РІВНЯННЯ З ВІДОКРЕМЛЮВАНИМИ ЗМІННИМИ
ТА ЗВІДНІ ДО НИХ

1. Дослідження диференціальних рівнянь методом ізоклін

Приклад 1.1. За допомогою ізоклін побудувати інтегральні криві диференціального рівняння (ДР)

$$\frac{dy}{dx} = x + y. \tag{1.1}$$

Розв'язання. Як відомо, рівняння ізокліни, в кожній точці якої дотичні до інтегральних кривих явного ДР першого порядку $y' = f(x, y)$ нахилені до осі абсцис під однаковим кутом α (інакше кажучи, кут α визначає ***напрям поля*** в точках відповідної ізокліни) має вигляд $f(x, y) = \mathrm{tg}\,\alpha$, тобто для ДР (1.1) будемо мати

$$x + y = \mathrm{tg}\,\alpha \quad \Rightarrow \quad y = -x + \mathrm{tg}\,\alpha. \tag{1.2}$$

Отже, ізоклінами для ДР (1.1) будуть прямі, що утворюють кут 135° із додатним напрямом осі абсцис. Задаючи в (1.2) різні значення кута α, дістанемо рівняння відповідних ізоклін, у точках яких напрям поля визначається заданим кутом. Як правило, для отримання схематичної фазової картини достатньо задати кілька «зручних» значень кута, наприклад:

а) $\alpha = 0^\circ \quad \Rightarrow \quad y = -x$;

б) $\alpha = 45^\circ \quad \Rightarrow \quad y = 1 - x$;

в) $\alpha = -45^\circ \quad \Rightarrow \quad y = -1 - x$

тощо. Зауважимо, що права частина ДР (1.1) визначена для всіх $(x, y) \in \mathrm{R}^2$, тому ізокліни, що відповідала б куту $\alpha = 90^\circ$, не існує (іншими словами, в жодній точці фазової площини дотичні до інтегральних кривих не є перпендикулярними до осі абсцис).

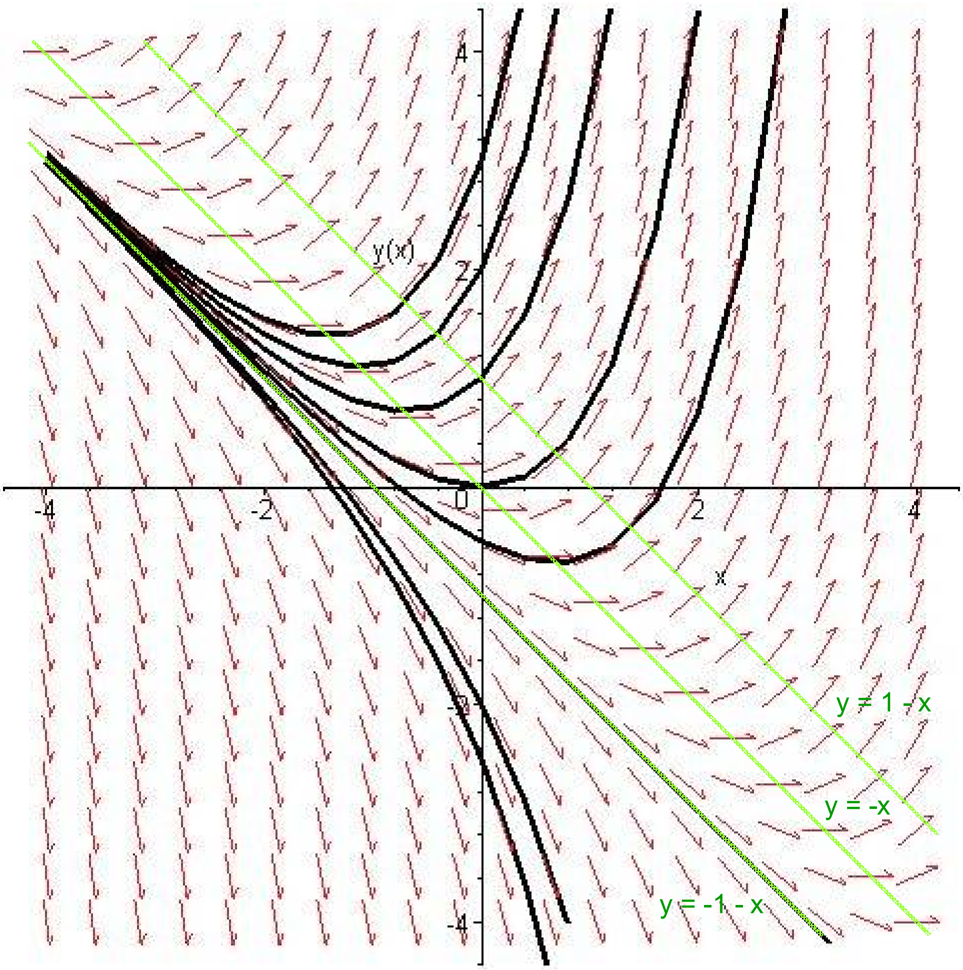
Напрям поля в точках фазової площини прийнято позначати стрілками. За застосування методу ізоклін ці стрілки слід зображати так, щоб у кожній точці ізокліни, рівняння якої задається рівністю (1.2), напрям стрілки утворював кут α із додатним напрямом осі абсцис.

