

### МЕТОД ВІДОКРЕМЛЕННЯ ЗМІННИХ ДЛЯ РІВНЯНЬ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ

**Приклад 1.** Знайти закон зміни температури в однорідному стрижні довжини  $l$  із теплоізолюваними кінцями й бічною поверхнею, якщо в початковий момент часу температура стрижня описувалася функцією  $\varphi(x) = 1 + \cos \frac{\pi}{l}x$ .

**Розв'язання.** Відповідна математична модель: в області  $\Omega = \{(t, x) | t > 0, 0 < x < l\}$  знайти розв'язок однорідного рівняння теплопровідності

$$U_t = a^2 U_{xx}, \quad (1.1)$$

який задовольняє початкову умову

$$U(0, x) = 1 + \cos \frac{\pi}{l}x, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (1.2)$$

та крайові умови

$$U_x(t, 0) = 0, \quad U_x(t, l) = 0, \quad t \geq 0. \quad (1.3)$$

Маємо задачу з однорідними крайовими умовами для однорідного рівняння теплопровідності. Початкові та крайові умови є узгодженими, отже, до задачі (1.1)-(1.2)-(1.3) застосовний метод відокремлення змінних (метод Фур'є). Згідно з алгоритмом цього методу розв'язок шукаємо у вигляді добутку двох функцій

$$U(t, x) = T(t) \cdot X(x) \neq 0, \quad (1.4)$$

кожна з яких знаходиться окремо з урахуванням рівняння (1.1) та умов (1.2), (1.3). Підставивши (1.4) у рівняння (1.1), одержимо:

$$T'(t) \cdot X(x) = a^2 T(t) \cdot X''(x).$$

Відокремивши змінні шляхом ділення лівої та правої частин останньої рівності на величину  $a^2 T(t) \cdot X(x) \neq 0$ , маємо

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Одержана рівність виконується для всіх  $(t, x) \in \Omega$  тільки тоді, коли

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda = \text{const},$$

звідки маємо

$$T'(t) - \lambda a^2 T(t) = 0, \quad T(t) \neq 0; \quad (1.5)$$

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(x) \neq 0. \quad (1.6)$$

Підставивши (1.4) у крайові умови (1.3), одержимо

$$T(t) \cdot X'(0) = 0, \quad T(t) \cdot X'(l) = 0,$$

звідки, враховуючи, що  $T(t) \neq 0$ , маємо

$$X'(0) = 0, \quad X'(l) = 0. \quad (1.7)$$

Дослідимо задачу Штурма-Ліувілля (1.6)-(1.7). Для цього зауважимо, що характеристичне рівняння для ДР зі сталими коефіцієнтами (1.6)

$$k^2 - \lambda = 0$$

залежно від значення параметра  $\lambda$  може мати дійсні різні, кратні або комплексні корені. Тому для повного дослідження слід розглянути три випадки.

**1.** Нехай  $\lambda > 0$ . Тоді  $k_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$  і загальний розв'язок рівняння (1.6) запишеться у вигляді  $X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$ . Підставивши цей розв'язок у крайові умови (1.7), одержимо лінійну однорідну систему відносно невідомих сталих  $C_1, C_2$ :

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda}(C_1 - C_2) = 0; \\ \sqrt{\lambda}(C_1 e^{\sqrt{\lambda}l} - C_2 e^{-\sqrt{\lambda}l}) = 0. \end{cases}$$

Детермінант цієї системи  $\Delta = -2\lambda \operatorname{sh} \sqrt{\lambda}l \neq 0$ , оскільки  $\sqrt{\lambda}l > 0$ . Отже,  $C_1 = C_2 = 0$ , а тому  $X(x) \equiv 0$  і у випадку  $\lambda > 0$  власних значень не існує.

