Курс: «Рівняння в частинних похідних та їх застосування» **ст. викл. Рего В. Л.**
До Модуля 4
Цикл лекцій по темах розділу:

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯНЬ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ

1. Фізичні процеси, що описуються рівняннями еліптичного типу. Постановка крайових задач

Рівняння еліптичного типу описують стаціонарні фізичні процеси різної природи. Такі рівняння як правило отримуються з рівнянь гіперболічного та параболічного типів, що описують відповідні нестаціонарні процеси.
Так, наприклад, коливання однорідної мембрани, як відомо, описуються рівнянням гіперболічного типу

$$U_{tt} = a^2\left(U_{xx} + U_{yy}\right) + f(t,x,y). \tag{1.1}$$

Якщо процес стаціонарний, тобто $U(t,x,y) \equiv U(x,y)$, $f(t,x,y) \equiv f(x,y)$, то з (1.1) очевидно отримуємо ДРЧП еліптичного типу

$$U_{xx} + U_{yy} = -\frac{f(x,y)}{a^2},$$

яке називають ***рівнянням рівноваги*** однорідної мембрани.
Аналогічно: процес поширення тепла в однорідному тілі, як відомо, описується рівнянням параболічного типу

$$U_t = a^2\left(U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}\right) + f(t,x,y,z). \tag{1.2}$$

Якщо процес стаціонарний, тобто $U(t,x,y,z) \equiv U(x,y,z)$, $f(t,x,y,z) \equiv f(x,y,z)$, то з (1.2) очевидно отримуємо ДРЧП еліптичного типу

$$U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = -\frac{f(x,y,z)}{a^2},$$

яке називають ***рівнянням стаціонарного розподілу температури*** в однорідному тілі.

Одним із найпоширеніших ДРЧП еліптичного типу є ***рівняння Лапласа***

$$\Delta U(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \tag{1.3}$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1} + \frac{\partial^2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n}$ – ***оператор Лапласа***.

Означення 1. Функція $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається ***гармонічною в обмеженій області*** **D**, якщо вона в цій області двічі неперервно-диференційовна за всіма аргументами і справджує рівняння Лапласа (1.3).

Означення 2. Функція $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається ***гармонічною в необмеженій області*** $\mathbf{D}^*$, якщо в кожній точці цієї області, що знаходиться на скінченій віддалі від початку координат, ця функція двічі неперервно-диференційовна за всіма аргументами, справджує рівняння Лапласа (1.3) і для досить великих $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ має силу нерівність (***умова регулярності на нескінченності***)

$$|U(x_1, x_2, ..., x_n)| \le Cr^{2-n}, \quad C = const. \tag{1.4}$$

Зауважимо, що у випадку двовимірного простору ($n = 2$) умова регулярності на нескінченності набуває вигляду $|U(x, y)| \le C$, C=*const*, тобто є умовою обмеженості функції для досить великих $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Тривимірне рівняння Лапласа

$$U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = 0$$

описує зокрема наступні фізичні процеси:

– поле тяжіння, створюване масами, розміщеними у скінченій кількості точок простору: у цьому випадку функцію $U(x, y, z)$ називають потенціалом тяжіння, а власне сила тяжіння рівна $F(x, y, z) = \mathrm{grad}\, U$;
– стаціонарний розподіл температури в однорідному тілі за відсутності внутрішніх джерел тепла: тоді функція $U(x, y, z)$ визначає температуру тіла у його точці з координатами (x, y, z);
– потенціальний потік нестисливої рідини в деякому об'ємі за відсутності внутрішніх джерел рідини: у цьому випадку функцію $U(x, y, z)$ називають потенціалом швидкостей, а власне швидкість потоку рівна $V(x, y, z) = -\mathrm{grad}\, U$

тощо.

Неоднорідне рівняння Лапласа

$$\Delta U(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{1.5}$$

називається ***рівнянням Пуассона***.

Тривимірне рівняння Пуассона

$$U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = \Phi(x, y, z)$$

описує зокрема наступні фізичні процеси:

– поле тяжіння, створюване масою, рівномірно розподіленою по деякому об'єму: у цьому випадку вільний член рівний $\Phi(x, y, z) = -4\pi\rho(x, y, z)$, де $\rho(x, y, z)$ – густина розподілу мас;
– стаціонарний розподіл температури в однорідному тілі за наявності внутрішніх джерел тепла: тоді вільний член рівний $\Phi(x, y, z) = -k^{-1} f(x, y, z)$, де k – коефіцієнт внутрішньої теплопровідності, $f(x, y, z)$ – інтенсивність внутрішніх джерел тепла;
– потенціальний потік нестисливої рідини в деякому об'ємі за наявності внутрішніх джерел рідини: у цьому випадку вільний член рівний $\Phi(x, y, z) = -\rho^{-1} f(x, y, z)$, де ρ – густина рідини, $f(x, y, z)$ – інтенсивність джерел

тощо.

Оскільки рівняння еліптичного типу описують стаціонарні (незалежні від часу) процеси, то задачі, що ставляться для таких рівнянь, не містять початкових умов, а тому називаються ***крайовими задачами***. Залежно від області постановки – обмеженої чи необмеженої – розрізняють ***внутрішні*** та ***зовнішні*** крайові задачі.

Наведемо постановку основних крайових задач для рівняння Пуассона (1.5).

1. Внутрішня [зовнішня] задача Діріхле: у класі функцій $C^2(\mathbf{D})\cap C(\overline{\mathbf{D}})$, $\overline{\mathbf{D}}=\mathbf{D}\cup\mathbf{S}$ [$C^2(\mathbf{D}^*)\cap C(\overline{\mathbf{D}}^*)$, $\overline{\mathbf{D}}^*=\mathbf{D}^*\cup\mathbf{S}$] знайти розв'язок $U(x_1,x_2,...,x_n)$ рівняння (1.5), який на границі $\mathbf{S}$ області $\mathbf{D}$ [$\mathbf{D}^*$] набуває заданих значень:

$$U(x_1,x_2,...,x_n)\big|_{\mathbf{S}}=\mu(x_1,x_2,...,x_n), \tag{1.6}$$

де $\mu(x_1,x_2,...,x_n)$ – відома неперервна на $\mathbf{S}$ функція.

2. Внутрішня [зовнішня] задача Неймана: у класі функцій $C^2(\mathbf{D})\cap C^1(\overline{\mathbf{D}})$ [$C^2(\mathbf{D}^*)\cap C^1(\overline{\mathbf{D}}^*)$] знайти розв'язок $U(x_1,x_2,...,x_n)$ рівняння (1.5), який на границі $\mathbf{S}$ області $\mathbf{D}$ [$\mathbf{D}^*$] справджує умову

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \vec{n}}\right|_{\mathbf{S}}=\nu(x_1,x_2,...,x_n), \tag{1.7}$$

де $\vec{n}$ – зовнішня нормаль до $\mathbf{S}$, а $\nu(x_1,x_2,...,x_n)$ – відома неперервна на $\mathbf{S}$ функція.

3. Третя внутрішня [зовнішня] крайова задача: у класі функцій $C^2(\mathbf{D})\cap C^1(\overline{\mathbf{D}})$ [$C^2(\mathbf{D}^*)\cap C^1(\overline{\mathbf{D}}^*)$] знайти розв'язок $U(x_1,x_2,...,x_n)$ рівняння (1.5), який на границі $\mathbf{S}$ області $\mathbf{D}$ [$\mathbf{D}^*$] справджує умову

$$\left.\left[\frac{\partial U}{\partial \vec{n}}+hU\right]\right|_{\mathbf{S}}=\gamma(x_1,x_2,...,x_n),$$

де $h=const>0$, а $\gamma(x_1,x_2,...,x_n)$ – відома неперервна на $\mathbf{S}$ функція.

Зауважимо, що при побудові розв'язків зовнішніх крайових задач окрім рівняння та крайової умови слід враховувати також умову регулярності на нескінченності (1.4). Справедливі наступні теореми.

Теорема 1.1 ***(про єдиність розв'язку задачі Діріхле)***. Як внутрішня, так і зовнішня задачі Діріхле для рівняння Пуассона (1.5) мають не більш ніж один розв'язок у розглядуваній області (тобто: якщо розв'язок внутрішньої або зовнішньої задачі Діріхле існує, то він є єдиним).

Теорема 1.2 ***(про неперервну залежність розв'язку задачі Діріхле від крайової умови)***. Нехай $U(x_1,x_2,...,x_n)$ є розв'язком внутрішньої задачі Діріхле (1.5)-(1.6), а $U_1(x_1,x_2,...,x_n)$ – розв'язок рівняння (1.5), який справджує крайову умову $U_1(x_1,x_2,...,x_n)\big|_{\mathbf{S}}=\mu_1(x_1,x_2,...,x_n)$. Тоді, якщо для деякого $\varepsilon>0$

$$|\mu(x_1,x_2,...,x_n)-\mu_1(x_1,x_2,...,x_n)|<\varepsilon,\quad \forall(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbf{S},$$

то

$$|U(x_1,x_2,...,x_n)-U_1(x_1,x_2,...,x_n)|<\varepsilon,\quad \forall(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbf{D}.$$

Теорема 1.3 ***(про розв'язок внутрішньої задачі Неймана)***. У класі функцій $C^2(\mathbf{D})\cap C^1(\overline{\mathbf{D}})$ розв'язок внутрішньої задачі Неймана (1.5)-(1.7) визначається з точністю до довільної сталої (тобто будь-які два нерівні розв'язки цієї задачі відрізняються на сталий доданок). У двовимірному просторі ($n=2$) твердження теореми справедливе також для зовнішньої задачі Неймана.

Теорема 1.4 ***(про розв'язок зовнішньої задачі Неймана)***. Для багатовимірного простору ($n>2$) у класі функцій $C^2(\mathbf{D}^*)\bigcap C^1(\overline{\mathbf{D}}^*)$ розв'язок зовнішньої задачі Неймана (1.5)-(1.7)-(1.4) є єдиним.

Теорема 1.5 ***(умова стаціонарності теплового поля)***. Якщо гармонічна в обмеженій області **D** функція $U(x_1,x_2,...,x_n)\in C^1(\overline{\mathbf{D}})$, то

$$\iint\limits_{\mathbf{S}} \frac{\partial U}{\partial \vec{n}} ds = 0. \tag{1.8}$$

Із Теореми 1.5 випливає, що у випадку задачі Неймана для рівняння Лапласа (1.3) для функції $\nu(x_1,x_2,...,x_n)$ із крайової умови (1.7) повинна виконуватися рівність

$$\iint\limits_{\mathbf{S}} \nu(x_1,x_2,...,x_n)ds = 0. \tag{1.9}$$

За невиконання умови коректності постановки (1.9) задача Неймана (1.3)-(1.7) – як внутрішня, так і зовнішня – розв'язку не має.
Якщо розглядати стаціонарний процес розподілу температури в однорідному тілі **D**, то з фізичної точки зору умова (1.8) означає, що загальна кількість тепла, яка проходить через замкнуту поверхню $\mathbf{S}$ тіла **D**, рівна нулеві. Тому умову (1.8) називають ***умовою стаціонарності теплового поля***.

Зауважимо, що окрім сформульованих трьох основних крайових задач для рівнянь еліптичного типу на практиці зустрічаються складніші задачі з крайовими умовами різного роду на частинах границі $\mathbf{S}$.