Таким чином, у точках ізокліни $y = -x$ стрілки будуть співнапрямленими з віссю абсцис, оскільки ця ізокліна відповідає куту $\alpha = 0^\circ$.

Стрілки в точках ізокліни $y = 1 - x$ будуть співнапрямленими з додатним напрямом бісектриси I та III координатних чвертей, оскільки ця ізокліна відповідає куту $\alpha = 45^\circ$.

Стрілки в точках ізокліни $y = -1 - x$ будуть співнапрямленими з додатним напрямом бісектриси II та IV координатних чвертей, оскільки ця ізокліна відповідає куту $\alpha = -45^\circ$.

Тепер підсумуємо вищенаведене дослідження схематичним малюнком фазової картини для ДР (1.1), зобразивши інтегральні криві на підставі побудованих ізоклін і отриманого поля напрямів (мал. 1):



Мал. 1. Поле напрямів та інтегральні криві диференціального рівняння (1.1)

Приклад 1.2. За допомогою ізоклін побудувати інтегральні криві диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \sin(x - y)\,. \tag{1.3}$$

Розв'язання. Аналогічно до Прикладу 1.1 отримуємо рівняння ізоклін

$$\sin(x - y) = \operatorname{tg}\alpha\,. \tag{1.4}$$

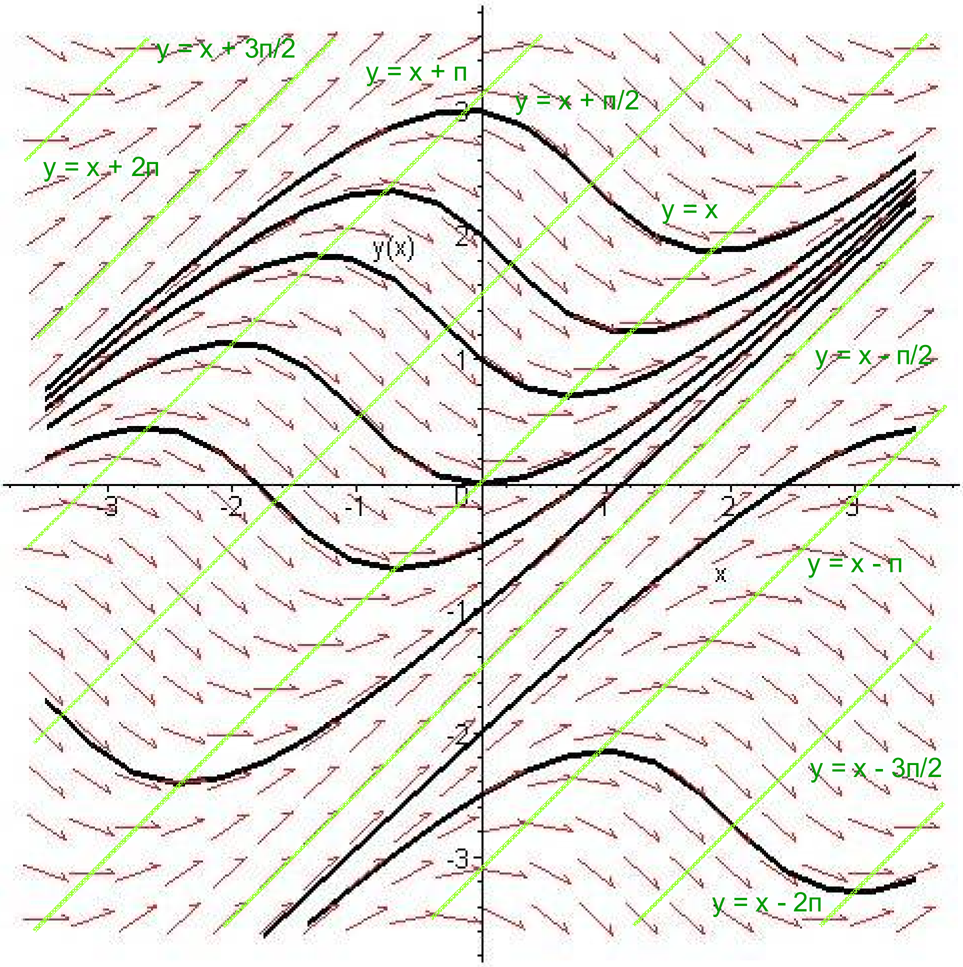
Отже, ізоклінами для ДР (1.3) будуть сукупності прямих, що утворюють кут 45° із додатним напрямом осі абсцис. Задаючи в (1.4) різні значення кута α, дістанемо рівняння відповідних ізоклін, наприклад:

