Завдання 1. *Для множини* $A \subset X$ *покладемо:* $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad x \in A; \\ 0, & \text{якщо} \quad x \overline{\in} A. \end{cases}$ *Нехай* $\{x_1, x_2\} \in X$. *Чи буде* μ *мірою на* 2^X *якщо* $\forall E \subset X$:

1. $\mu(E) = |\chi_E(x_1) - \chi_E(x_2)|$;
2. $\mu(E) = (\chi_E(x_1) + \chi_E(x_2))^2$;
3. $\mu(E) = 2 - \chi_E(x_1) - \chi_E(x_2)$; $E \neq \emptyset$, $\mu(\emptyset) = 0$;
4. $\mu(E) = 2\chi_E(x_1) + 3\chi_E(x_2)$;
5. $\mu(E) = 1 - \chi_E(x_1)$, $E \neq \emptyset$, $\mu(\emptyset) = 0$.

   Нехай μ *- міра на* σ*-алгебрі* σA,

$$\{A_n, n \geq 1\} \subset \sigma A, A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \ldots$$

   Знайти $\mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$, *якщо:*

6. $\mu(A_n) = \frac{1}{n(n+1)}$;
7. $\mu(A_n) = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$;
8. $\mu(A_n) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$;
9. $\mu(A_n) = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$;
10. $\mu(A_n) = \frac{2^n}{n!}$.

Завдання 2. *Нехай* λ_1 *– міра Лебега на прямій. Довести, що множина* A *– борелівська і знайти* $\lambda_1(A)$, *якщо:*

1. $A = \cup_{n=1}^{\infty} \left(n - \frac{1}{2^n}; n + \frac{1}{2^n}\right)$;
2. $A = \cup_{n=1}^{\infty} [n^2 - \frac{\pi}{3^{n+5}}; n^2 + \frac{\pi}{3^{n+5}}]$;
3. $A = \cup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+1)^2}; \frac{1}{n^2}\right)$;
4. $A = \cup_{n=1}^{\infty} \left(n^n; n^n + \frac{1}{\ln(n+1)}\right) \cap \mathbf{Q}$;
5. $A = \cup_{n=1}^{\infty} \left[3^n; 3^n + \frac{1}{3^n}\right] \setminus \mathbf{Q}$;
6. $A = \cup_{n=1}^{\infty} (-10; \operatorname{arctg} n) \setminus \mathbf{Q}$;
7. $A = \cup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln(n+2)}; \frac{1}{\ln(n+1)}\right)$;
8. $A = \cup_{n=1}^{\infty} \left[n^3 - \frac{1}{5^n}; n^3 + \frac{1}{5^n}\right] \cap (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})$;
9. $A = \cup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+3}; \frac{1}{n+4}\right) \setminus \mathbf{Z}$;
10. $A = \cup_{n=1}^{\infty} \left(n!; n! + \frac{1}{n^2}\right) \cap \mathbf{Q}$.

Завдання 3. *Нехай* $A \subset \mathbf{R}^2$. *Довести, що* A *– борелівська множина і знайти* $\lambda_2(A)$, *якщо:*

1. $A = (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \times (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})$;
2. $A = \mathbf{Q} \times \mathbf{R}$;
3. $A = \{x : \sin x \in \mathbf{Q}\} \times \mathbf{R}$;
4. $A = \{x : e^x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}\} \times [0; 1]$;

5. $A = (0;3] \times [1;2) \setminus (\mathbf{Q} \times \mathbf{Q})$;
6. $A = (a;b] \times (c;\infty), a < b$;
7. $A = ((0;3] \times [1;2]) \setminus (\mathbf{Q} \times \mathbf{Q})$;
8. $A = \{x : \cos x \in \mathbf{Q}\} \times \mathbf{R}$;
9. $A = \{x : e^x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}\} \times [0;1]$;
10. $A = \{x : \operatorname{ctg} x \in \mathbf{Q}\} \times (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})$.

Завдання 4. *Побудувати послідовність $\{A_n, n \geq 1\}$ борелівських множин на прямій (в прикладах 1,2,3,4,5) і на площині (в прикладах 6,7,8,9,10) таку, що*

1. $\lambda_1(A_n) = 1, \quad n \geq 1, \quad \cup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbf{R}$;
2. $\lambda_1(A_n) = +\infty, \quad A_n \supset A_{n+1}, \quad n \geq 1, \quad \lambda_1(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$;
3. $\lambda_1(A_n) = +\infty, \quad n \geq 1, \quad \cap_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbf{N}$;
4. $\lambda_1(A_n) = +\infty, \quad A_n \supset A_{n+1}, \quad n \geq 1, \quad \lambda_1(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = 3$;
5. $\lambda_1(A_n) = 2, \quad n \geq 1, \quad \cup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbf{R}$;
6. $\lambda_2(A_n) = \pi, \quad n \geq 1, \quad \cup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbf{R}^2$;
7. $\lambda_2(A_n) = \frac{1}{n^2}, \quad n \geq 1, \quad \cap_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbf{Q} \times \mathbf{Z}$;
8. $\lambda_2(A_n) = \infty, \quad A_n \supset A_{n+1}, \quad n \geq 1, \quad \lambda_2(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$;
9. $\lambda_2(A_n) = \frac{1}{2^n}, \quad n \geq 1, \quad \cap_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbf{R} \times \{0\}$;
10. $\lambda_2(A_n) = \frac{1}{2^n}, \quad n \geq 1, \quad \cap_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

Завдання 5.

1. *Довести, що будь-яка вимірна множина E на прямій, яка має додатну лінійну міру p, містить вимірну підмножину міри q, де q – довільне задане додатне число: $0 < q < p$.*
2. *Довести, що будь-яка вимірна множина E на прямій (не обов'язково обмежена), така, що $\mu(E) = p > 0$, містить вимірну підмножину міри q, де q – довільне задане додатне число: $0 < q < p$.*
3. *Нехай $A \subset \mathbf{R}$ – вимірна за Лебегом множина, A містить хоча б одну внутрішню точку. Довести, що $\lambda_1(A) > 0$.*
4. *Чи можна побудувати на $[a;b]$ замкнену множину лінійної міри $b - a$, відмінну від відрізка $[a;b]$?*
5. *Чи може перетин вимірних множин $\cap_{n=1}^{\infty} E_n$, де $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots$ і $\mu(E_n) = +\infty$, $n \geq 1$, мати нескінченну міру? Чи може цей перетин мати скінченну міру або міру нуль?*
6. *Чи може сума $\cup_{n=1}^{\infty} E_n$, де $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots$ мати скінченну міру або нескінченну міру, якщо міра кожної E_n скінченна?*
7. *Чи може вимірна необмежена множина на прямій мати скінченну додатну міру?*
8. *Довести, що якщо E – вимірна множина на прямій додатної міри, то в ній знайдуться точки, віддаль між якими ірраціональна.*
9. *Нехай $X = \mathbf{N}$ – множина натуральних чисел, а $\mathcal{P}$ – сукупність всіх скінченних підмножин (включаючи й порожню множину $\emptyset$) множини X. Для кожної множини $A \in \mathcal{P}$ визначимо число $\mu_0(A)$, що дорівнює кількості елементів множини A. Побудувати лебегово продовження міри μ_0.*
10. *Нехай на відрізку $X = [0;1]$ задана невід'ємна функція $f(x)$. Для кожної скінченної множини $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ точок відрізка $[0;1]$ покладемо $\mu(A) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$. Довести, що функція множин μ є зліченно-адитивною, але не є σ-скінченною мірою.*