2. Задача Діріхле для прямокутника. Метод відокремлення змінних

Позначимо через **D** прямокутну область декартової площини із замиканням $\overline{\mathbf{D}}=\{(x,y)|\ 0\le x\le a,\ 0\le y\le b\}$. Розглянемо задачу Діріхле: у класі функцій $C^2(\mathbf{D})\bigcap C(\overline{\mathbf{D}})$ знайти розв'язок рівняння Пуассона

$$\Delta U(x,y)\equiv U_{xx}+U_{yy}=f(x,y), \tag{2.1}$$

який на сторонах прямокутника справджує крайові умови

$$\begin{aligned} &U(0,y)=\mu_1(y),\quad U(a,y)=\mu_2(y),\quad 0\le y\le b;\\ &U(x,0)=\nu_1(x),\quad U(x,b)=\nu_2(x),\quad 0\le x\le a. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Будемо вважати, що вільний член у рівнянні (2.1) і функції, що входять у крайові умови (2.2), справджують умови узгодженості

$$f(0,y)=f(a,y)=f(x,0)=f(x,b)=0, \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} &\nu_1(0)=\nu_1(a)=0,\quad \nu_2(0)=\nu_2(a)=0,\\ &\mu_1(0)=\mu_1(b)=0,\quad \mu_2(0)=\mu_2(b)=0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

У такому випадку розв’язок задачі (2.1)-(2.2) можна шукати у вигляді суми трьох функцій

$$U(x,y)=U_1(x,y)+U_2(x,y)+V(x,y), \tag{2.5}$$

де $U_1(x,y)$, $U_2(x,y)$ і $V(x,y)$ – розв’язки «дочірніх» крайових задач

$$\begin{aligned}&\Delta U_1(x,y)=0, \quad (x,y)\in\mathbf{D},\\ &U_1(0,y)=0, \quad U_1(a,y)=0, \quad 0\le y\le b,\\ &U_1(x,0)=\nu_1(x), \quad U_1(x,b)=\nu_2(x), \quad 0\le x\le a;\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}&\Delta U_2(x,y)=0, \quad (x,y)\in\mathbf{D},\\ &U_2(0,y)=\mu_1(y), \quad U_2(a,y)=\mu_2(y), \quad 0\le y\le b,\\ &U_2(x,0)=0, \quad U_2(x,b)=0, \quad 0\le x\le a;\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}&\Delta V(x,y)=f(x,y), \quad (x,y)\in\mathbf{D},\\ &V(0,y)=0, \quad V(a,y)=0, \quad 0\le y\le b,\\ &V(x,0)=0, \quad V(x,b)=0, \quad 0\le x\le a.\end{aligned} \tag{2.8}$$

За виконання умов узгодженості (2.4) задачі (2.6) і (2.7) для рівняння Лапласа є коректно поставленими, а отже, для побудови їх розв’язків застосовний метод відокремлення змінних (метод Фур’є), алгоритм якого вже неодноразово ілюструвався на прикладах мішаних задач для рівнянь гіперболічного та параболічного типів. Згідно з цим алгоритмом розв’язок задачі (2.6) шукаємо у вигляді добутку двох функцій

$$U_1(x,y)=X_1(x)\cdot Y_1(y)\neq 0, \tag{2.9}$$

кожна з яких знаходиться окремо з урахуванням рівняння та крайових умов першої «дочірньої» задачі. Підставивши (2.9) у рівняння задачі (2.6), одержимо:

$$X_1''(x)\cdot Y_1(y)+X_1(x)\cdot Y_1''(y)=0 \quad\Rightarrow\quad X_1''(x)\cdot Y_1(y)=-X_1(x)\cdot Y_1''(y).$$

Відокремивши змінні шляхом ділення лівої та правої частин останньої рівності на величину $X_1(x)\cdot Y_1(y)\neq 0$, маємо

$$\frac{X_1''(x)}{X_1(x)}=-\frac{Y_1''(y)}{Y_1(y)}.$$

Одержана рівність виконується для всіх $(x,y)\in\mathbf{D}$ тільки тоді, коли

$$\frac{X_1''(x)}{X_1(x)}=-\frac{Y_1''(y)}{Y_1(y)}=\lambda=const,$$

звідки маємо

$$Y_1''(y)+\lambda Y_1(y)=0, \quad Y_1(y)\neq 0; \tag{2.10}$$

$$X_1''(x)-\lambda X_1(x)=0, \quad X_1(x)\neq 0. \tag{2.11}$$

Підставивши (2.9) в однорідні крайові умови задачі (2.6), одержимо

$$X_1(0)\cdot Y_1(y)=0, \quad X_1(a)\cdot Y_1(y)=0,$$

звідки, враховуючи, що $Y_1(y)\neq 0$, маємо

$$X_1(0)=0, \quad X_1(a)=0. \tag{2.12}$$

Дослідимо задачу Штурма-Ліувілля (2.11)-(2.12). Для цього зауважимо, що характеристичне рівняння для ДР зі сталими коефіцієнтами (2.11)

$$k^2-\lambda=0$$

залежно від значення параметра λ може мати дійсні різні, кратні або комплексні корені. Тому для повного дослідження слід розглянути три випадки.

1. Нехай $\lambda > 0$. Тоді $k_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$ і загальний розв'язок рівняння (2.11) запишеться у вигляді $X_1(x) = C_1\,\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}x} + C_2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x}$. Підставивши цей розв'язок у крайові умови (2.12), одержимо лінійну однорідну систему відносно невідомих сталих C_1, C_2:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0; \\ C_1\,\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}a} + C_2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}a} = 0. \end{cases}$$

Детермінант цієї системи $\Delta = -2\,\mathrm{sh}\sqrt{\lambda}a \neq 0$, оскільки $\sqrt{\lambda}a > 0$. Отже, $C_1 = C_2 = 0$, а тому $X_1(x) \equiv 0$, тобто у випадку $\lambda > 0$ власних значень не існує.

2. Нехай $\lambda = 0$. Тоді $k_{1,2} = 0$, $X_1(x) = C_3 x + C_4$ і з крайових умов (2.12) одержимо:

$$\begin{cases} C_4 = 0; \\ C_3 a + C_4 = 0, \end{cases}$$

звідки $C_3 = C_4 = 0$, а тому $X_1(x) \equiv 0$ і $\lambda = 0$ також не є власним значенням.

3. При $\lambda < 0$ $k_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}i$ і загальний розв'язок рівняння (2.11) запишеться у вигляді $X_1(x) = C_5\cos\sqrt{-\lambda}x + C_6\sin\sqrt{-\lambda}x.$ Із крайових умов (2.12) одержимо:

$$\begin{cases} C_5 = 0; \\ C_6\sin\sqrt{-\lambda}a + C_5\cos\sqrt{-\lambda}a = 0, \end{cases}$$

звідки $C_5 = 0$ і $C_6\sin\sqrt{-\lambda}a = 0.$ Отже, нетривіальний розв'язок задачі (2.11)-(2.12) існує тільки для тих значень параметра λ, які є розв'язками тригонометричного рівняння $\sin\sqrt{-\lambda}a = 0$, звідки $\lambda_n = -\left(\dfrac{\pi n}{a}\right)^2$. Тоді відповідні власні функції матимуть вигляд (беремо для визначеності $C_6 = 1$)

$$X_{1,n}(x) = \sin\frac{\pi n}{a}x, \quad n \in \mathrm{N}. \tag{2.13}$$

Підставивши знайдені власні значення у (2.10), отримаємо рівняння для визначення функцій $Y_1(y)$

$$Y''_{1,n}(y) - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 Y_{1,n}(y) = 0, \quad n \in \mathrm{N},$$

загальний розв'язок якого має стандартний вигляд

$$Y_{1,n}(y) = C_7\,\mathrm{e}^{\frac{\pi n}{a}y} + C_8\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi n}{a}y}, \quad n \in \mathrm{N},$$

який у даному випадку доцільніше (задля спрощення подальших обчислень) подати в еквівалентній формі

$$Y_{1,n}(y) = A_n\,\mathrm{ch}\frac{\pi n}{a}y + B_n\,\mathrm{sh}\frac{\pi n}{a}y, \quad n \in \mathrm{N},$$

де A_n, B_n – довільні сталі.

Згідно з (2.9) функції

$$U_{1,n}(x,y)=\left(A_n\operatorname{ch}\frac{\pi n}{a}y+B_n\operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}y\right)\sin\frac{\pi n}{a}x,\quad n\in\mathrm{N},$$

є частинними розв'язками рівняння Лапласа, що справджують однорідні крайові умови задачі (2.6). Тоді загальний розв'язок рівняння Лапласа, що справджує однорідні крайові умови задачі (2.6), запишеться у вигляді лінійної комбінації частинних розв'язків

$$U_1(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\operatorname{ch}\frac{\pi n}{a}y+B_n\operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}y\right)\sin\frac{\pi n}{a}x. \tag{2.14}$$

Визначимо коефіцієнти ряду (2.14) таким чином, щоб він справджував і неоднорідні крайові умови задачі (2.6). Безпосередня підстановка (2.14) у згадані умови дає

$$\begin{aligned}U_1(x,0)&\equiv\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{\pi n}{a}x=\nu_1(x),\\ U_1(x,b)&\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\operatorname{ch}\frac{\pi nb}{a}+B_n\operatorname{sh}\frac{\pi nb}{a}\right)\sin\frac{\pi n}{a}x=\nu_2(x).\end{aligned} \tag{2.15}$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів із системи (2.15) розкладемо функції $\nu_1(x)$ та $\nu_2(x)$ у ряди Фур'є (вважаючи це можливим) по системі власних функцій (2.13) на проміжку $x\in[0,a]$:

$$\nu_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\sin\frac{\pi n}{a}x,\quad \nu_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\sin\frac{\pi n}{a}x, \tag{2.16}$$

де коефіцієнти Фур'є обчислюються за формулами

$$\alpha_n=\frac{\int_0^a\nu_1(\xi)\sin\frac{\pi n}{a}\xi d\xi}{\int_0^a\sin^2\frac{\pi n}{a}\xi d\xi}=\frac{2}{a}\int_0^a\nu_1(\xi)\sin\frac{\pi n}{a}\xi d\xi,\quad \beta_n=\frac{2}{a}\int_0^a\nu_2(\xi)\sin\frac{\pi n}{a}\xi d\xi.$$

Порівнюючи ряди (2.15) і (2.16), маємо

$$A_n=\alpha_n=\frac{2}{a}\int_0^a\nu_1(\xi)\sin\frac{\pi n}{a}\xi d\xi,\quad A_n\operatorname{ch}\frac{\pi nb}{a}+B_n\operatorname{sh}\frac{\pi nb}{a}=\beta_n,$$

звідки

$$B_n=\beta_n\operatorname{csch}\frac{\pi nb}{a}-\alpha_n\operatorname{cth}\frac{\pi nb}{a}=\frac{2}{a}\left[\int_0^a\nu_2(\xi)\sin\frac{\pi n}{a}\xi d\xi\operatorname{csch}\frac{\pi nb}{a}-\int_0^a\nu_1(\xi)\sin\frac{\pi n}{a}\xi d\xi\operatorname{cth}\frac{\pi nb}{a}\right].$$

Підставивши знайдені коефіцієнти у (2.14), одержимо розв'язок крайової задачі (2.6) у вигляді

$$U_1(x,y)=\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^a \nu_1(\xi)\sin\frac{\pi n}{a}\xi d\xi\,\mathrm{ch}\frac{\pi n}{a}y+\right.$$
$$\left.+\left[\int_0^a \nu_2(\xi)\sin\frac{\pi n}{a}\xi d\xi\,\mathrm{csch}\frac{\pi nb}{a}-\int_0^a \nu_1(\xi)\sin\frac{\pi n}{a}\xi d\xi\,\mathrm{cth}\frac{\pi nb}{a}\right]\mathrm{sh}\frac{\pi n}{a}y\right)\sin\frac{\pi n}{a}x. \tag{2.17}$$

Розв’язок задачі (2.7) шукається аналогічно у вигляді добутку двох функцій

$$U_2(x,y)=X_2(x)\cdot Y_2(y)\neq 0. \tag{2.18}$$

Підстановка (2.18) у рівняння задачі (2.7) дає

$$X_2''(x)\cdot Y_2(y)+X_2(x)\cdot Y_2''(y)=0 \quad \Rightarrow \quad -X_2''(x)\cdot Y_2(y)=X_2(x)\cdot Y_2''(y).$$

