Завдання 1. *Нехай* λ_1*-міра Лебега на числовій прямій* $\mathbf{R}$*, а* λ_2*-міра Лебега на площині* $\mathbf{R}^2$*. Обчислити інтеграли* $\int_A f(x)d\lambda_1(x)$*,* $\int_A |f(x)|d\lambda_1(x)$*,*
$\int_B f(x,y)d\lambda_2(x,y)$*,* $\int_B |f(x,y)|d\lambda_2(x,y)$ *якщо*:

1. $f(x) = (-1)^{[x]}[x-2], \quad A = [-3;5];$
2. $f(x) = (-1)^{[x]}\left|[x]\right|, \quad A = [-4;4);$
3. $f(x) = (-1)^{[x^2]}, \quad A = \left[0; 2\sqrt{2}\right];$
4. $f(x) = sign \cos \pi x, \quad A = [-3;3];$
5. $f(x) = sign \sin \frac{\pi}{x}, \quad A = (0;1];$
6. $f(x) = [x] sign \cos \pi x, \quad A = [0;6];$
7. $f(x) = [x][2\sin x], \quad A = [0;\pi];$
8. $f(x,y) = [x+y], \quad B = [0;2] \times [0;2];$
9. $f(x,y) = \sqrt{[x-y^2]}, \quad B = [0;2] \times [x^2;4];$
10. $f(x,y) = \sqrt{[x-y^2]}, \quad B = [y^2;4] \times [0;2].$

Завдання 2. *Обчислити* $\int_{\mathbf{R}} f(x)d\lambda_1(x)$*, якщо*:

1. $A = \cup_{n=-\infty}^{\infty}[n; n+3^{-n})$, $f(x) = \sin[2\chi_A(x)]$, $x \in \mathbf{R}$;
2. $A = \cup_{n\in\mathbf{N}}(n^2; n^2 + \frac{1}{n(n+1)})$, $f(x) = -\chi_A(x)$, $x \in \mathbf{R}$;
3. $A = \cup_{n\in\mathbf{N}}(n+3^{-n}; n+2^{-n})$, $f(x) = \sinh \chi_A(x) + \chi_A(x)$, $x \in \mathbf{R}$;
4. $A = \cup_{n\in\mathbf{N}}(n!; n! + \frac{1}{n!})$, $f(x) = \arctan \chi_A(x)$, $x \in \mathbf{R}$;
5. $A = \cup_{n\in\mathbf{N}}[\frac{5}{n} - \frac{1}{n(n+1)}; \frac{5}{n})$, $f(x) = 10\chi_A(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

   Обчислити $\int_{[0;1]} f(x)d\lambda_1(x)$*, якщо*:

6. $f(x) = \begin{cases} x^{10}, & x \in \mathbf{Q}; \\ (1+x^2)^{-1}, & x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}; \end{cases}$
7. $f(x) = \begin{cases} x, & \cos x \in \mathbf{Q}; \\ \tan x, & \cos x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}; \end{cases}$
8. $f(x) = \begin{cases} x^2, & \sin x \in \mathbf{Q}; \\ \sin^2 x, & \sin x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}; \end{cases}$
9. $f(x) = \begin{cases} \cosh x, & x \in \mathbf{Q}; \\ (1+x^2)^{-1}, & x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}; \end{cases}$
10. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbf{Q}; \\ x^4, & x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}. \end{cases}$

Завдання 3. *Визначити, для яких* $p \geq 1$ *функція* $f \in (L_p[0,1], \lambda_1)$*, якщо*:

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (0;1)\setminus\mathbf{Q}; \\ \sin x, & x \in (0;1)\cap\mathbf{Q}; \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} (1-x)^{-1}, & x \in (0;1)\setminus\mathbf{Q}; \\ \cos x, & x \in (0;1)\cap\mathbf{Q}; \end{cases}$
3. $f(x) = (1-x)^{-2}, \quad x \in (0;1);$

4. $f(x) = \frac{e^x}{x^2(1-x)^4}, \quad x \in (0;1)$.

   Визначити, для яких α, β *функція* $f \in (L_p(\mathbf{R}), \lambda_1)$, $p \geq 1$ *при* $x \in \mathbf{R}$:

5. $f(x) = \frac{|arctgx|^\alpha}{(1+x^2)^\beta}$;

6. $f(x) = \frac{|1-x|^\beta}{(1+x^4)|x|^\alpha}$.

   Визначити при яких $p \geq 1$ *послідовність* $\{f_n : n \geq 1\} \subset (L_p(\mathbf{R}), \lambda_1)$ *збігається в* $(L_p(\mathbf{R}), \lambda_1)$ *якщо* $n \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{R}$:

7. $f_n(x) = n^2 e^{-nx^2}$;

8. $f_n(x) = \sqrt{n}\chi_{[0;1/n)}(x)$;

9. $f_n(x) = \sqrt{n}\chi_{[0;1/n^2)}(x)$;

10. $f_n(x) = n^{-2} e^{\frac{-x}{n}} \chi_{[0;\infty)}(x)$.