а) $\alpha = 0^\circ \quad \Rightarrow \quad \sin(x - y) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = x - \pi k, \quad k \in \mathrm{Z}$;

б) $\alpha = 45^\circ \quad \Rightarrow \quad \sin(x - y) = 1 \quad \Rightarrow \quad y = x - \dfrac{\pi}{2} - 2\pi k, \quad k \in \mathrm{Z}$;

в) $\alpha = -45^\circ \quad \Rightarrow \quad \sin(x - y) = -1 \quad \Rightarrow \quad y = x + \dfrac{\pi}{2} - 2\pi k, \quad k \in \mathrm{Z}$

тощо. Зауважимо, що права частина ДР (1.3) визначена для всіх $(x, y) \in \mathrm{R}^2$, тому, як і в Прикладі 1.1, ізокліни, що відповідала б куту $\alpha = 90^\circ$, не існує.
Тепер підсумуємо вищенаведене дослідження схематичним малюнком фазової картини для ДР (1.3), зобразивши інтегральні криві на підставі побудованих ізоклин і отриманого поля напрямів (мал. 2):



Мал. 2. Поле напрямів та інтегральні криві диференціального рівняння (1.3)

2. Рівняння з відокремлюваними змінними

Приклад 2.1. Розв'язати рівняння шляхом відокремлення змінних:

$$x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0. \tag{2.1}$$

Розв'язання. Спочатку подамо ДР (2.1) у диференціальному вигляді, враховуючи, що $y' = \dfrac{dy}{dx}$:

$$x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad x\sqrt{1+y^2}\,dx + y\sqrt{1+x^2}\,dy = 0. \tag{2.2}$$

Щоб відокремити змінні у рівності (2.2), тобто подати її у вигляді $f_1(y)dy = f_2(x)dx$, перенесемо перший доданок у праву частину і поділимо отримане співвідношення на добуток коренів $\sqrt{1+y^2} \cdot \sqrt{1+x^2} \neq 0$:

$$y\sqrt{1+x^2}\,dy=-x\sqrt{1+y^2}\,dx \quad\Rightarrow\quad \frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}}=-\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}. \tag{2.3}$$

Враховуючи, що

$$\int\frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{d(1+y^2)}{\sqrt{1+y^2}}=\sqrt{1+y^2}\,,$$

із рівності (2.3) після інтегрування лівої та правої частин отримуємо

$$\sqrt{1+y^2}=-\sqrt{1+x^2}+C \quad\Rightarrow\quad \sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+x^2}=C\,, \tag{2.4}$$

де C – довільна стала. Зауважимо, що при переході від (2.2) до (2.3) втрати розв'язків не відбулося, оскільки співвідношення (2.2) ділилося на ненульовий вираз. Отже, отриманий загальний інтеграл (2.4) включає всю множину розв'язків ДР (2.1).

Відповідь. $\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+x^2}=C$.

Приклад 2.2. Зінтегрувати рівняння

$$y^2-1=(3y+xy)\frac{dy}{dx} \tag{2.5}$$

і знайти його інтегральну криву, яка проходить через точку $M(0,\sqrt{37})$.

Розв'язання. Домножимо ДР (2.5) на $dx\neq 0$ і відокремимо змінні аналогічно до Прикладу 2.1:

$$(y^2-1)dx=(3y+xy)dy \quad\Rightarrow\quad y(3+x)dy=(y^2-1)dx \quad\Rightarrow\quad \frac{ydy}{y^2-1}=\frac{dx}{3+x}. \tag{2.6}$$

Враховуючи, що

$$\int\frac{ydy}{y^2-1}=\frac{1}{2}\int\frac{d(y^2-1)}{y^2-1}=\frac{1}{2}\ln|y^2-1|,$$

із рівності (2.6) після інтегрування лівої та правої частин отримуємо загальний інтеграл ДР (2.5)

$$\frac{1}{2}\ln|y^2-1|=\ln|3+x|+\frac{1}{2}\ln|C| \quad\Rightarrow\quad y^2=C(3+x)^2+1, \tag{2.7}$$

де C – довільна стала.