Після відокремлення змінних отримуємо рівність

$$-\frac{X_2''(x)}{X_2(x)}=\frac{Y_2''(y)}{Y_2(y)},$$

яка виконується для всіх $(x,y)\in\mathbf{D}$ тільки тоді, коли

$$-\frac{X_2''(x)}{X_2(x)}=\frac{Y_2''(y)}{Y_2(y)}=\lambda=const.$$

Звідси маємо

$$Y_2''(y)-\lambda Y_2(y)=0, \quad Y_2(y)\neq 0; \tag{2.19}$$

$$X_2''(x)+\lambda X_2(x)=0, \quad X_2(x)\neq 0. \tag{2.20}$$

Підставивши (2.18) в однорідні крайові умови задачі (2.7), одержимо

$$X_2(x)\cdot Y_2(0)=0, \quad X_2(x)\cdot Y_2(b)=0,$$

звідки, враховуючи, що $X_2(x)\neq 0$, маємо

$$Y_2(0)=0, \quad Y_2(b)=0. \tag{2.21}$$

Досліджуючи задачу Штурма-Ліувілля (2.19)-(2.21) аналогічно до ЗШЛ (2.11)-(2.12), отримуємо систему власних значень і власних функцій

$$\lambda_m=-\left(\frac{\pi m}{b}\right)^2, \ \ Y_{2,m}(y)=\sin\frac{\pi m}{b}y, \quad m\in\mathrm{N}. \tag{2.22}$$

Підставивши знайдені власні значення у (2.20), отримаємо рівняння для визначення функцій $X_2(x)$

$$X_{2,m}''(x)-\left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 X_{2,m}(y)=0, \quad m\in\mathrm{N},$$

загальний розв’язок якого подамо у формі

$$X_{2,m}(x)=A_m\,\mathrm{ch}\frac{\pi m}{b}x+B_m\,\mathrm{sh}\frac{\pi m}{b}x, \quad m\in\mathrm{N},$$

де A_m, B_m – довільні сталі.

Тоді загальний розв’язок рівняння Лапласа, що справджує однорідні крайові умови задачі (2.7), запишеться у вигляді ряду

$$U_2(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\left(A_m\,\mathrm{ch}\frac{\pi m}{b}x+B_m\,\mathrm{sh}\frac{\pi m}{b}x\right)\sin\frac{\pi m}{b}y. \tag{2.23}$$

Після визначення коефіцієнтів ряду (2.23) із неоднорідних крайових умов задачі (2.7) і підстановки знайдених значень у (2.23) одержимо розв’язок крайової задачі (2.7) у вигляді

$$\begin{aligned} U_2(x,y) = \frac{2}{b}\sum_{m=1}^{\infty}\Bigg(& \int_0^b \mu_1(\xi)\sin\frac{\pi m}{b}\xi d\xi \operatorname{ch}\frac{\pi m}{b}x + \\ & + \left[\int_0^b \mu_2(\xi)\sin\frac{\pi m}{b}\xi d\xi \operatorname{csch}\frac{\pi m a}{b} - \int_0^b \mu_1(\xi)\sin\frac{\pi m}{b}\xi d\xi \operatorname{cth}\frac{\pi m a}{b}\right]\operatorname{sh}\frac{\pi m}{b}x\Bigg)\sin\frac{\pi m}{b}y. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Розв’язок третьої «дочірньої» задачі (2.8) у випадку, коли вільний член рівняння Пуассона $f(x,y)$ справджує умови узгодженості (2.3), можна знайти за допомогою однієї з модифікацій методу Фур’є – так званого ***методу власних функцій***. Для цього спочатку розв’язуємо відповідну задачу на власні значення з крайовими умовами, аналогічними до крайових умов задачі (2.8):

$$\begin{gathered} \Delta W(x,y) = \lambda W(x,y), \quad \lambda = const, \\ W(0,y) = W(a,y) = 0, \quad W(x,0) = W(x,b) = 0. \end{gathered} \tag{2.25}$$

Шукаючи власні функції задачі (2.25) методом відокремлення змінних у вигляді $W(x,y) = X(x)\cdot Y(y) \neq 0,$ маємо:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda \quad \Rightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \alpha = const, \quad \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \beta = const, \quad \alpha + \beta = \lambda,$$

$$X(0)\cdot Y(y) = 0, \quad X(a)\cdot Y(y) = 0, \quad X(x)\cdot Y(0) = 0, \quad X(x)\cdot Y(b) = 0,$$

звідки отримуємо дві одновимірні задачі Штурма-Ліувілля

$$X''(x) - \alpha X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(a) = 0; \tag{2.26}$$

$$Y''(y) - \beta Y(y) = 0, \quad Y(0) = 0, \quad Y(b) = 0. \tag{2.27}$$

Задачі (2.26), (2.27) очевидно аналогічні вже дослідженим ЗШЛ (2.11)-(2.12) та (2.19)-(2.21) відповідно. Тому систему власних значень і власних функцій задачі (2.25) можна виписати з урахуванням знайдених розв’язків (2.13) та (2.22):

$$\begin{gathered} \lambda_{n,m} = \lambda_n + \lambda_m = -\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 = -\frac{(\pi n b)^2 + (\pi m a)^2}{(ab)^2}, \\ W_{n,m}(x,y) = X_{1,n}(x)\cdot Y_{2,m}(y) = \sin\frac{\pi n}{a}x \sin\frac{\pi m}{b}y, \end{gathered} \qquad n,m \in \mathrm{N}. \tag{2.28}$$

Тепер розв’язок задачі (2.8) можна шукати у вигляді ряду по системі знайдених власних функцій

$$V(x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} C_{n,m} W_{n,m}(x,y). \tag{2.29}$$

Із (2.25) очевидно випливає, що ряд (2.29) справджує крайові умови задачі (2.8). Отже, залишається вибрати коефіцієнти $C_{n,m}$ таким чином, щоб ряд (2.29) справджував також і рівняння задачі (2.8). Для цього спершу розкладемо функцію $f(x,y)$ у подвійний ряд Фур’є по системі власних функцій $W_{n,m}(x,y)$ у прямокутнику **D**:

$$f(x,y)=\sum_{n,m=1}^{\infty}\varphi_{n,m}W_{n,m}(x,y),\quad \varphi_{n,m}=\frac{\int\limits_0^a\int\limits_0^b f(\xi,\eta)W_{n,m}(\xi,\eta)d\eta d\xi}{\int\limits_0^a\int\limits_0^b W_{n,m}^2(\xi,\eta)d\eta d\xi}. \tag{2.30}$$

Зауважимо, що для власних функцій (2.28) загальна формула для коефіцієнтів Фур'є спрощується до вигляду

$$\varphi_{n,m}=\frac{4}{ab}\int\limits_0^a\int\limits_0^b f(\xi,\eta)\sin\frac{\pi n}{a}\xi\sin\frac{\pi m}{b}\eta d\eta d\xi.$$

Підставивши (2.29) і (2.30) у рівняння Пуассона задачі (2.8), одержимо:

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}C_{n,m}\Delta W_{n,m}(x,y)=\sum_{n,m=1}^{\infty}\varphi_{n,m}W_{n,m}(x,y).$$

Але на підставі (2.25)

$$\Delta W_{n,m}(x,y)=\lambda_{n,m}W_{n,m}(x,y),$$

а отже, маємо

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}\lambda_{n,m}C_{n,m}W_{n,m}(x,y)=\sum_{n,m=1}^{\infty}\varphi_{n,m}W_{n,m}(x,y).$$

Звідси $C_{n,m}=\varphi_{n,m}\lambda_{n,m}^{-1}$, і згідно з (2.29) розв'язок задачі (2.8) матиме вигляд

$$V(x,y)=\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{\varphi_{n,m}}{\lambda_{n,m}}W_{n,m}(x,y).$$

Розв'язок задачі (2.8) одержимо, підставивши в останню формулу всі відомі величини з (2.28) та (2.30):

$$V(x,y)=-4ab\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{\int\limits_0^a\int\limits_0^b f(\xi,\eta)\sin\frac{\pi n}{a}\xi\sin\frac{\pi m}{b}\eta d\eta d\xi}{(\pi nb)^2+(\pi ma)^2}\sin\frac{\pi n}{a}x\sin\frac{\pi m}{b}y. \tag{2.31}$$

Згідно з формулою (2.5) шуканий розв'язок задачі Діріхле для прямокутника (2.1)-(2.2) рівний сумі знайдених розв'язків (2.17), (2.24) та (2.31) трьох «дочірніх» задач.

Аналогічно до дослідженої крайової задачі (2.1)-(2.2) інтегруються також подібні задачі в прямокутних областях із крайовими умовами відмінного від (2.2) виду на сторонах прямокутника. Винятком із цього правила є задача Неймана, яка має певну специфіку, а тому розглядатиметься окремо (див. Тему 5).

Зауваження. На практиці у крайових задачах для рівняння Пуассона типу (2.8) можливі випадки, коли для вільного члена $f(x,y)$ не виконуються умови узгодженості (2.3), а отже, метод власних функцій для вихідної задачі є незастосовним. Такі задачі часто допускають зведення до крайових задач для рівняння Лапласа шляхом підбору деякого частинного розв'язку заданого рівняння Пуассона. У деяких простіших випадках таким підбором вдається зоднорідніти не тільки рівняння, але й деякі з неоднорідних крайових умов вихідної задачі – за аналогією із задачею зі стаціонарними неоднорідностями для рівнянь гіперболічного та параболічного типів. Наприклад, розв’язок задачі

$$U_{xx}+U_{yy}=f(y),\quad 0<x<a,\quad 0<y<b,$$
$$U_x(0,y)=\mu_1(y),\quad U(a,y)=\mu_2(y),\quad 0\le y\le b,$$
$$U(x,0)=\nu_1,\quad U_y(x,b)=\nu_2,\quad 0\le x\le a\quad (\nu_1,\nu_2=const),$$

з огляду на те, що $f(x,y)\equiv f(y)$, а крайові умови на сторонах $y=0$ та $y=b$ не залежать від змінної x, можна шукати у вигляді

$$U(x,y)=V(x,y)+\omega(y),$$

де $V(x,y)$ – нова невідома функція, а $\omega(y)$ – розв’язок крайової задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку

$$\omega''(y)=f(y),\quad \omega(0)=\nu_1,\quad \omega'(b)=\nu_2\,.$$

Тоді для $V(x,y)$ отримуємо крайову задачу для рівняння Лапласа

$$V_{xx}+V_{yy}=0,\quad 0<x<a,\quad 0<y<b,$$
$$V_x(0,y)=\mu_1(y),\quad V(a,y)=\mu_2(y)-\omega(y),\quad 0\le y\le b,$$
$$V(x,0)=0,\quad V_y(x,b)=0,\quad 0\le x\le a,$$

яка за коректності її постановки, тобто за виконання умов узгодженості у вигляді

$$\mu_1(0)=\mu_1'(b)=0,\quad \mu_2(0)-\omega(0)=0,\quad \mu_2'(b)-\omega'(b)=0,$$

розв’язується методом відокремлення змінних за прикладом задачі (2.7).

3. Задача Діріхле для круга та кільця. Метод відокремлення змінних

I. ***Рівняння Лапласа у полярній системі координат.*** На відміну від прямокутних областей, для запису математичних моделей стаціонарних процесів у кругових областях (внутрішність або зовнішність круга, кільце, круговий сектор, криволінійний прямокутник) використовують полярні координати. Тому, перш ніж перейти до алгоритмів інтегрування конкретних задач, розглянемо допоміжне питання про подання двовимірного рівняння Лапласа

$$\Delta u(x,y)\equiv u_{xx}+u_{yy}=0 \tag{3.1}$$

на полярній площині.