**2.** Нехай  $\lambda = 0$ . Тоді  $k_{1,2} = 0$ ,  $X(x) = C_3x + C_4$  і з крайових умов (1.7) одержимо:

$$\begin{cases} C_3 = 0; \\ C_4 = 0, \end{cases}$$

звідки  $C_3 = 0$ ,  $C_4$  – довільна стала. Отже, нетривіальний розв'язок існує при  $C_4 \neq 0$ , а тому  $\lambda = 0$  є власним значенням, якому відповідає власна функція  $X(x) = C_4$ .

**3.** При  $\lambda < 0$   $k_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}i$  і загальний розв'язок рівняння (1.6) запишеться у вигляді  $X(x) = C_5 \cos \sqrt{-\lambda}x + C_6 \sin \sqrt{-\lambda}x$ . Із крайових умов (1.7) одержимо:

$$\begin{cases} \sqrt{-\lambda}C_6 = 0; \\ \sqrt{-\lambda}(C_6 \cos \sqrt{-\lambda}l - C_5 \sin \sqrt{-\lambda}l) = 0, \end{cases}$$

звідки  $C_6 = 0$  і  $-\sqrt{-\lambda}C_5 \sin \sqrt{-\lambda}l = 0$ . Отже, нетривіальний розв'язок задачі (1.6)-(1.7) існує тільки для тих значень параметра  $\lambda$ , які є розв'язками тригонометричного

рівняння  $\sin \sqrt{-\lambda}l = 0$ , звідки  $\lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$ , а відповідні власні функції матимуть

вигляд  $X_n(x) = C_5 \cos \frac{\pi n}{l}x$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Об'єднавши випадки  $\lambda = 0$  і  $\lambda < 0$ , і взявши для визначеності  $C_4 = C_5 = 1$ , одержимо систему власних значень і власних функцій ЗШЛ (1.6)-(1.7):

$$\lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \cos \frac{\pi n}{l}x, \quad n = \overline{0, \infty}. \quad (1.8)$$

Підставивши знайдені власні значення у (1.5), отримаємо рівняння для визначення функцій  $T(t)$

$$T'_n(t) + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n(t) = 0, \quad n = \overline{0, \infty},$$

загальний розв'язок якого має різний вигляд для випадків  $n = 0$  та  $n > 0$ :

$$n = 0 \Rightarrow T_0(t) = A_0;$$

$$n > 0 \Rightarrow T_n(t) = A_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t},$$

де  $A_n$ ,  $n = \overline{0, \infty}$  – довільні сталі.

Згідно з (1.4) функції

$$U_0(t, x) = T_0(t)X_0(x) = A_0,$$

$$U_n(t, x) = T_n(t)X_n(x) = A_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \cdot \cos \frac{\pi n}{l} x, \quad n \in \mathbb{N},$$

є частинними розв'язками ДРЧП (1.1), що справджують крайові умови (1.3). Тоді з урахуванням лінійності й однорідності ДРЧП (1.1) та крайових умов (1.3) загальний розв'язок ДРЧП (1.1), що справджує крайові умови (1.3), запишеться у вигляді лінійної комбінації частинних розв'язків

$$U(t, x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \cdot \cos \frac{\pi n}{l} x. \quad (1.9)$$

Визначимо коефіцієнти ряду (1.9) таким чином, щоб він справджував початкову умову (1.2). Підстановка (1.9) в (1.2) дає

$$U(0, x) \equiv A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{\pi n}{l} x = 1 + \cos \frac{\pi}{l} x. \quad (1.10)$$

Права частина рівності (1.10) містить доданки, які є власними функціями (1.8) при  $n = 0$  та  $n = 1$  (**резонансний випадок**), тому коефіцієнти знаходяться без інтегрування. Рівність (1.10) очевидно виконується, якщо покласти

$$A_0 = A_1 = 1, \quad A_n = 0, \quad n = \overline{2, \infty}.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти у ряд (1.9), одержимо шуканий розв'язок мішаної задачі (1.1)-(1.2)-(1.3) у вигляді

$$U(t, x) = 1 + e^{-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 t} \cdot \cos \frac{\pi}{l} x.$$