Із перетворень (2.6) випливає необхідність додаткової перевірки функцій

$$3+x=0 \quad\Rightarrow\quad x=-3,$$

$$y^2-1=0 \quad\Rightarrow\quad y=\pm 1.$$

Перша функція очевидно не є розв'язком ДР (2.5), оскільки це рівняння в заданому записі не має змісту при $dx=0$. Функції $y=\pm 1$ натомість є розв'язками, однак отримуються з загального інтеграла (2.7) за значення $C=0$. Отже, у процесі інтегрування ми не допустили втрати розв'язків, і рівність (2.7) включає всю множину розв'язків ДР (2.5).

Виділимо тепер із сім'ї інтегральних кривих (2.7) ту, яка проходить через точку $M(0,\sqrt{37})$. Із (2.7) при значеннях $x=0$, $y=\sqrt{37}$ маємо

$$37=C\cdot 9+1 \quad\Rightarrow\quad C=4.$$

Підставивши знайдене значення сталої C у (2.7) і врахувавши, що ордината початкової точки є додатним числом, дістанемо рівняння інтегральної кривої, що проходить через точку $M(0,\sqrt{37})$: $y=\sqrt{4(x+3)^2+1}$.

Відповідь. $y^2=C(3+x)^2+1$; $y=\sqrt{4(x+3)^2+1}$.

Приклад 2.3. Розв'язати задачу Коші для рівняння (1.1) за початкової умови $y(0)=-1$.

Розв'язання. (1.1) можна розглядати як диференціальне рівняння типу

$$\frac{dy}{dx}=f(ax+by+c),$$

яке зводиться до ДР з відокремлюваними змінними підстановкою $z=ax+by+c$, де $z(x)$ нова невідома функція. Скориставшись цією заміною, будемо мати

$$z=x+y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}-1 \tag{2.8}$$

і після підстановки в (1.1)

$$\frac{dz}{dx}-1=z \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx}=z+1. \tag{2.9}$$

ДР (2.9) інтегрується шляхом відокремлення змінних:

$$\frac{dz}{z+1}=dx. \tag{2.10}$$

Із рівності (2.10) після інтегрування лівої та правої частин отримуємо

$$\ln|z+1|=x+\ln|C|,$$

або після спрощення

$$z+1=C\,\mathrm{e}^x, \tag{2.11}$$

де C – довільна стала. Виконавши в (2.11) зворотну заміну з урахуванням (2.8), дістанемо загальний інтеграл ДР (1.1)

$$x+y+1=C\,\mathrm{e}^x,$$

звідки можна виразити загальний розв'язок

$$y=C\,\mathrm{e}^x-x-1. \tag{2.12}$$

Із переходу від (2.9) до (2.10) випливає необхідність додаткової перевірки функції

$$z+1=0 \quad \Rightarrow \quad x+y+1=0 \quad \Rightarrow \quad y=-x-1.$$

Ця функція, як можна переконатися безпосередньою підстановкою, є розв'язком ДР (1.1), однак отримується з загального розв'язку (2.12) за значення $C=0$. Отже, у процесі інтегрування ми не допустили втрати розв'язків, і рівність (2.12) включає всю множину розв'язків ДР (1.1).

Виділимо зі знайденої множини розв'язків той, який справджує задану початкову умову $y(0)=-1$. Цей частинний розв'язок знаходиться з загального інтеграла (2.12) підстановкою початкових значень $x=0$, $y=-1$:

$$-1=C\,\mathrm{e}^0-1 \quad \Rightarrow \quad C=0,$$

тобто шуканий частинний розв'язок задається рівністю

$$y=-x-1.$$

Отже, шуканим розв'язком задачі Коші є ізокліна, що відповідає куту $\alpha=-45^\circ$, і водночас є однією з інтегральних кривих ДР (1.1), як наочно показано на мал. 1.

Відповідь. $y=-x-1$.

3. Нелінійні однорідні рівняння першого порядку

Приклад 3.1. Знайти розв'язок однорідного диференціального рівняння:

$$(2x^3+3xy^2)y'=x^2y+2y^3. \tag{3.1}$$

Розв'язання. Перепишемо ДР (3.1) у вигляді, розв'язаному відносно похідної, подавши $y'=\dfrac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2y+2y^3}{2x^3+3xy^2}. \tag{3.2}$$

Зауважимо, що ДР (3.2) є нелінійним однорідним, оскільки для його правої частини $f(x,y)=\dfrac{x^2y+2y^3}{2x^3+3xy^2}$ виконується умова однорідності:

$$f(\lambda x,\lambda y)\equiv\frac{(\lambda x)^2\cdot\lambda y+2(\lambda y)^3}{2(\lambda x)^3+3\lambda x\cdot(\lambda y)^2}=\frac{x^2y+2y^3}{2x^3+3xy^2}=f(x,y),\quad \forall\lambda\neq 0.$$