Введемо в (3.1) полярні координати:

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi\quad\Rightarrow\quad \rho=\sqrt{x^2+y^2},\quad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}. \tag{3.2}$$

Знайдемо похідні, вважаючи шукану функцію складною функцією нових незалежних змінних: $u(x,y)=U[\rho(x,y),\varphi(x,y)]$. На підставі (3.2) маємо

$$u_x=\rho_x\cdot U_\rho+\varphi_x\cdot U_\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot U_\rho-\frac{y}{x^2+y^2}\cdot U_\varphi,$$

$$u_y=\rho_y\cdot U_\rho+\varphi_y\cdot U_\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot U_\rho+\frac{x}{x^2+y^2}\cdot U_\varphi,$$

$$u_{xx} = \rho_{xx} \cdot U_\rho + \varphi_{xx} \cdot U_\varphi + \rho_x^2 \cdot U_{\rho\rho} + 2\rho_x \varphi_x \cdot U_{\rho\varphi} + \varphi_x^2 \cdot U_{\varphi\varphi} = \frac{y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \cdot U_\rho +$$

$$+ \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \cdot U_\varphi + \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot U_{\rho\rho} - \frac{2xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \cdot U_{\rho\varphi} + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2} \cdot U_{\varphi\varphi},$$

$$u_{yy} = \rho_{yy} \cdot U_\rho + \varphi_{yy} \cdot U_\varphi + \rho_y^2 \cdot U_{\rho\rho} + 2\rho_y \varphi_y \cdot U_{\rho\varphi} + \varphi_y^2 \cdot U_{\varphi\varphi} = \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \cdot U_\rho -$$

$$- \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \cdot U_\varphi + \frac{y^2}{x^2+y^2} \cdot U_{\rho\rho} + \frac{2xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \cdot U_{\rho\varphi} + \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} \cdot U_{\varphi\varphi}.$$

Звідси маємо

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot U_\rho + U_{\rho\rho} + \frac{1}{x^2+y^2} \cdot U_{\varphi\varphi}.$$

Подавши коефіцієнти в останній рівності через нові незалежні змінні на підставі (3.2), і підклавши отриманий вираз у (3.1), дістанемо вигляд рівняння Лапласа в полярній системі координат:

$$\Delta U(\rho,\varphi) \equiv U_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} \cdot U_\rho + \frac{1}{\rho^2} \cdot U_{\varphi\varphi} = 0. \qquad (3.3)$$

II. *Внутрішня задача Діріхле для круга.* Розглянемо задачу: знайти гармонічну в крузі радіуса R із центром у початку координат функцію $U(\rho,\varphi)$, яка на межі круга $\rho = R$ набуває заданих значень $f(\varphi)$.

Математичною моделлю задачі є внутрішня задача Діріхле для круга: у класі функцій $C^2(\mathbf{D}_1) \cap C(\overline{\mathbf{D}}_1)$, де $\mathbf{D}_1$ – внутрішність, а $\overline{\mathbf{D}}_1 = \{(\rho,\varphi) \mid 0 \le \rho \le R,\ 0 \le \varphi < 2\pi\}$ замикання заданого круга, знайти розв'язок рівняння Лапласа (3.3), який справджує крайову умову на межі круга

$$U(R,\varphi) = f(\varphi), \quad 0 \le \varphi < 2\pi. \qquad (3.4)$$

З огляду на особливості розглядуваної області й полярної площини загалом окрім крайової умови (3.4) слід враховувати також наступні міркування:

а) шуканий розв'язок буде неперервною функцією в області $\overline{\mathbf{D}}_1$ за виконання умови неперервності в центрі круга, яку можна записати у вигляді границі

$$\lim_{\rho \to 0} |U(\rho,\varphi)| < \infty; \qquad (3.5)$$

б) задача Діріхле матиме єдиний розв'язок (згідно з Теоремою 1.1) на полярній площині, якщо $f(\varphi)$ і $U(\rho,\varphi)$ будуть функціями, періодичними з періодом 2π за змінною φ, тобто для шуканої функції повинна виконуватися умова

$$U(\rho,\varphi) = U(\rho,\varphi+2\pi). \qquad (3.6)$$

Для побудови розв'язку поставленої задачі (3.3) – (3.6) застосуємо добре знайомий із попереднього навчального матеріалу метод відокремлення змінних (метод Фур'є). Згідно з алгоритмом цього методу розв'язок задачі (3.3) – (3.6) шукаємо у вигляді добутку двох функцій

$$U(\rho,\varphi) = X(\rho) \cdot \Phi(\varphi) \ne 0, \qquad (3.7)$$

кожна з яких знаходиться окремо з урахуванням рівняння (3.3) та додаткових умов (3.4) – (3.6). Підставивши (3.7) у рівняння Лапласа (3.3), одержимо:

$$X''(\rho)\cdot\Phi(\varphi)+\frac{1}{\rho}\cdot X'(\rho)\cdot\Phi(\varphi)+\frac{1}{\rho^2}\cdot X(\rho)\cdot\Phi''(\varphi)=0,$$

або

$$\rho^2 X''(\rho)\cdot\Phi(\varphi)+\rho X'(\rho)\cdot\Phi(\varphi)+X(\rho)\cdot\Phi''(\varphi)=0.$$

Відокремивши змінні шляхом ділення лівої та правої частин останньої рівності на величину $X(\rho)\cdot\Phi(\varphi)\neq 0$, маємо

$$\frac{\rho^2 X''(\rho)+\rho X'(\rho)}{X(\rho)}+\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=0.$$

Одержана рівність виконується для всіх $(\rho,\varphi)\in\mathbf{D}_1$ тільки тоді, коли

$$-\frac{\rho^2 X''(\rho)+\rho X'(\rho)}{X(\rho)}=\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=\lambda=const,$$

звідки маємо

$$\rho^2 X''(\rho)+\rho X'(\rho)+\lambda X(\rho)=0,\quad X(\rho)\neq 0; \tag{3.8}$$

$$\Phi''(\varphi)-\lambda\Phi(\varphi)=0,\quad \Phi(\varphi)\neq 0. \tag{3.9}$$

Згідно з (3.6) для функції $\Phi(\varphi)$ повинна виконуватися умова періодичності

$$\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi). \tag{3.10}$$

Знайдемо нетривіальні розв'язки задачі (3.9)-(3.10). Для цього зауважимо, що характеристичне рівняння для ДР зі сталими коефіцієнтами (3.9)

$$k^2-\lambda=0$$

залежно від значення параметра λ може мати дійсні різні, кратні або комплексні корені. Тому для повного дослідження слід розглянути три випадки.

1. Нехай $\lambda>0.$ Тоді $k_{1,2}=\pm\sqrt{\lambda}$ і загальний розв'язок рівняння (3.9) запишеться у вигляді $\Phi(\varphi)=c_1\,e^{\sqrt{\lambda}\varphi}+c_2\,e^{-\sqrt{\lambda}\varphi}$. Така функція очевидно може бути періодичною тільки при $c_1=c_2=0,$ а тому $\Phi(\varphi)\equiv 0$, тобто у випадку $\lambda>0$ власних значень не існує.

2. Нехай $\lambda=0.$ Тоді $k_{1,2}=0$, $\Phi(\varphi)=c_3\varphi+c_4$ і з умови (3.10) одержимо:

$$c_3\varphi+c_4=c_3(\varphi+2\pi)+c_4 \quad\Rightarrow\quad c_3=0,$$

а отже, $\lambda=0$ є власним значенням, якому відповідає власна функція

$$\Phi_0(\varphi)=c_4=const\neq 0. \tag{3.11}$$

3. При $\lambda<0$ $k_{1,2}=\pm\sqrt{-\lambda}i$ і загальний розв'язок рівняння (3.9) запишеться у вигляді $\Phi(\varphi)=c_5\cos\sqrt{-\lambda}\varphi+c_6\sin\sqrt{-\lambda}\varphi.$ Із умови (3.10) маємо

$$c_5\cos\sqrt{-\lambda}\varphi+c_6\sin\sqrt{-\lambda}\varphi=c_5\cos\sqrt{-\lambda}(\varphi+2\pi)+c_6\sin\sqrt{-\lambda}(\varphi+2\pi).$$

Остання рівність виконується для довільних значень c_5 і c_6, якщо покласти

$$\cos\sqrt{-\lambda}\varphi=\cos\sqrt{-\lambda}(\varphi+2\pi),\quad \sin\sqrt{-\lambda}\varphi=\sin\sqrt{-\lambda}(\varphi+2\pi).$$

Звідси з урахуванням періоду косинуса й синуса отримуємо рівняння для знаходження власних значень:

$$2\pi\sqrt{-\lambda} = 2\pi n, \quad n \in \mathrm{N}.$$

Тоді множина власних значень і власних функцій для випадку $\lambda < 0$ запишеться у вигляді

$$\lambda_n = -n^2, \ \ \Phi_n(\varphi) = c_5 \cos n\varphi + c_6 \sin n\varphi, \quad n \in \mathrm{N}, \qquad (3.12)$$

де c_5, c_6 довільні ненульові сталі. Таким чином, у випадку $\lambda < 0$ кожному власному значенню $\lambda_n = -n^2$ відповідають дві лінійно незалежні власні функції $c_5 \cos n\varphi$ та $c_6 \sin n\varphi$.

Підставивши знайдені власні значення у (3.8), отримаємо рівняння для визначення функцій $X(\rho)$, яке матиме різний вигляд для випадків $\lambda = 0$ та $\lambda < 0$:

$$\rho^2 X_0''(\rho) + \rho X_0'(\rho) = 0, \qquad (3.13)$$

$$\rho^2 X_n''(\rho) + \rho X_n'(\rho) - n^2 X_n(\rho) = 0, \quad n \in \mathrm{N}. \qquad (3.14)$$

Рівняння (3.13) інтегрується шляхом виділення точної похідної:

$$\rho X_0''(\rho) + X_0'(\rho) = 0 \quad \Rightarrow \quad [\rho X_0'(\rho)]' = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho X_0'(\rho) = c_7 \quad \Rightarrow \quad X_0'(\rho) = \frac{c_7}{\rho},$$

звідки

$$X_0(\rho) = c_7 \ln \rho + c_8,$$

де c_7, c_8 довільні сталі.

Рівняння (3.14) є рівнянням Ейлера, яке зводиться до лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами заміною незалежної змінної $\rho = \mathrm{e}^t$, $t = \ln \rho$. Отже, маємо

$$X_n'(\rho) = \mathrm{e}^{-t} X_n'(t), \ \ X_n''(\rho) = \mathrm{e}^{-2t}[X_n''(t) - X_n'(t)],$$

і таким чином після вказаної підстановки рівність (3.14) набуде вигляду

$$\mathrm{e}^{2t} \cdot \mathrm{e}^{-2t}[X_n''(t) - X_n'(t)] + \mathrm{e}^{t} \cdot \mathrm{e}^{-t} X_n'(t) - n^2 X_n(t) = 0,$$

або після спрощення

$$X_n''(t) - n^2 X_n(t) = 0.$$

Загальний розв'язок отриманого лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами рівний

$$X_n(t) = c_9 \mathrm{e}^{nt} + c_{10} \mathrm{e}^{-nt},$$

а отже, загальний розв'язок рівняння Ейлера (3.14) має вигляд

$$X_n(\rho) = c_9 \rho^n + c_{10} \rho^{-n}, \quad n \in \mathrm{N},$$

де c_9, c_{10} довільні сталі.

