}$ , то має місце нерівність (19),

де  $R = g \frac{T^\tau}{2^\tau} \left( \frac{e}{r\gamma} \right)^{\alpha/\gamma}$ .

Мінімум у правій частині нерівності (20) набувається в точці

$$r = \tau \ln \left( 1 + \frac{T}{2h} \right) e^{-\tau \ln \left( 1 + \frac{T}{2h} \right)},$$

тоді отримаємо

$$\|X(t) - X(s)\|_\psi \leq g \frac{T^\tau}{2^\tau} \exp \left\{ -\tau^2 \ln^2 \left( 1 + \frac{T}{2h} \right) e^{-\tau \ln \left( 1 + \frac{T}{2h} \right)} \right\}$$

**Висновки.** В роботі знайдено оцінки розподілів супремумів приростів випадкових процесів з просторів  $F_\psi(\Omega)$  та умови їх вибіркової неперервності з ймовірністю одиниця. Ці оцінки, зокрема, можуть застосовуватись до точності апроксимації цих процесів різними класами функцій.

1. Ермаков С. В., Островский Е. И. Условия непрерывности, экспоненциальные оценки и центральная предельная теорема для случайных полей // Деп. в ВИНТИ. – 1986. – 42, №3752-В.86.0.
2. О. І. Василь, Ю. В. Козаченко, Р. Є. Ямленко  $\varphi$ -Субгауссові випадкові процеси: монографія, – К.: Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2008. – 231 с.
3. Козаченко Ю. В., Млавець Ю. Ю. Простори Банаха випадкових величин  $F_\psi(\Omega)$  // Теорія ймовір. та матем. статист. – 2012. – 86.

Одержано 12.04.2012