Для інтегрування однорідного ДР (3.2) введемо підстановку $y=xz$, де $z=z(x)$ нова невідома функція. Тоді з (3.2) одержимо

$$z+x\frac{dz}{dx}=\frac{x^2\cdot xz+2(xz)^3}{2x^3+3x\cdot(xz)^2},$$

або після спрощення

$$z+x\frac{dz}{dx}=\frac{z+2z^3}{2+3z^2}\quad\Rightarrow\quad x\frac{dz}{dx}=\frac{z+2z^3}{2+3z^2}-z\quad\Rightarrow\quad x\frac{dz}{dx}=-\frac{z+z^3}{2+3z^2},$$

звідки

$$x\frac{dz}{dx}=-\frac{z(1+z^2)}{2+3z^2}. \tag{3.3}$$

ДР (3.3) інтегрується шляхом відокремлення змінних:

$$\frac{(2+3z^2)dz}{z(1+z^2)}=-\frac{dx}{x}. \tag{3.4}$$

Враховуючи, що

$$\int\frac{(2+3z^2)dz}{z(1+z^2)}=\int\frac{(2+2z^2+z^2)dz}{z(1+z^2)}=2\int\frac{dz}{z}+\int\frac{zdz}{1+z^2},$$

із рівності (3.4) після інтегрування лівої та правої частин отримуємо

$$2\ln|z|+\frac{1}{2}\ln(z^2+1)=-\ln|x|+\ln|C|,$$

або після спрощення

$$z^2\sqrt{z^2+1}=\frac{C}{x}, \tag{3.5}$$

де C – довільна стала. Виконавши в (3.5) зворотну заміну змінних $z=\frac{y}{x}$, дістанемо загальний інтеграл ДР (3.1) у вигляді

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1}=\frac{C}{x},$$

або після спрощення

$$y^2\sqrt{y^2+x^2}=Cx^2. \qquad (3.6)$$

Із переходу від (3.3) до (3.4) випливає необхідність додаткової перевірки функцій

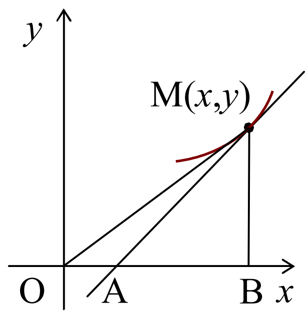
$$x=0,$$
$$z=0 \quad\Rightarrow\quad y=0.$$

Перша функція очевидно не є розв'язком ДР (3.1). Друга функція натомість є розв'язком, однак отримується з загального інтеграла за значення $C=0$. Отже, у процесі інтегрування ми не допустили втрати розв'язків, і рівність (3.6) включає всю множину розв'язків ДР (3.1).

Відповідь. $y^2\sqrt{y^2+x^2}=Cx^2$.

Приклад 3.2. Знайти криву, яка має наступну властивість: різниця між тангенсами кутів нахилу до осі абсцис дотичної до кривої в будь-якій її точці та радіус-вектора точки дотику рівна 1.

Розв'язання. Складемо диференціальну модель сформульованої геометричної задачі, тобто виведемо диференціальне рівняння кривих, які мають згадану в умові задачі властивість. Для цього побудуємо схематичний графік шуканої кривої $y=y(x)$, позначивши через $M(x,y)$ біжучу точку на цій кривій (мал. 3).



Мал. 3

Зробимо допоміжні побудови: проведемо дотичну AM до схематичного графіка в точці M, а також радіус-вектор OM точки дотику та ординату MB, перпендикулярну до осі абсцис. Тоді з використанням позначень на мал. 3 умову задачі можна записати у вигляді математичної рівності

$$\operatorname{tg}\angle MAB-\operatorname{tg}\angle MOB=1. \qquad (3.7)$$

Щоб записати відповідне диференціальне рівняння, потрібно виразити всі величини, що фігурують у рівності (3.7), через x, y та y'.

Оскільки згідно з нашими позначеннями $OB=x$, $MB=y$, то із прямокутного ΔMOB визначаємо

$$\operatorname{tg}\angle MOB=\frac{MB}{OB}=\frac{y}{x}.$$

Тангенс кута нахилу дотичної визначається на підставі геометричного змісту похідної:

$$\operatorname{tg}\angle MAB=y'.$$

Підставивши знайдені значення тангенсів у (3.7), одержимо диференціальне рівняння шуканої сім'ї кривих

$$y'-\frac{y}{x}=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+1. \qquad (3.8)$$