Згідно з (3.7) функції

$$U_0(\rho, \varphi) = \frac{A_0}{2} + B_0 \ln \rho, \quad \frac{A_0}{2} = c_4 \cdot c_8, \quad B_0 = c_4 \cdot c_7;$$

$$U_n(\rho, \varphi) = \left(A_n \rho^n + C_n \rho^{-n}\right) \cos n\varphi + \left(B_n \rho^n + D_n \rho^{-n}\right) \sin n\varphi, \quad n \in \mathrm{N},$$

де $A_n = c_5 \cdot c_9$, $C_n = c_5 \cdot c_{10}$, $B_n = c_6 \cdot c_9$, $D_n = c_6 \cdot c_{10}$, є частинними розв'язками рівняння Лапласа (3.3), що справджують умову періодичності (3.6). Тоді загальний розв'язок рівняння Лапласа, що справджує умову періодичності (3.6), запишеться у вигляді лінійної комбінації частинних розв'язків

$$U(\rho, \varphi) = \frac{A_0}{2} + B_0 \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n \rho^n + C_n \rho^{-n}) \cos n\varphi + (B_n \rho^n + D_n \rho^{-n}) \sin n\varphi]. \qquad (3.15)$$

Зауважимо, що умова (3.5) неперервності в центрі круга для ряду (3.15) виконується, якщо покласти $B_0 = 0$; $C_n = D_n = 0$, $n \in \mathrm{N}$. Таким чином, розв'язок рівняння Лапласа (3.3) з урахуванням умов (3.5) та (3.6) запишеться у вигляді

$$U(\rho,\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cdot (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)\,. \tag{3.16}$$

Визначимо коефіцієнти ряду (3.16) таким чином, щоб він справджував крайову умову (3.4) на межі круга. Безпосередня підстановка (3.16) у згадану умову дає

$$U(R,\varphi) \equiv \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} R^n \cdot (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = f(\varphi)\,. \tag{3.17}$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів із (3.17) розкладемо функцію $f(\varphi)$ у ряд Фур'є (вважаючи це можливим) по системі власних функцій (3.11)-(3.12) на проміжку $\varphi \in [0, 2\pi]$:

$$f(\varphi) \equiv \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi)\,, \tag{3.18}$$

де коефіцієнти Фур'є обчислюються за формулами

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\cos n\psi d\psi, \quad n = \overline{0,\infty}; \quad \beta_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\sin n\psi d\psi, \quad n = \overline{1,\infty}\,.$$

Порівнюючи ряди (3.17) і (3.18), маємо:

$$A_0 = \alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi) d\psi\,;$$

$$A_n = \frac{\alpha_n}{R^n} = \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} f(\psi)\cos n\psi d\psi, \quad B_n = \frac{\beta_n}{R^n} = \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} f(\psi)\sin n\psi d\psi, \quad n \in \mathrm{N}\,.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти у (3.16), одержимо розв'язок внутрішньої задачі Діріхле для круга (3.3) – (3.6) у вигляді ряду

$$\begin{aligned} U(\rho,\varphi) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi) d\psi + \\ &+ \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n \cdot \left(\int_0^{2\pi} f(\psi)\cos n\psi d\psi \cos n\varphi + \int_0^{2\pi} f(\psi)\sin n\psi d\psi \sin n\varphi\right), \end{aligned} \tag{3.19}$$

який шляхом зміни порядку сумування й інтегрування можна подати в інтегральному вигляді

$$U(\rho,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\cdot\left\{1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n \cdot \cos[n(\psi - \varphi)]\right\} d\psi\,. \tag{3.20}$$

Справедливі наступні теореми.

Теорема 3.1 ***(обґрунтування методу Фур'є для задачі Діріхле в крузі)***. Якщо функція $f(\varphi)$ періодична з періодом 2π і неперервна на проміжку $\varphi \in [0, 2\pi]$, тоді функція $U(\rho,\varphi)$, визначена рядом (3.19), є гармонічною в крузі $\mathbf{D}_1$ і неперервною в $\overline{\mathbf{D}}_1$.

Теорема 3.2 ***(інтеграл Пуассона)***. Будь-яку гармонічну в крузі $\mathbf{D}_1$ і неперервну в $\overline{\mathbf{D}}_1$ функцію $U(\rho,\varphi)$ можна подати у вигляді ***інтеграла Пуассона***

$$U(\rho,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\cdot\frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\psi-\varphi)}d\psi\,. \qquad (3.21)$$

Зауважимо, що інтеграл Пуассона (3.21) отримується з інтегрального вигляду (3.20) шляхом нескладних перетворень підінтегрального виразу (див. [2], стор. 214-218).

ІІІ. ***Зовнішня задача Діріхле для круга.*** Розглянемо задачу: знайти гармонічну зовні круга радіуса R із центром у початку координат функцію $U(\rho,\varphi)$, яка на межі круга $\rho=R$ набуває заданих значень $f(\varphi)$.

Математичною моделлю задачі є зовнішня задача Діріхле для круга: у класі функцій $C^2(\mathbf{D}_1^*)\bigcap C(\overline{\mathbf{D}}_1^*)$, де $\mathbf{D}_1^*=\mathrm{R}^2\setminus\overline{\mathbf{D}}_1$ – зовнішність круга $\mathbf{D}_1$, а

$\overline{\mathbf{D}}_1^*=\{(\rho,\varphi)\big|\ R\le\rho<\infty,\ 0\le\varphi<2\pi\}$, знайти розв'язок рівняння Лапласа (3.3), який справджує крайову умову (3.4) на межі круга $\mathbf{D}_1$.

З огляду на особливості розглядуваної області й полярної площини загалом окрім крайової умови (3.4) слід враховувати також умову періодичності (3.6) та умову регулярності на нескінченності (1.4), яку можна записати у вигляді границі

$$\lim_{\rho\to\infty}|U(\rho,\varphi)|<\infty\,. \qquad (3.22)$$

Застосувавши до задачі (3.3)-(3.4)-(3.6)-(3.22) метод Фур'є аналогічно до внутрішньої задачі для круга (3.3) – (3.6), знаходимо загальний розв'язок рівняння Лапласа (3.3), що справджує умову періодичності (3.6), у вигляді ряду (3.15).

Зауважимо, що умова (3.22) регулярності на нескінченності для ряду (3.15) виконується, якщо покласти $B_0=0$; $A_n=B_n=0$, $n\in\mathrm{N}$. Таким чином, розв'язок рівняння Лапласа (3.3) з урахуванням умов (3.6) та (3.22) запишеться у вигляді

$$U(\rho,\varphi)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\rho^{-n}\cdot(C_n\cos n\varphi+D_n\sin n\varphi)\,. \qquad (3.23)$$

Визначимо коефіцієнти ряду (3.23) таким чином, щоб він справджував крайову умову (3.4) на межі круга. Безпосередня підстановка (3.23) у згадану умову дає

$$U(R,\varphi)\equiv\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}R^{-n}\cdot(C_n\cos n\varphi+D_n\sin n\varphi)=f(\varphi)\,. \qquad (3.24)$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів із (3.24) подамо функцію $f(\varphi)$ у вигляді ряду Фур'є (3.18). Тоді, порівнюючи ряди (3.24) і (3.18), маємо:

$$A_0=\alpha_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)d\psi\,;$$

$$C_n=\alpha_n R^n=\frac{R^n}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\cos n\psi d\psi,\quad D_n=\beta_n R^n=\frac{R^n}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\sin n\psi d\psi,\quad n\in\mathrm{N}\,.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти у (3.24), одержимо розв'язок зовнішньої задачі Діріхле для круга (3.3)-(3.4)-(3.6)-(3.22) у вигляді ряду

$$U(\rho,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)d\psi+$$
$$+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{\rho}\right)^n\cdot\left(\int_0^{2\pi}f(\psi)\cos n\psi d\psi\cos n\varphi+\int_0^{2\pi}f(\psi)\sin n\psi d\psi\sin n\varphi\right), \tag{3.25}$$

який шляхом зміни порядку сумування й інтегрування та подальших нескладних перетворень можна подати у вигляді інтеграла Пуассона

$$U(\rho,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)\cdot\frac{\rho^2-R^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\psi-\varphi)}d\psi .$$

IV. ***Задача Діріхле для кільця.*** Розглянемо задачу: знайти гармонічну в кільці, обмеженому колами радіусів R та R_1 $(0<R<R_1)$ із центрами в початку координат функцію $U(\rho,\varphi)$, яка на внутрішній та зовнішній межах кільця набуває значень відповідно $f(\varphi)$ та $f_1(\varphi)$.

Математичною моделлю задачі є задача Діріхле для кільця: у класі функцій $C^2(\mathbf{D}_2)\cap C(\overline{\mathbf{D}}_2)$, де $\mathbf{D}_2$ – внутрішність, а $\overline{\mathbf{D}}_2=\{(\rho,\varphi)|\ R\le\rho\le R_1,\ 0\le\varphi<2\pi\}$ замикання заданого кільця, знайти розв'язок рівняння Лапласа (3.3), який на межах кільця $\mathbf{D}_2$ справджує крайові умови

$$U(R,\varphi)=f(\varphi),\quad U(R_1,\varphi)=f_1(\varphi),\quad 0\le\varphi<2\pi . \tag{3.26}$$

З огляду на особливості розглядуваної області й полярної площини загалом окрім крайових умов (3.26) слід враховувати також умову періодичності (3.6).

Застосувавши до задачі (3.3)-(3.26)-(3.6) метод Фур'є аналогічно до внутрішньої задачі для круга (3.3) – (3.6), знаходимо загальний розв'язок рівняння Лапласа (3.3), що справджує умову періодичності (3.6), у вигляді ряду (3.15).

Визначимо коефіцієнти ряду (3.15) таким чином, щоб він справджував крайові умови (3.26) на межі кільця. Безпосередня підстановка (3.15) у згадані умови дає

$$\begin{aligned}&\frac{A_0}{2}+B_0\ln R+\sum_{n=1}^{\infty}[(A_nR^n+C_nR^{-n})\cos n\varphi+(B_nR^n+D_nR^{-n})\sin n\varphi]=f(\varphi),\\&\frac{A_0}{2}+B_0\ln R_1+\sum_{n=1}^{\infty}[(A_nR_1^n+C_nR_1^{-n})\cos n\varphi+(B_nR_1^n+D_nR_1^{-n})\sin n\varphi]=f_1(\varphi).\end{aligned} \tag{3.27}$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів із (3.27) подамо функцію $f(\varphi)$ у вигляді ряду Фур'є (3.18), а функцію $f_1(\varphi)$ – у вигляді аналогічного ряду

$$f_1(\varphi)\equiv\frac{\overline{\alpha}_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\overline{\alpha}_n\cos n\varphi+\overline{\beta}_n\sin n\varphi), \tag{3.28}$$

де

$$\overline{\alpha}_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f_1(\psi)\cos n\psi d\psi,\quad n=\overline{0,\infty};\quad \overline{\beta}_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f_1(\psi)\sin n\psi d\psi,\quad n=\overline{1,\infty}.$$

Тоді, порівнюючи ряди (3.27), (3.18) та (3.28), для обчислення невідомих коефіцієнтів ряду (3.15) отримуємо системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases}\dfrac{A_0}{2}+B_0\ln R=\dfrac{\alpha_0}{2},\\ \dfrac{A_0}{2}+B_0\ln R_1=\dfrac{\overline{\alpha}_0}{2};\end{cases}\quad \begin{cases}A_nR^n+C_nR^{-n}=\alpha_n,\\ A_nR_1^n+C_nR_1^{-n}=\overline{\alpha}_n;\end{cases}\quad \begin{cases}B_nR^n+D_nR^{-n}=\beta_n,\\ B_nR_1^n+D_nR_1^{-n}=\overline{\beta}_n,\end{cases}\quad n\in\mathrm{N}. \qquad (3.29)$$

Визначивши шукані коефіцієнти з систем (3.29) і підставивши знайдені значення у ряд (3.15), одержимо розв’язок задачі Діріхле для кільця (3.3)-(3.26)-(3.6).

Аналогічно до досліджених крайових задач інтегруються також подібні задачі в кругових областях із крайовими умовами відмінного від (3.4) або (3.26) виду на межах круга чи кільця. Винятком із цього правила є задача Неймана, яка має певну специфіку, а тому розглядатиметься окремо (див. Тему 5).