**Відповідь.**  $U(t, x) = 1 + e^{-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 t} \cdot \cos \frac{\pi}{l} x.$

**Приклад 2.** Знайти закон зміни температури в однорідному стрижні одиничної довжини, лівий кінець якого теплоізолюваний, а на правому кінці та через бічну поверхню відбувається теплообмін – із коефіцієнтом  $\alpha > 0$  таким, що  $h = \alpha k^{-1} = 1$ ,  $b = \alpha \omega / (c\rho\sigma)^{-1} = 1$  – із довкіллям нульової температури, якщо початкова температура стрижня рівна нулеві, а всередині стрижня діють джерела тепла сумарної інтенсивності  $f(t, x) = 24c\rho e^{-2t} (3 - x^2)$ .

**Розв'язання.** Відповідна математична модель: в області  $\Omega = \{(t, x) | t > 0, 0 < x < 1\}$  знайти розв'язок неоднорідного рівняння поширення тепла

$$U_t = a^2 U_{xx} - U + 24e^{-2t} (3 - x^2), \quad (2.1)$$

який задовольняє початкову умову

$$U(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.2)$$

та крайові умови

$$U_x(t, 0) = 0, \quad U_x(t, 1) + U(t, 1) = 0, \quad t \geq 0. \quad (2.3)$$

Оскільки крайові умови (2.3) однорідні, то для початку доцільно спростити рівняння (2.1) підстановкою

$$U(t, x) = e^{-bt} \cdot V(t, x) = e^{-t} \cdot V(t, x), \quad (2.4)$$

де  $V(t, x)$  нова невідома функція. Безпосередня підстановка (2.4) в рівняння (2.1) та умови (2.2), (2.3) дає

$$-e^{-t} V + e^{-t} V_t = a^2 e^{-t} V_{xx} - e^{-t} V + 24e^{-2t} (3 - x^2),$$

$$V(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$e^{-t} V_x(t, 0) = 0, \quad e^{-t} V_x(t, 1) + e^{-t} V(t, 1) = 0, \quad t \geq 0.$$

Після спрощення останніх рівностей для  $V(t, x)$  отримуємо мішану задачу:

$$V_t = a^2 V_{xx} + 24e^{-t} (3 - x^2), \quad (t, x) \in \Omega, \quad (2.5)$$

$$V(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.6)$$

$$V_x(t, 0) = 0, \quad V_x(t, 1) + V(t, 1) = 0, \quad t \geq 0. \quad (2.7)$$

Маємо задачу з однорідними крайовими умовами для неоднорідного рівняння теплопровідності. Вільний член у рівнянні справджує крайові умови (2.7), отже, до задачі (2.5)-(2.6)-(2.7) застосовний метод відокремлення змінних (метод Фур'є). Згідно з алгоритмом цього методу розв'язок шукаємо у вигляді

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x), \quad (2.8)$$

де  $X_n(x)$  – власні функції задачі Штурма-Ліувілля для відповідної однорідної задачі

$$Z_t = a^2 Z_{xx}, \quad (t, x) \in \Omega,$$

$$Z(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.9)$$

$$Z_x(t, 0) = 0, \quad Z_x(t, 1) + Z(t, 1) = 0, \quad t \geq 0.$$

Для знаходження власних функцій застосуємо до задачі (2.9) алгоритм, проілюстрований у Прикладі 1. Отже, шукаючи  $Z(t, x)$  у вигляді добутку двох функцій

$$Z(t, x) = Q(t) \cdot X(x) \neq 0,$$

для визначення  $X(x)$  отримуємо задачу Штурма-Ліувілля для рівняння (1.6) із крайовими умовами

$$X'(0) = 0, \quad X'(1) + X(1) = 0. \quad (2.10)$$

Дослідимо задачу Штурма-Ліувілля (1.6)-(2.10) аналогічно до Прикладу 1.