Зауважимо, що ДР (3.8) є нелінійним однорідним, оскільки для його правої частини $f(x,y)=\dfrac{y}{x}+1$ виконується умова однорідності:

$$f(\lambda x,\lambda y)\equiv\frac{\lambda y}{\lambda x}+1=\frac{y}{x}+1=f(x,y),\quad \forall\lambda\neq 0.$$

Для інтегрування однорідного ДР (3.8) введемо підстановку $y=xz$, де $z=z(x)$ нова невідома функція. Тоді з (3.8) одержимо

$$z+x\frac{dz}{dx}=z+1,$$

або після спрощення

$$x\frac{dz}{dx}=1. \tag{3.9}$$

ДР (3.9) інтегрується шляхом відокремлення змінних:

$$dz=\frac{dx}{x}.$$

Із останньої рівності після інтегрування лівої та правої частин отримуємо

$$z=\ln|x|+C, \tag{3.10}$$

де C – довільна стала. Виконавши в (3.10) зворотну заміну змінних $z=\dfrac{y}{x}$, дістанемо загальний інтеграл ДР (3.8)

$$\frac{y}{x}=\ln|x|+C,$$

із якого можна виразити загальний розв'язок у явному вигляді

$$y=x(C+\ln|x|). \tag{3.11}$$

Із переходу від (3.9) до (3.10) випливає необхідність додаткової перевірки функції $x=0$, яка очевидно не є розв'язком ДР (3.8). Отже, у процесі інтегрування ми не допустили втрати розв'язків, і рівність (3.11) включає всю множину розв'язків ДР (3.8), тобто задає сім'ю кривих, які мають вказану в умові задачі властивість.

Відповідь. Сім'я шуканих кривих задається рівнянням $y=x(C+\ln|x|)$, де C – довільна стала.

4. Рівняння, звідні до однорідних

Приклад 4.1. Розв'язати рівняння, попередньо звівши його до однорідного:

$$y'=2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2. \tag{4.1}$$

Розв'язання. (4.1) є диференціальним рівнянням типу

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right), \tag{4.2}$$

спосіб інтегрування якого залежить від значення детермінанта $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, який у нашому випадку рівний $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Отже, ДР (4.1) інтегрується шляхом зведення до однорідного рівняння подвійною заміною змінних

$$x = u + x_0, \quad y = v + y_0, \quad v = v(u), \tag{4.3}$$

де x_0, y_0 – невідомі сталі, які слід вибрати таким чином, щоб після заміни (4.3) ДР (4.1) стало однорідним.

Безпосередня підстановка (4.3) в (4.1) дає

$$\frac{dv}{du} = 2\left(\frac{v + y_0 + 2}{u + x_0 + v + y_0 - 1}\right)^2. \tag{4.4}$$

Рівняння (4.4) очевидно буде однорідним за виконання умов

$$\begin{cases} y_0 + 2 = 0, \\ x_0 + y_0 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x_0 = 3, \quad y_0 = -2.$$

Отже, шляхом заміни змінних

$$x = u + 3, \quad y = v - 2, \quad v = v(u) \tag{4.5}$$

ДР (4.1) зводиться до однорідного рівняння з невідомою функцією $v(u)$

$$\frac{dv}{du} = 2\left(\frac{v}{u + v}\right)^2. \tag{4.6}$$

Для інтегрування однорідного ДР (4.6) введемо підстановку $v = uz$, де $z = z(u)$ нова невідома функція. Тоді з (4.6) одержимо

$$z + u\frac{dz}{du} = 2\left(\frac{uz}{u + uz}\right)^2,$$

або після спрощення

$$z + u\frac{dz}{du} = 2\left(\frac{z}{1 + z}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad u\frac{dz}{du} = 2\left(\frac{z}{1 + z}\right)^2 - z \quad \Rightarrow \quad u\frac{dz}{du} = \frac{2z^2 - z(1+z)^2}{(1+z)^2},$$

звідки

$$u\frac{dz}{du} = -\frac{z(1+z^2)}{(1+z)^2}. \tag{4.7}$$

ДР (4.7) інтегрується шляхом відокремлення змінних:

$$\frac{(1+z)^2 dz}{z(1+z^2)} = -\frac{du}{u}. \tag{4.8}$$

Враховуючи, що

$$\int \frac{(1+z)^2 dz}{z(1+z^2)} = \int \frac{(1 + z^2 + 2z)dz}{z(1+z^2)} = \int \frac{dz}{z} + 2\int \frac{dz}{1+z^2},$$