Зауваження. У випадку крайових задач для рівняння Пуассона

$$\Delta U(\rho,\varphi)\equiv U_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}\cdot U_{\rho}+\frac{1}{\rho^2}\cdot U_{\varphi\varphi}=F(\rho,\varphi) \qquad (3.30)$$

в крузі, зовні круга чи в кільці розв’язок загалом шукають у вигляді ряду по системі власних функцій (3.11)-(3.12) відповідної задачі для рівняння Лапласа

$$U(\rho,\varphi)=X_0(\rho)+\sum_{n=1}^{\infty}[X_n(\rho)\cos n\varphi+Y_n(\rho)\sin n\varphi], \qquad (3.31)$$

який очевидно справджує умову періодичності (3.6). Невідомі коефіцієнти визначають шляхом безпосередньої підстановки ряду (3.31) у рівняння Пуассона (3.30) з урахуванням

а) у крузі – крайової умови на межі круга та умови неперервності в центрі круга (3.5);

б) зовні круга – крайової умови на межі круга та умови регулярності на нескінченності (3.22);

в) у кільці – крайових умов на межах кільця (внутрішньому й зовнішньому колах).

Простіший випадок маємо тоді, коли вдається підібрати деякий частинний розв’язок $\omega(\rho,\varphi)$ неоднорідного рівняння (3.30). У цьому разі після підстановки

$$U(\rho,\varphi)=V(\rho,\varphi)+\omega(\rho,\varphi)$$

для нової невідомої функції $V(\rho,\varphi)$ отримуємо крайову задачу для рівняння Лапласа, яка інтегрується аналогічно до досліджених вище задач Діріхле в крузі, зовні круга та в кільці.

4. Задача Діріхле для кругового сектора та криволінійного прямокутника. Метод відокремлення змінних

I. ***Задача Діріхле для кругового сектора.*** Розглянемо задачу: знайти стаціонарний розподіл температури в однорідній пластинці, яка має форму сектора, що відповідає центральному куту $0<\alpha<2\pi$ круга радіуса R із центром у початку координат, якщо на дузі пластинки $\rho=R$ температура рівна $f(\varphi)$, а на прямолінійних краях підтримується нульова температура.

Математичною моделлю задачі є задача Діріхле для кругового сектора: у класі функцій $C^2(\mathbf{D}_3)\cap C(\overline{\mathbf{D}}_3)$, де $\mathbf{D}_3$ – внутрішність, а $\overline{\mathbf{D}}_3=\{(\rho,\varphi)|\ 0\le\rho\le R,\ 0\le\varphi\le\alpha<2\pi\}$ замикання заданого сектора, знайти розв'язок $U(\rho,\varphi)$ рівняння Лапласа (3.3), який справджує крайові умови на межах сектора

$$U(R,\varphi)=f(\varphi),\quad 0\le\varphi\le\alpha<2\pi, \tag{4.1}$$

$$U(\rho,0)=U(\rho,\alpha)=0,\quad 0\le\rho\le R. \tag{4.2}$$

З огляду на особливості розглядуваної області окрім крайових умов (4.1)-(4.2) слід враховувати також наступні міркування:

а) шуканий розв'язок буде неперервною функцією в області $\overline{\mathbf{D}}_3$ за виконання умови неперервності в центрі круга (3.5);

б) вихідна задача Діріхле буде коректно поставленою, якщо для крайових умов (4.1), (4.2) виконуються умови узгодженості

$$f(0)=f(\alpha)=0. \tag{4.3}$$

Для побудови розв'язку поставленої задачі (3.3)-(4.1)-(4.2)-(4.3)-(3.5) застосуємо метод відокремлення змінних (метод Фур'є). Згідно алгоритмом цього методу розв'язок задачі шукаємо у вигляді добутку двох функцій (3.7), кожна з яких знаходиться окремо з урахуванням рівняння (3.3) та додаткових умов (4.1)-(4.2)-(4.3)-(3.5). Підставивши (3.7) у рівняння Лапласа (3.3), для визначення функцій $X(\rho)$ та $\varPhi(\varphi)$ аналогічно до задачі Діріхле для круга (див. Тема 3, підтема II) дістанемо рівняння відповідно (3.8) та (3.9).

Підставивши (3.7) в однорідні крайові умови (4.2), одержимо

$$X(\rho)\cdot\varPhi(0)=0,\quad X(\rho)\cdot\varPhi(\alpha)=0,$$

звідки, враховуючи, що $X(\rho)\ne 0$, маємо

$$\varPhi(0)=0,\quad \varPhi(\alpha)=0. \tag{4.4}$$

Дослідимо задачу Штурма-Ліувілля (3.9)-(4.4). Для цього зауважимо, що характеристичне рівняння для ДР зі сталими коефіцієнтами (3.9)

$$k^2-\lambda=0$$

залежно від значення параметра λ може мати дійсні різні, кратні або комплексні корені. Тому для повного дослідження слід розглянути три випадки.

1. Нехай $\lambda>0$. Тоді $k_{1,2}=\pm\sqrt{\lambda}$ і загальний розв'язок рівняння (3.9) запишеться у вигляді $\varPhi(\varphi)=C_1\,\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}\varphi}+C_2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}\varphi}$. Підставивши цей розв'язок у крайові умови (4.4), одержимо лінійну однорідну систему відносно невідомих сталих C_1, C_2:

$$\begin{cases} C_1+C_2=0; \\ C_1\,\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}\alpha}+C_2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}\alpha}=0. \end{cases}$$

Детермінант цієї системи $\Delta=-2\,\mathrm{sh}\sqrt{\lambda}\alpha\ne 0$, оскільки $\sqrt{\lambda}\alpha>0$. Отже, $C_1=C_2=0$, а тому $\varPhi(\varphi)\equiv 0$, тобто у випадку $\lambda>0$ власних значень не існує.

2. Нехай $\lambda=0$. Тоді $k_{1,2}=0$, $\varPhi(\varphi)=C_3\varphi+C_4$ і з крайових умов (4.4) одержимо:

$$\begin{cases} C_4 = 0; \\ C_3\alpha + C_4 = 0, \end{cases}$$

звідки $C_3 = C_4 = 0,$ а тому $\Phi(\varphi) \equiv 0$ і $\lambda = 0$ також не є власним значенням.

3. При $\lambda < 0$ $k_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}i$ і загальний розв'язок рівняння (3.9) запишеться у вигляді $\Phi(\varphi) = C_5 \cos\sqrt{-\lambda}\varphi + C_6 \sin\sqrt{-\lambda}\varphi.$ Із крайових умов (4.4) одержимо:

$$\begin{cases} C_5 = 0; \\ C_6 \sin\sqrt{-\lambda}\alpha + C_5 \cos\sqrt{-\lambda}\alpha = 0, \end{cases}$$

звідки $C_5 = 0$ і $C_6 \sin\sqrt{-\lambda}\alpha = 0.$ Отже, нетривіальний розв'язок задачі (3.9)-(4.4) існує тільки для тих значень параметра λ, які є розв'язками тригонометричного рівняння $\sin\sqrt{-\lambda}\alpha = 0$, звідки $\lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{\alpha}\right)^2$. Тоді відповідні власні функції матимуть вигляд (беремо для визначеності $C_6 = 1$)

$$\Phi_n(\varphi) = \sin\frac{\pi n}{\alpha}\varphi, \quad n \in \mathrm{N}. \tag{4.5}$$

Підставивши знайдені власні значення у (3.8), отримаємо рівняння для визначення функцій $X(\rho)$

$$\rho^2 X_n''(\rho) + \rho X_n'(\rho) - \left(\frac{\pi n}{\alpha}\right)^2 X_n(\rho) = 0, \quad n \in \mathrm{N}. \tag{4.6}$$

Рівняння (4.6) є рівнянням Ейлера, яке зводиться до лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами заміною незалежної змінної $\rho = \mathrm{e}^t$, $t = \ln\rho$. Отже, маємо

$$X_n'(\rho) = \mathrm{e}^{-t} X_n'(t), \quad X_n''(\rho) = \mathrm{e}^{-2t}[X_n''(t) - X_n'(t)],$$

і таким чином після вказаної підстановки рівність (4.6) набуде вигляду

$$\mathrm{e}^{2t} \cdot \mathrm{e}^{-2t}[X_n''(t) - X_n'(t)] + \mathrm{e}^{t} \cdot \mathrm{e}^{-t} X_n'(t) - \left(\frac{\pi n}{\alpha}\right)^2 X_n(t) = 0,$$

або після спрощення

$$X_n''(t) - \left(\frac{\pi n}{\alpha}\right)^2 X_n(t) = 0.$$

Загальний розв'язок отриманого лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами рівний

$$X_n(t) = A_n \mathrm{e}^{\frac{\pi n t}{\alpha}} + B_n \mathrm{e}^{-\frac{\pi n t}{\alpha}},$$

а отже, загальний розв'язок рівняння Ейлера (4.6) має вигляд

$$X_n(\rho) = A_n \rho^{\frac{\pi n}{\alpha}} + B_n \rho^{-\frac{\pi n}{\alpha}}, \quad n \in \mathrm{N},$$

де A_n, B_n довільні сталі.

Згідно з (3.7) функції

$$U_n(\rho,\varphi) = \left(A_n \rho^{\frac{\pi n}{\alpha}} + B_n \rho^{-\frac{\pi n}{\alpha}}\right) \sin\frac{\pi n}{\alpha}\varphi, \quad n \in \mathrm{N},$$

є частинними розв'язками рівняння Лапласа (3.3), що справджують крайові умови (4.2). Тоді загальний розв'язок рівняння Лапласа, що справджує крайові умови (4.2), запишеться у вигляді лінійної комбінації частинних розв'язків

$$U(\rho,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\rho^{\frac{\pi n}{\alpha}}+B_n\rho^{-\frac{\pi n}{\alpha}}\right)\sin\frac{\pi n}{\alpha}\varphi. \tag{4.7}$$

Зауважимо, що умова (3.5) неперервності в центрі круга для ряду (4.7) виконується, якщо покласти $B_n=0$, $n\in\mathrm{N}$. Таким чином, розв'язок рівняння Лапласа (3.3) з урахуванням умов (4.2) та (3.5) запишеться у вигляді

$$U(\rho,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\rho^{\frac{\pi n}{\alpha}}\sin\frac{\pi n}{\alpha}\varphi. \tag{4.8}$$

Визначимо коефіцієнти ряду (4.8) таким чином, щоб він справджував крайову умову (4.1) на дузі сектора. Безпосередня підстановка (4.8) у згадану умову дає

$$U(R,\varphi)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}A_nR^{\frac{\pi n}{\alpha}}\sin\frac{\pi n}{\alpha}\varphi=f(\varphi). \tag{4.9}$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів із (4.9) розкладемо функцію $f(\varphi)$ у ряд Фур'є (вважаючи це можливим) по системі власних функцій (4.5) на проміжку $\varphi\in[0,\alpha]$:

$$f(\varphi)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n\sin\frac{\pi n}{\alpha}\varphi, \tag{4.10}$$

де коефіцієнти Фур'є обчислюються за формулами

$$\gamma_n=\frac{\int_0^{\alpha}f(\psi)\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi d\psi}{\int_0^{\alpha}\sin^2\frac{\pi n}{\alpha}\psi d\psi}=\frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha}f(\psi)\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi d\psi.$$

Порівнюючи ряди (4.9) і (4.10), маємо

$$A_n=\gamma_nR^{-\frac{\pi n}{\alpha}}=\frac{2}{\alpha R^{\frac{\pi n}{\alpha}}}\int_0^{\alpha}f(\psi)\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi d\psi,\quad n\in\mathrm{N}.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти у (4.8), одержимо розв'язок задачі Діріхле для кругового сектора (3.3)-(4.1)-(4.2)-(4.3)-(3.5) у вигляді ряду

$$U(\rho,\varphi)=\frac{2}{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{\pi n}{\alpha}}\cdot\int_0^{\alpha}f(\psi)\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi d\psi\sin\frac{\pi n}{\alpha}\varphi.$$

II. ***Задача Діріхле для криволінійного прямокутника («кільцевого сектора»).***

Розглянемо задачу: знайти стаціонарний розподіл температури в однорідній пластинці, яка має форму криволінійного прямокутника, що відповідає центральному куту $0<\alpha<2\pi$ кільця, обмеженого колами радіусів R та R_1 $(0<R<R_1)$ із центрами в початку координат, якщо на внутрішній та зовнішній дугах пластинки температура

рівна відповідно $f(\varphi)$ та $f_1(\varphi)$, а на прямолінійних краях підтримується нульова температура.