**1.** Нехай  $\lambda > 0$ . Тоді загальний розв'язок рівняння (1.6) запишеться у вигляді  $X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$ . Підставивши цей розв'язок у крайові умови (2.10), одержимо:

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda}(C_1 - C_2) = 0; \\ \sqrt{\lambda}(C_1 e^{\sqrt{\lambda}} - C_2 e^{-\sqrt{\lambda}}) + C_1 e^{\sqrt{\lambda}} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}} = 0. \end{cases}$$

Детермінант цієї системи  $\Delta = 2(\sqrt{\lambda} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda} + \lambda \operatorname{sh} \sqrt{\lambda}) \neq 0$ , оскільки  $\lambda > 0$ . Отже,  $C_1 = C_2 = 0$ , а тому  $X(x) \equiv 0$  і у випадку  $\lambda > 0$  власних значень не існує.

2. Нехай  $\lambda = 0$ . Тоді  $X(x) = C_3x + C_4$  і з крайових умов (2.10) одержимо:

$$\begin{cases} C_3 = 0; \\ 2C_3 + C_4 = 0, \end{cases}$$

звідки  $C_3 = C_4 = 0$ , а тому  $X(x) \equiv 0$  і  $\lambda = 0$  не є власним значенням.

3. При  $\lambda < 0$  загальний розв'язок рівняння (1.6) запишеться у вигляді

$X(x) = C_5 \cos \sqrt{-\lambda}x + C_6 \sin \sqrt{-\lambda}x$ . Із крайових умов (2.6) одержимо:

$$\begin{cases} \sqrt{-\lambda}C_6 = 0; \\ \sqrt{-\lambda}(C_6 \cos \sqrt{-\lambda} - C_5 \sin \sqrt{-\lambda}) + C_5 \cos \sqrt{-\lambda} + C_6 \sin \sqrt{-\lambda} = 0, \end{cases}$$

звідки  $C_6 = 0$  і  $C_5(\cos \sqrt{-\lambda} - \sqrt{-\lambda} \sin \sqrt{-\lambda}) = 0$ . Отже, нетривіальний розв'язок задачі (1.6)-(2.10) існує тільки для тих значень параметра  $\lambda$ , які є розв'язками трансцендентного рівняння

$$\sqrt{-\lambda} = \operatorname{ctg} \sqrt{-\lambda}. \quad (2.11)$$

Останнє рівняння має безліч коренів (це можна легко показати графічно), які не знаходяться в явному вигляді. Введемо задля зручності позначення  $\mu_n = \sqrt{-\lambda_n}$ , де  $\lambda_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  – множина від'ємних коренів рівняння (2.11). Тоді, взявши для визначеності  $C_5 = 1$ , одержимо систему власних значень і власних функцій ЗШЛ (1.6)-(2.10):

$$\lambda_n = -\mu_n^2, \quad X_n(x) = \cos \mu_n x, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.12)$$

З урахуванням знайдених власних функцій (2.12) ряд (2.8) для шуканого розв'язку мішаної задачі (2.5)-(2.6)-(2.7) запишеться у вигляді

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cos \mu_n x. \quad (2.13)$$

Функція (2.13) очевидно справджує крайові умови (2.7). Залишилося визначити коефіцієнти  $T_n(t)$  таким чином, щоб ряд (2.13) справджував неоднорідне рівняння (2.5) та однорідну початкову умову (2.6). Для цього спершу розкладемо вільний член рівняння (2.5) у ряд Фур'є по системі власних функцій (2.12) на проміжку  $x \in [0; 1]$ , тобто подамо її у вигляді

$$24e^{-t}(3 - x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \cos \mu_n x, \quad (2.14)$$

де коефіцієнти Фур'є обчислюються згідно з загальною формулою

$$f_n(t) = \frac{24e^{-t} \int_0^1 (3 - \xi^2) \cos \mu_n \xi d\xi}{\int_0^1 \cos^2 \mu_n \xi d\xi} = \frac{96 \sin \mu_n}{\mu_n^3 (1 + \sin^2 \mu_n)} e^{-t}.$$

Підставивши (2.13) і (2.14) у рівняння (2.5), одержимо

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t) \cos \mu_n x = -a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 T_n(t) \cos \mu_n x + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \cos \mu_n x,$$