із рівності (4.8) після інтегрування лівої та правої частин отримуємо

$$\ln|z| + 2\,\mathrm{arctg}\, z = -\ln|u| + \ln|C|,$$

або після спрощення

$$zu\,\mathrm{e}^{2\,\mathrm{arctg}\,z} = C\,, \tag{4.9}$$

де C – довільна стала. Виконавши в (4.9) зворотні заміни змінних з урахуванням (4.5), тобто

$$u = x - 3, \quad z = \frac{v}{u} = \frac{y+2}{x-3}\,,$$

дістанемо загальний інтеграл ДР (4.1) у вигляді

$$(y+2)\mathrm{e}^{2\,\mathrm{arctg}\frac{y+2}{x-3}} = C\,. \tag{4.10}$$

Із переходу від (4.7) до (4.8) випливає необхідність додаткової перевірки функцій

$$u = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3\,,$$

$$z = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -2\,.$$

Перша функція очевидно не є розв'язком ДР (4.1). Друга функція натомість є розв'язком, однак отримується з загального інтеграла за значення $C = 0$. Отже, у процесі інтегрування ми не допустили втрати розв'язків, і рівність (4.10) включає всю множину розв'язків ДР (4.1).

Відповідь. $(y+2)\mathrm{e}^{2\,\mathrm{arctg}\frac{y+2}{x-3}} = C\,.$

Приклад 4.2. Зінтегрувати рівняння першого порядку

$$(2x + y - 1)dx + (6x + 3y + 2)dy = 0 \tag{4.11}$$

і знайти його розв'язок, який справджує початкову умову $y(1) = -2$.

Розв'язання. Перепишемо ДР (4.11) у дробово-раціональному вигляді

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + y - 1}{6x + 3y + 2}\,. \tag{4.12}$$

Очевидно, що (4.12) є ДР типу (4.2), спосіб інтегрування якого визначається детермінантом (див. Приклад 4.1) $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 0$. Отже, ДР (4.11) інтегрується шляхом зведення до рівняння з відокремлюваними змінними однією з чотирьох можливих підстановок: $z = 2x + y$, $z = 2x + y - 1$, $z = 6x + 3y$ або $z = 6x + 3y + 2$, де $z(x)$ нова невідома функція. Якщо скористатися, наприклад, другою з перерахованих замін, то будемо мати

$$z = 2x + y - 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 2 \tag{4.13}$$

і після підстановки в (4.12)

$$\frac{dz}{dx} - 2 = -\frac{z}{3z+5}\,,$$

або після спрощення

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{z}{3z+5} + 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = \frac{-z + 6z + 10}{3z+5} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = \frac{5(z+2)}{3z+5}\,. \tag{4.14}$$

ДР (4.14) інтегрується шляхом відокремлення змінних:

$$\frac{(3z+5)dz}{5(z+2)} = dx\,. \tag{4.15}$$

Враховуючи, що

$$\int\frac{(3z+5)dz}{5(z+2)}=\int\frac{[3(z+2)-1]dz}{5(z+2)}=\frac{3}{5}\int dz-\frac{1}{5}\int\frac{dz}{z+2},$$

із рівності (4.15) після інтегрування лівої та правої частин отримуємо

$$\frac{3}{5}z-\frac{1}{5}\ln|z+2|=x+\frac{1}{5}\cdot C_1,$$

або після спрощення

$$3z-5x-\ln|z+2|=C_1, \qquad (4.16)$$

де C_1 – довільна стала. Виконавши в (4.16) зворотну заміну з урахуванням (4.13), дістанемо загальний інтеграл ДР (4.11)

$$x+3y-3-\ln|2x+y+1|=C_1,$$

або в простішому вигляді

$$x+3y-\ln|2x+y+1|=C, \qquad (4.17)$$

де $C=C_1+3$.

Із переходу від (4.14) до (4.15) випливає необхідність додаткової перевірки функції

$$z+2=0 \quad\Rightarrow\quad 2x+y+1=0 \quad\Rightarrow\quad y=-2x-1.$$

Ця функція, як можна переконатися безпосередньою підстановкою, є розв'язком ДР (4.11), і не отримується з загального інтеграла (4.17) за жодного значення сталої *C*. Тому її треба додати окремо до множини розв'язків ДР (4.11), яка описується загальним інтегралом (4.17).

Виділимо зі знайденої множини розв'язків той, який справджує задану початкову умову $y(1)=-2$. Очевидно, що $y=-2x-1$ не може бути шуканим частинним розв'язком, оскільки для цієї функції $y(1)=-3$. Отже, розв'язок задачі Коші знаходиться з загального інтеграла (4.17) підстановкою початкових значень $x=1$, $y=-2$:

$$1+3\cdot(-2)-\ln|2\cdot 1-2+1|=C \quad\Rightarrow\quad C=-5,$$

тобто шуканий частинний розв'язок задається неявним співвідношенням

$$x+3y-\ln|2x+y+1|=-5.$$

Відповідь. $x+3y-\ln|2x+y+1|=C$, $y=-2x-1$; $x+3y-\ln|2x+y+1|=-5$.