Математичною моделлю задачі є задача Діріхле для криволінійного прямокутника: у класі функцій $C^2(\mathbf{D}_4)\bigcap C(\overline{\mathbf{D}}_4)$, де $\mathbf{D}_4$ – внутрішність, а

$\overline{\mathbf{D}}_4 = \{(\rho,\varphi)\big|\ R \le \rho \le R_1,\ 0 \le \varphi \le \alpha < 2\pi\}$ замикання заданого сектора, знайти розв'язок $U(\rho,\varphi)$ рівняння Лапласа (3.3), який справджує крайові умови

$$U(R,\varphi) = f(\varphi), \quad U(R_1,\varphi) = f_1(\varphi), \quad 0 \le \varphi \le \alpha < 2\pi, \tag{4.11}$$

$$U(\rho,0) = U(\rho,\alpha) = 0, \quad R \le \rho \le R_1 . \tag{4.12}$$

Зауважимо, що для коректності постановки задачі Діріхле необхідно вимагати виконання умов узгодженості

$$f(0) = f(\alpha) = 0, \quad f_1(0) = f_1(\alpha) = 0. \tag{4.13}$$

Застосувавши до задачі (3.3)-(4.11)-(4.12)-(4.13) метод Фур'є аналогічно до задачі для кругового сектора (3.3)-(4.1)-(4.2)-(4.3)-(3.5), знаходимо загальний розв'язок рівняння Лапласа (3.3), що справджує крайові умови (4.12), у вигляді ряду (4.7).

Визначимо коефіцієнти ряду (4.7) таким чином, щоб він справджував крайові умови (4.11) на дугах кільцевого сектора. Безпосередня підстановка (4.7) у згадані умови дає

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n R^{\frac{\pi n}{\alpha}} + B_n R^{-\frac{\pi n}{\alpha}}\right)\sin\frac{\pi n}{\alpha}\varphi = f(\varphi), \\ &\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n R_1^{\frac{\pi n}{\alpha}} + B_n R_1^{-\frac{\pi n}{\alpha}}\right)\sin\frac{\pi n}{\alpha}\varphi = f_1(\varphi). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів із (4.14) подамо функцію $f(\varphi)$ у вигляді ряду Фур'є (4.10), а функцію $f_1(\varphi)$ – у вигляді аналогічного ряду

$$f_1(\varphi) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\gamma}_n \sin\frac{\pi n}{\alpha}\varphi, \tag{4.15}$$

де коефіцієнти Фур'є обчислюються за формулами

$$\overline{\gamma}_n = \frac{\int_0^{\alpha} f_1(\psi)\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi\,d\psi}{\int_0^{\alpha}\sin^2\frac{\pi n}{\alpha}\psi\,d\psi} = \frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha} f_1(\psi)\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi\,d\psi .$$

Тоді, порівнюючи ряди (4.14), (4.10) та (4.15), для обчислення невідомих коефіцієнтів ряду (4.7) отримуємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} A_n R^{\frac{\pi n}{\alpha}} + B_n R^{-\frac{\pi n}{\alpha}} = \gamma_n, \\ A_n R_1^{\frac{\pi n}{\alpha}} + B_n R_1^{-\frac{\pi n}{\alpha}} = \overline{\gamma}_n. \end{cases} \tag{4.16}$$

Визначивши шукані коефіцієнти з системи (4.16) і підставивши знайдені значення у ряд (4.7), одержимо розв'язок задачі Діріхле для криволінійного прямокутника (3.3)-(4.11)-(4.12)-(4.13).

Аналогічно до досліджених крайових задач інтегруються також подібні задачі в кругових областях із крайовими умовами відмінного від (4.1) або (4.11) виду на дугах кругового сектора чи криволінійного прямокутника за однорідних крайових умов різного роду на прямолінійних краях. Винятком із цього правила є задача Неймана, яка має певну специфіку, а тому розглядатиметься окремо (див. Тему 5).

***Зауваження* 1.** У випадку крайових задач для рівняння Пуассона (3.30) у круговому секторі чи криволінійному прямокутнику за однорідних крайових умов на прямолінійних краях розв'язок загалом шукають у вигляді ряду

$$U(\rho,\varphi)=\sum_{n}X_n(\rho)\cdot\Phi_n(\varphi)\,, \tag{4.17}$$

де $\Phi_n(\varphi)$ – власні функції ЗШЛ, що отримується з відповідної однорідної задачі для рівняння Лапласа, а $X_n(\rho)$ – невідомі коефіцієнти, які визначають шляхом безпосередньої підстановки ряду (4.17) у рівняння Пуассона (3.30) з урахуванням

а) у круговому секторі – крайової умови на дузі сектора та умови неперервності в центрі круга (3.5);

б) у криволінійному прямокутнику – крайових умов на дугах кільцевого сектора.

***Зауваження* 2.** Якщо в задачі для кругового чи кільцевого сектора крайові умови на прямолінійних краях неоднорідні, то в цьому випадку для застосування методу Фур'є слід попередньо звести ці умови до однорідних підстановкою

$$U(\rho,\varphi)=V(\rho,\varphi)+\omega(\rho,\varphi)\,,$$

де $V(\rho,\varphi)$ – нова невідома функція, а $\omega(\rho,\varphi)$ – допоміжна функція, що справджує неоднорідні крайові умови на прямолінійних краях. На полярній площині цю допоміжну функцію рекомендується шукати в «періодичному» вигляді

$$\omega(\rho,\varphi)=a(\rho)\cos\beta\varphi+b(\rho)\sin\beta\varphi\,, \tag{4.18}$$

де коефіцієнти $a(\rho)$, $b(\rho)$ і константа $\beta>0$ визначаються шляхом безпосередньої підстановки виразу (4.18) у неоднорідні крайові умови на прямолінійних краях. Тоді для нової невідомої функції $V(\rho,\varphi)$ отримуємо крайову задачу з однорідними крайовими умовами на прямолінійних краях, до якої вже застосовний метод Фур'є.

5. Задача Неймана для рівнянь еліптичного типу

На відміну від задачі Діріхле, розв'язок другої основної крайової задачі (задачі Неймана) для рівнянь еліптичного типу в двовимірному просторі не є єдиним, а згідно з Теоремою 1.3 визначається з точністю до довільної сталої. Інша суттєва відмінність полягає в тому, що для коректності постановки задачі Неймана для рівняння Лапласа окрім узгодженості крайових умов згідно з Теоремою 1.5 необхідно враховувати також умову стаціонарності теплового поля (1.9).

Зосередимося детальніше на особливостях постановки задачі Неймана у випадках областей, розглянутих у Темах 2-4. Зауважимо, що за коректної постановки задача Неймана інтегрується методом відокремлення змінних аналогічно до задачі Діріхле у відповідній області, тому наводити алгоритми розв'язання тут уже не будемо.

I. ***Задача Неймана для прямокутника.*** Розглянемо задачу: у класі функцій $C^2(\mathbf{D})\bigcap C^1(\overline{\mathbf{D}})$, де $\mathbf{D}$ прямокутна область декартової площини із замиканням $\overline{\mathbf{D}}=\{(x,y)|\ 0\le x\le a,\ 0\le y\le b\}$, знайти розв'язок $U(x,y)$ рівняння Лапласа

$$\Delta U(x,y)\equiv U_{xx}+U_{yy}=0, \tag{5.1}$$

який справджує крайові умови

$$\begin{aligned} &U_x(0,y)=\mu_1(y), \quad U_x(a,y)=\mu_2(y), \quad 0\le y\le b;\\ &U_y(x,0)=\nu_1(x), \quad U_y(x,b)=\nu_2(x), \quad 0\le x\le a. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Будемо вважати, що для функцій, які входять у крайові умови (5.2), виконуються умови узгодженості

$$\begin{aligned} &\nu_1'(0)=\mu_1'(0), \quad \nu_1'(a)=\mu_2'(0),\\ &\nu_2'(0)=\mu_1'(b), \quad \nu_2'(a)=\mu_2'(b). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Тоді для коректності постановки задачі Неймана необхідне виконання умови стаціонарності теплового поля (1.9), яка у випадку прямокутника $\mathbf{D}$ має вигляд

$$\int_0^a \nu_1(x)dx=\int_0^a \nu_2(x)dx\,, \quad \int_0^b \mu_1(y)dy=\int_0^b \mu_2(y)dy\,. \tag{5.4}$$

За невиконання хоча б однієї з умов (5.4) задача (5.1) – (5.3) розв'язку не має. Проте у випадку задачі Неймана для рівняння Пуассона (2.1) іноді вдається підібрати частинний розв'язок неоднорідного рівняння $\omega(x,y)$ таким чином, щоб після підстановки $U(x,y)=\omega(x,y)+V(x,y)$ для нової невідомої функції $V(x,y)$ одержалася коректно поставлена задача Неймана для рівняння Лапласа.

II. ***Задача Неймана для круга.*** Внутрішня задача Неймана для круга радіуса R із центром у початку координат: у класі функцій $C^2(\mathbf{D}_1)\bigcap C^1(\overline{\mathbf{D}}_1)$, де $\mathbf{D}_1$ – внутрішність, а $\overline{\mathbf{D}}_1=\{(\rho,\varphi)|\ 0\le\rho\le R,\ 0\le\varphi<2\pi\}$ замикання заданого круга, знайти розв'язок $U(\rho,\varphi)$ рівняння Лапласа (3.3), який справджує крайову умову на межі круга

$$U_\rho(R,\varphi)=f(\varphi), \quad 0\le\varphi<2\pi\,, \tag{5.5}$$

де $f(\varphi)$ відома періодична з періодом 2π функція, а також умови періодичності (3.6) та неперервності в центрі круга (3.5).

Аналогічно ставиться також зовнішня задача Неймана для круга $\mathbf{D}_1$: у класі функцій $C^2(\mathbf{D}_1^*)\bigcap C^1(\overline{\mathbf{D}}_1^*)$, де $\mathbf{D}_1^*=\mathrm{R}^2\setminus\overline{\mathbf{D}}_1$ – зовнішність круга $\mathbf{D}_1$, а $\overline{\mathbf{D}}_1^*=\{(\rho,\varphi)|\ R\le\rho<\infty,\ 0\le\varphi<2\pi\}$, знайти розв'язок $U(\rho,\varphi)$ рівняння Лапласа (3.3), який справджує крайову умову (5.5), а також умови періодичності (3.6) та регулярності на нескінченності (3.22).

Для коректності постановки задач Неймана (3.3)-(5.5)-(3.6)-(3.5) та (3.3)-(5.5)-(3.6)-(3.22) необхідне виконання умови стаціонарності теплового поля (1.9), яка у випадку круга $\mathbf{D}_1$ має вигляд

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi=0\,. \tag{5.6}$$

За невиконання умови (5.6) задача (3.3)-(5.5)-(3.6)-(3.5) або (3.3)-(5.5)-(3.6)-(3.22) розв'язку не має. Проте у випадку задачі Неймана для рівняння Пуассона (3.30) іноді вдається підібрати частинний розв'язок неоднорідного рівняння $\omega(\rho,\varphi)$ таким чином, щоб після підстановки $U(\rho,\varphi)=V(\rho,\varphi)+\omega(\rho,\varphi)$ для нової невідомої функції $V(\rho,\varphi)$ одержалася коректно поставлена задача Неймана для рівняння Лапласа.