або

$$\sum_{n=1}^{\infty} [T_n'(t) + (a\mu_n)^2 T_n(t) - f_n(t)] \cos \mu_n x = 0.$$

Остання рівність можлива тоді й тільки тоді, коли

$$T_n'(t) + (a\mu_n)^2 T_n(t) = f_n(t) = \frac{96 \sin \mu_n}{\mu_n^3 (1 + \sin^2 \mu_n)} e^{-t}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.15)$$

Підставляючи (2.13) у початкову умову (2.6), маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \cos \mu_n x = 0,$$

звідки очевидно випливають початкові умови

$$T_n(0) = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.16)$$

Розв'язок задачі Коші (2.15)-(2.16) знайдемо із застосуванням відомої з курсу звичайних диференціальних рівнянь формули загального розв'язку лінійного рівняння першого порядку (2.15) за врахування початкової умови (4.8). Отже, маємо

$$\begin{aligned} T_n(t) &= e^{-\int (a\mu_n)^2 dt} \cdot \left[ A_n + \int f_n(t) e^{\int (a\mu_n)^2 dt} dt \right] = A_n e^{-(a\mu_n)^2 t} + \\ &+ \frac{96 \sin \mu_n e^{-(a\mu_n)^2 t}}{\mu_n^3 (1 + \sin^2 \mu_n)} \int e^{[(a\mu_n)^2 - 1]t} dt = A_n e^{-(a\mu_n)^2 t} + \frac{96 \sin \mu_n e^{-t}}{\mu_n^3 (1 + \sin^2 \mu_n) [(a\mu_n)^2 - 1]}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

де  $A_n$  – довільна стала, значення якої знаходимо підстановкою (2.17) у початкову умову (2.16):

$$T_n(0) \equiv A_n + \frac{96 \sin \mu_n}{\mu_n^3 (1 + \sin^2 \mu_n) [(a\mu_n)^2 - 1]} = 0,$$

звідки

$$A_n = -\frac{96 \sin \mu_n}{\mu_n^3 (1 + \sin^2 \mu_n) [(a\mu_n)^2 - 1]}.$$

Підклавши отримані значення  $A_n$  у (2.17), дістанемо розв'язок задачі Коші (2.15)-(2.16)

$$T_n(t) = \frac{96 \sin \mu_n (e^{-t} - e^{-(a\mu_n)^2 t})}{\mu_n^3 (1 + \sin^2 \mu_n) [(a\mu_n)^2 - 1]}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Підставивши знайдені функції у (2.13), одержимо розв'язок мішаної задачі (2.5)-(2.6)-(2.7)

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{96 \sin \mu_n (e^{-t} - e^{-(a\mu_n)^2 t}) \cos \mu_n x}{\mu_n^3 (1 + \sin^2 \mu_n) [(a\mu_n)^2 - 1]}. \quad (2.18)$$

Тоді шуканий розв'язок мішаної задачі (2.1)-(2.2)-(2.3) отримується шляхом підстановки (2.18) у формулу (2.4).

**Відповідь.**  $U(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{96 \sin \mu_n (e^{-2t} - e^{-[(a\mu_n)^2 + 1]t}) \cos \mu_n x}{\mu_n^3 (1 + \sin^2 \mu_n) [(a\mu_n)^2 - 1]}$  де  $\mu_n$  – додатні корені трансцендентного рівняння  $\mu = \operatorname{ctg} \mu$ .

**Приклад 3.** Дати фізичну інтерпретацію поставленої мішаної задачі та знайти її розв'язок:

$$U_t = a^2 U_{xx} + A(x-1)\cos t + B e^{-t} \cos \frac{7\pi}{2} x, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1, \quad (3.1)$$

$$U(0, x) = A \cos \frac{3\pi}{2} x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (3.2)$$

$$U_x(t, 0) = A \sin t, \quad U(t, 1) = 0, \quad t \geq 0, \quad (3.3)$$

де  $A, B = \text{const} > 0$ .