Приклад 4.3. Розв'язати рівняння, попередньо звівши його до однорідного:

$$\frac{xy}{2}dx+(y^4-x^2)dy=0. \qquad (4.18)$$

Розв'язання. Перепишемо ДР (4.18) у вигляді, розв'язаному відносно похідної:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy}{2(x^2-y^4)}. \qquad (4.19)$$

Очевидно, що ДР (4.19) не є ні однорідним, ані звідним до однорідних типу (4.2). Перевіримо виконання умови квазіоднорідності

$$f(\lambda x,\lambda^\sigma y)=\lambda^{\sigma-1}f(x,y),\;\; \lambda\neq 0$$

для правої частини рівняння (4.19) $f(x,y)=\dfrac{xy}{2(x^2-y^4)}$:

$$\frac{\lambda x\cdot\lambda^\sigma y}{2[(\lambda x)^2-(\lambda^\sigma y)^4]}=\lambda^{\sigma-1}\frac{xy}{2(x^2-y^4)}.$$

Поділивши ліву й праву частини останньої рівності на $\lambda^{\sigma-1} \neq 0$, дістанемо спрощену умову

$$\frac{xy}{2(x^2 - \lambda^{4\sigma-2} \cdot y^4)} = \frac{xy}{2(x^2 - y^4)}.$$

Отримане співвідношення очевидно виконується, якщо покласти

$$4\sigma - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{1}{2}.$$

Отже, ДР (4.19) є квазіоднорідним із вагою квазіоднорідності $\sigma = \frac{1}{2}$. Тому його можна зінтегрувати або зведенням до однорідного заміною $y = z^{\sigma} = \sqrt{z}$, або безпосереднім зведенням до ДР з відокремлюваними змінними заміною $y = zx^{\sigma} = z\sqrt{x}$, де $z(x)$ нова невідома функція. Оскільки в завданні вимагається попереднє зведення до однорідного ДР, то застосуємо першу зі згаданих замін:

$$y = \sqrt{z} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{z}} \cdot \frac{dz}{dx},$$

і після підстановки в (3.2) маємо

$$\frac{1}{2\sqrt{z}} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{x\sqrt{z}}{2(x^2 - z^2)} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = \frac{xz}{x^2 - z^2}. \tag{4.20}$$

Отримане однорідне ДР (4.20) інтегрується шляхом введення підстановки $z = xv$, де $v = v(x)$ ще одна нова невідома функція. Тоді з (4.20) одержимо

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x \cdot xv}{x^2 - (xv)^2},$$

або після спрощення

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{1 - v^2} \quad \Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{1 - v^2} - v \quad \Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{v - v(1 - v^2)}{1 - v^2},$$

звідки

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v^3}{1 - v^2}. \tag{4.21}$$

ДР (4.21) інтегрується шляхом відокремлення змінних:

$$\frac{(1 - v^2)dv}{v^3} = \frac{dx}{x}. \tag{4.22}$$

Враховуючи, що

$$\int \frac{(1 - v^2)dv}{v^3} = \int \frac{dv}{v^3} - \int \frac{dv}{v},$$

із рівності (4.22) після інтегрування лівої та правої частин отримуємо

$$-\frac{1}{2v^2} - \ln|v| = \ln|x| - \ln|C|,$$

або після спрощення

$$vx\mathrm{e}^{\frac{1}{2v^2}} = C, \tag{4.23}$$

де C – довільна стала. Виконавши в (4.23) зворотні заміни змінних з урахуванням попередніх підстановок $z = xv$ та $y = \sqrt{z}$, дістанемо загальний інтеграл ДР (4.18) у вигляді

$$y^2 \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2y^4}} = C. \qquad (4.24)$$

Із переходу від (4.21) до (4.22) випливає необхідність додаткової перевірки функцій

$$x = 0,$$
$$v = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0.$$

Перша функція очевидно не є розв'язком ДР (4.18). Друга функція натомість є розв'язком, і не отримується з загального інтеграла (4.24) за жодного значення сталої C (оскільки при $y = 0$ маємо невизначеність у степені експоненти). Тому її треба додати окремо до множини розв'язків ДР (4.18), яка описується загальним інтегралом (4.24).

Відповідь. $y^2 \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2y^4}} = C$, $y = 0$.

Примітка. Необхідні теоретичні відомості по темах розділу:
Маринець К. В. Диференціальні рівняння першого порядку та методи їх інтегрування. – Навчальний посібник з курсу «Диференціальні рівняння», частина І. – Ужгород: «Говерла», 2015. – С. 15-19.
Цикл лекцій по темах розділу: Найпростіші диференціальні рівняння першого порядку, інтегровні в квадратурах.