III. ***Задача Неймана для кільця.*** Розглянемо задачу: у класі функцій $C^2(\mathbf{D}_2)\cap C^1(\overline{\mathbf{D}}_2)$, де $\mathbf{D}_2$ – внутрішність, а $\overline{\mathbf{D}}_2=\{(\rho,\varphi)|\ R\le\rho\le R_1,\ 0\le\varphi<2\pi\}$ замикання кільця, обмеженого колами радіусів R та R_1 ($0<R<R_1$) із центрами в початку координат, знайти розв'язок $U(\rho,\varphi)$ рівняння Лапласа (3.3), який на межах кільця $\mathbf{D}_2$ справджує крайові умови

$$U_\rho(R,\varphi)=f(\varphi),\quad U_\rho(R_1,\varphi)=f_1(\varphi),\quad 0\le\varphi<2\pi, \tag{5.7}$$

де $f(\varphi)$ та $f_1(\varphi)$ відомі періодичні з періодом 2π функції, а також умови періодичності (3.6).

Для коректності постановки задачі Неймана (3.3)-(5.7)-(3.6) необхідне виконання умови стаціонарності теплового поля (1.9), яка у випадку кільця $\mathbf{D}_2$ має вигляд

$$R\int_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi=R_1\int_0^{2\pi} f_1(\varphi)d\varphi. \tag{5.8}$$

За невиконання умови (5.8) задача (3.3)-(5.7)-(3.6) розв'язку не має. Проте у випадку задачі Неймана для рівняння Пуассона (3.30) іноді вдається підібрати частинний розв'язок неоднорідного рівняння $\omega(\rho,\varphi)$ таким чином, щоб після підстановки $U(\rho,\varphi)=V(\rho,\varphi)+\omega(\rho,\varphi)$ для нової невідомої функції $V(\rho,\varphi)$ одержалася коректно поставлена задача Неймана для рівняння Лапласа.

IV. ***Задача Неймана для кругового сектора.*** Розглянемо задачу: у класі функцій $C^2(\mathbf{D}_3)\cap C^1(\overline{\mathbf{D}}_3)$, де $\mathbf{D}_3$ – внутрішність, а $\overline{\mathbf{D}}_3=\{(\rho,\varphi)|\ 0\le\rho\le R,\ 0\le\varphi\le\alpha<2\pi\}$ замикання сектора, що відповідає центральному куту $0<\alpha<2\pi$ круга радіуса R із центром у початку координат, знайти розв'язок $U(\rho,\varphi)$ рівняння Лапласа (3.3), який справджує крайові умови на межах сектора

$$U_\rho(R,\varphi)=f(\varphi),\quad 0\le\varphi\le\alpha<2\pi, \tag{5.9}$$

$$U_\varphi(\rho,0)=U_\varphi(\rho,\alpha)=0,\quad 0\le\rho\le R. \tag{5.10}$$

а також умову неперервності в центрі круга (3.5).

Будемо вважати, що для функції $f(\varphi)$, яка входить у крайову умову (5.9), виконуються умови узгодженості

$$f'(0)=f'(\alpha)=0. \tag{5.11}$$

Тоді для коректності постановки задачі Неймана (3.3)-(5.9)-(5.10)-(5.11) необхідне виконання умови стаціонарності теплового поля (1.9), яка у випадку кругового сектора $\mathbf{D}_3$ має вигляд

$$\int_0^{\alpha} f(\varphi)d\varphi=0. \tag{5.12}$$

За невиконання умови (5.12) задача (3.3)-(5.9)-(5.10)-(5.11) розв’язку не має. Проте у випадку задачі Неймана для рівняння Пуассона (3.30) за однорідних крайових умов (5.10) іноді вдається підібрати частинний розв’язок неоднорідного рівняння $\omega(\rho,\varphi)$ таким чином, щоб після підстановки $U(\rho,\varphi)=V(\rho,\varphi)+\omega(\rho,\varphi)$ для нової невідомої функції $V(\rho,\varphi)$ одержалася коректно поставлена задача Неймана для рівняння Лапласа.

V. ***Задача Неймана для криволінійного прямокутника («кільцевого сектора»).***
Розглянемо задачу: у класі функцій $C^2(\mathbf{D}_4)\bigcap C^1(\overline{\mathbf{D}}_4)$, де $\mathbf{D}_4$ – внутрішність, а $\overline{\mathbf{D}}_4=\{(\rho,\varphi)\big|\ R\le\rho\le R_1,\ 0\le\varphi\le\alpha<2\pi\}$ замикання криволінійного прямокутника, що відповідає центральному куту $0<\alpha<2\pi$ кільця, обмеженого колами радіусів R та R_1 ($0<R<R_1$) із центрами в початку координат, знайти розв’язок $U(\rho,\varphi)$ рівняння Лапласа (3.3), який справджує крайові умови

$$U_\rho(R,\varphi)=f(\varphi),\quad U_\rho(R_1,\varphi)=f_1(\varphi),\quad 0\le\varphi\le\alpha<2\pi. \tag{5.13}$$

$$U_\varphi(\rho,0)=U_\varphi(\rho,\alpha)=0,\quad R\le\rho\le R_1\,. \tag{5.14}$$

Будемо вважати, що для функцій $f(\varphi)$ та $f_1(\varphi)$, які входять у крайові умови (5.13), виконуються умови узгодженості

$$f'(0)=f'(\alpha)=0,\quad f_1'(0)=f_1'(\alpha)=0\,. \tag{5.15}$$

Тоді для коректності постановки задачі Неймана (3.3)-(5.13)-(5.14)-(5.15) необхідне виконання умови стаціонарності теплового поля (1.9), яка у випадку кільцевого сектора $\mathbf{D}_4$ має вигляд

$$R\int_0^\alpha f(\varphi)d\varphi=R_1\int_0^\alpha f_1(\varphi)d\varphi\,. \tag{5.16}$$

За невиконання умови (5.16) задача (3.3)-(5.13)-(5.14)-(5.15) розв’язку не має. Проте у випадку задачі Неймана для рівняння Пуассона (3.30) за однорідних крайових умов (5.14) іноді вдається підібрати частинний розв’язок неоднорідного рівняння $\omega(\rho,\varphi)$ таким чином, щоб після підстановки $U(\rho,\varphi)=V(\rho,\varphi)+\omega(\rho,\varphi)$ для нової невідомої функції $V(\rho,\varphi)$ одержалася коректно поставлена задача Неймана для рівняння Лапласа.

6. Функція Ґріна задачі Діріхле та її застосування

Позначимо через **D** область тривимірного простору, обмежену замкнутою поверхнею **S**.

Означення 3. Функція $G(P,M)$, $M(x,y,z)\in\mathbf{D}$ називається ***функцією Ґріна*** задачі Діріхле для рівняння Лапласа, якщо для неї виконуються наступні умови:

1) $G(P,M)$ як функція точки $P(\xi,\eta,\zeta)$ є гармонічною в області **D** за винятком точки M, де вона перетворюється в нескінченність;

2) $G(P,M)$ як функція точки $P(\xi,\eta,\zeta)$ справджує крайову умову

$$G(P,M)\big|_{P\in\mathbf{S}}=0;$$

3) в області **D** функція $G(P,M)$ допускає подання у вигляді

$$G(P,M)=\frac{1}{4\pi r_{PM}}+g(P,M),\quad r_{PM}=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2},$$

де $g(P,M)$ – гармонічна всюди в області **D** функція, яка визначається з задачі Діріхле

$$\Delta g(P,M)=0,\quad P\in\mathbf{D};$$

$$g(P,M)\big|_{P\in\mathbf{S}}=-\frac{1}{4\pi r_{PM}},\quad P\in\mathbf{S},\quad M\in\mathbf{D}.$$

Справедливі наступні теореми про властивості та застосування функції Ґріна.

Теорема 6.1 ***(властивість невід'ємності функції Ґріна).*** Функція Ґріна $G(P,M)$ є невід'ємною в області **D** і справджує нерівність

$$0<G(P,M)<\frac{1}{4\pi r_{PM}},\quad P\in\mathbf{D}.$$

Теорема 6.2 ***(властивість симетричності функції Ґріна).*** Функція Ґріна $G(P,M)$ є симетричною відносно точок P і M, тобто

$$G(P,M)=G(M,P).$$

Теорема 6.3 ***(подання розв'язку задачі Діріхле для рівняння Лапласа через функцію Ґріна).*** Якщо в класі функцій $C^2(\mathbf{D})\cap C^1(\overline{\mathbf{D}})$ існує розв'язок внутрішньої задачі Діріхле для рівняння Лапласа

$$\begin{aligned}&\Delta U(M)=0,\quad M\in\mathbf{D};\\&U(P)\big|_{\mathbf{S}}=f(P),\quad P\in\mathbf{S},\end{aligned}\tag{6.1}$$

то він подається формулою

$$U(M)=-\iint\limits_{\mathbf{S}}f(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial\vec{n}}ds,\tag{6.2}$$

де $\vec{n}$ – зовнішня нормаль до поверхні **S** у точці P.

Теорема 6.4 ***(подання розв'язку задачі Діріхле для рівняння Пуассона через функцію Ґріна).*** Якщо в класі функцій $C^2(\mathbf{D})\cap C^1(\overline{\mathbf{D}})$ існує розв'язок внутрішньої задачі Діріхле для рівняння Пуассона

$$\Delta U(M)=F(M),\quad M\in\mathbf{D};$$

$$U(P)\big|_{\mathbf{S}}=f(P),\quad P\in\mathbf{S},$$

то він подається формулою

$$U(M)=-\iint\limits_{\mathbf{S}}f(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial\vec{n}}ds-\iiint\limits_{\mathbf{D}}F(P)G(P,M)dP.$$

На підставі Теорем 6.3 та 6.4 за відомої функції Ґріна $G(P,M)$ можна будувати розв'язки задач Діріхле у різних областях простору. Для прикладу розглянемо внутрішню задачу Діріхле (6.1) для кулі **D** радіуса R із центром у початку координат, обмеженої відповідною сферою **S**. У цьому випадку функція Ґріна рівна

$$G(P,M)=\frac{1}{4\pi r_{PM}}-\frac{R}{4\pi\rho r_{PM_1}},\quad \rho=|OM|,$$

де M_1 – точка, спряжена з M відносно сфери **S**, тобто точка простору на продовженні прямої OM, для якої виконується рівність

$$|OM|\cdot|OM_1|=R^2.$$

Теорема 6.5 ***(про розв'язок внутрішньої задачі Діріхле для кулі).*** Якщо функція $f(P)$ неперервна на сфері **S**, то розв'язок внутрішньої задачі Діріхле (6.1) для кулі подається формулою

$$U(M)=\frac{1}{4\pi R}\iint\limits_{\mathbf{S}}\frac{R^2-\rho^2}{r_{PM}^3}f(P)ds. \qquad (6.3)$$

Формула (6.3) виводиться на підставі подання (6.2) і називається ***формулою Пуассона*** для задачі Діріхле в кулі.
Аналогічно на підставі Теореми 6.3 можна отримати також формулу, що визначає розв'язок зовнішньої задачі Діріхле для кулі:

$$U(M_1)=\frac{1}{4\pi R}\iint\limits_{\mathbf{S}}\frac{\rho_1^2-R^2}{r_{PM_1}^3}f(P)ds.$$

***Зауваження* 1.** У випадку площини функція Ґріна задачі Діріхле для рівняння Лапласа має вигляд

$$G(P,M)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{PM}}+g(P,M),\quad r_{PM}=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2},$$

а її регулярна частина $g(P,M)$ знаходиться з задачі Діріхле (тут **D** – плоска область, а **S** – замкнута крива, яка обмежує цю область)

$$\Delta g(P,M)=0,\quad P\in\mathbf{D};$$

$$g(P,M)\big|_{P\in\mathbf{S}}=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{PM}},\quad P\in\mathbf{S},\quad M\in\mathbf{D}.$$

***Зауваження* 2.** Більш детальний виклад навчального матеріалу з Теми 6 див. у вказаних джерелах: [2], с. 228-240, а також [3], с. 166-172.

Джерела:

[1] *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1988. – С. 51-56.
[2] *Перестюк М. О., Маринець В. В.* Теорія рівнянь математичної фізики. – К.: Либідь, 2001. – С. 196-209.
[3] *Перестюк М. О., Маринець В. В., Рего В. Л.* Збірник задач з математичної фізики. – Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2012. – С. 141-163.