**Розв'язання.** Фізична інтерпретація: знайти закон зміни температури в однорідному стрижні одиничної довжини з теплоізолюваною бічною поверхнею, правий кінець якого підтримується при нульовій температурі, а на лівому заданий змінний тепловий потік, якщо всередині стрижня діють джерела тепла сумарної інтенсивності

$$f(t, x) = c\rho \left[ A(x-1)\cos t + B e^{-t} \cos \frac{7\pi}{2} x \right], \text{ а початкова температура стрижня рівна}$$

$$\varphi(x) = A \cos \frac{3\pi}{2} x.$$

Маємо задачу з неоднорідними крайовими умовами, залежними від часу (загальна мішана задача). Для застосування методу відокремлення змінних необхідно спершу звести задачу (3.1)-(3.2)-(3.3) до задачі з однорідними крайовими умовами підстановкою

$$U(t, x) = V(t, x) + \omega(t, x), \quad (3.4)$$

де  $V(t, x)$  – нова невідома функція, а допоміжна функція  $\omega(t, x)$  повинна справджувати крайові умови (3.3), тобто

$$\omega_x(t, 0) = A \sin t, \quad \omega(t, 1) = 0, \quad t \geq 0. \quad (3.5)$$

Згідно з правилами знаходження допоміжної функції  $\omega(t, x)$  шукаємо у вигляді  $\omega(t, x) = a(t)x + b(t)$ . Коефіцієнти знаходяться безпосередньою підстановкою у (3.5):

$$\omega_x(t, 0) \equiv a(t) = A \sin t, \quad \omega(t, 1) \equiv a(t) + b(t) = 0, \quad t \geq 0,$$

звідки

$$a(t) = A \sin t, \quad b(t) = -A \sin t,$$

тобто

$$\omega(t, x) = A(x-1)\sin t.$$

Тоді підстановка (3.4) запишеться у вигляді

$$U(t, x) = V(t, x) + A(x-1)\sin t. \quad (3.6)$$

Введемо підстановку (3.6) у рівняння (3.1), початкову умову (3.2) та крайові умови (3.3). Маємо:

$$V_t + A(x-1)\cos t = a^2 V_{xx} + A(x-1)\cos t + B e^{-t} \cos \frac{7\pi}{2} x,$$

$$V(0, x) = A \cos \frac{3\pi}{2} x,$$

$$V_x(t, 0) + A \sin t = A \sin t, \quad V(t, 1) = 0.$$

Після спрощення останніх рівностей отримаємо мішану задачу для визначення нової невідомої функції  $V(t, x)$ :

$$\begin{aligned}
V_t &= a^2 V_{xx} + B e^{-t} \cos \frac{7\pi}{2} x, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1, \\
V(0, x) &= A \cos \frac{3\pi}{2} x, \quad 0 \leq x \leq 1, \\
V_x(t, 0) &= 0, \quad V(t, 1) = 0, \quad t \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Одержана мішана задача (3.7) є задачею з однорідними крайовими умовами для неоднорідного рівняння теплопровідності. Вільний член у рівнянні та початкова функція справджують крайові умови, отже, до задачі (3.7) застосовний метод відокремлення змінних (метод Фур'є). Згідно з алгоритмом цього методу, проілюстрованому в Прикладі 2, розв'язок шукаємо у вигляді

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x), \tag{3.8}$$

де  $X_n(x)$  – власні функції задачі Штурма-Ліувілля для відповідної однорідної задачі

$$\begin{aligned}
Z_t &= a^2 Z_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1, \\
Z(0, x) &= 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \\
Z_x(t, 0) &= 0, \quad Z(t, 1) = 0, \quad t \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Шукаючи  $Z(t, x)$  у вигляді добутку двох функцій

$$Z(t, x) = Q(t) \cdot X(x) \neq 0,$$

аналогічно до попередніх прикладів для визначення  $X(x)$  отримуємо задачу Штурма-Ліувілля для рівняння (1.6) із крайовими умовами

$$X'(0) = 0, \quad X(1) = 0. \tag{3.10}$$

Дослідимо задачу Штурма-Ліувілля (1.6)-(3.10) за вже відомою з попередніх прикладів схемою.

**1.** Нехай  $\lambda > 0$ . Тоді загальний розв'язок рівняння (1.6) запишеться у вигляді  $X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$ . Підставивши цей розв'язок у крайові умови (3.10), одержимо:

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda}(C_1 - C_2) = 0; \\ C_1 e^{\sqrt{\lambda}} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}} = 0. \end{cases}$$

Детермінант цієї системи  $\Delta = 2\sqrt{\lambda} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda} \neq 0$ , оскільки  $\lambda > 0$ . Отже,  $C_1 = C_2 = 0$ , а тому  $X(x) \equiv 0$  і у випадку  $\lambda > 0$  власних значень не існує.

**2.** Нехай  $\lambda = 0$ . Тоді  $X(x) = C_3 x + C_4$  і з крайових умов (3.10) одержимо:

$$\begin{cases} C_3 = 0; \\ C_3 + C_4 = 0, \end{cases}$$

звідки  $C_3 = C_4 = 0$ , а тому  $X(x) \equiv 0$  і  $\lambda = 0$  не є власним значенням.

**3.** При  $\lambda < 0$  загальний розв'язок рівняння (1.6) запишеться у вигляді  $X(x) = C_5 \cos \sqrt{-\lambda}x + C_6 \sin \sqrt{-\lambda}x$ . Із крайових умов (3.10) одержимо:

$$\begin{cases} \sqrt{-\lambda}C_6 = 0; \\ C_5 \cos \sqrt{-\lambda} + C_6 \sin \sqrt{-\lambda} = 0, \end{cases}$$

звідки  $C_6 = 0$  і  $C_5 \cos \sqrt{-\lambda} = 0$ . Отже, нетривіальний розв'язок задачі (1.6)-(3.10) існує тільки для тих значень параметра  $\lambda$ , які є розв'язками тригонометричного рівняння  $\cos \sqrt{-\lambda} = 0$ , звідки  $\lambda_n = -\left[\frac{\pi(2n-1)}{2}\right]^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Тоді відповідні власні функції матимуть вигляд (беремо для визначеності  $C_5 = 1$ )

$$X_n(x) = \cos \frac{\pi(2n-1)}{2} x, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.11)$$

З урахуванням знайдених власних функцій (3.11) ряд (3.8) для шуканого розв'язку мішаної задачі (3.7) запишеться у вигляді

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cos \frac{\pi(2n-1)}{2} x. \quad (3.12)$$

Функція (3.12) очевидно справджує крайові умови задачі (3.7). Залишилося визначити коефіцієнти  $T_n(t)$  таким чином, щоб ряд (3.12) справджував неоднорідне рівняння та початкову умову задачі (3.7).

Підставивши (3.12) у рівняння задачі (3.7), одержимо

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t) \cos \frac{\pi(2n-1)}{2} x = -a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\pi(2n-1)}{2} \right]^2 T_n(t) \cos \frac{\pi(2n-1)}{2} x + B e^{-t} \cos \frac{7\pi}{2} x,$$

або

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ T_n'(t) + \left[ \frac{a\pi(2n-1)}{2} \right]^2 T_n(t) \right\} \cos \frac{\pi(2n-1)}{2} x = B e^{-t} \cos \frac{7\pi}{2} x.$$

Бачимо, що права частина містить власну функцію (3.11), що відповідає значенню  $n = 4$  (маємо резонансний випадок). Тому остання рівність можлива тоді й тільки тоді, коли

$$T_4'(t) + \left[ \frac{7a\pi}{2} \right]^2 T_4(t) = B e^{-t}; \quad T_n'(t) + \left[ \frac{a\pi(2n-1)}{2} \right]^2 T_n(t) = 0, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{4\}.$$

Підставляючи (3.12) у початкові умови задачі (3.7), маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \cos \frac{\pi(2n-1)}{2} x = A \cos \frac{3\pi}{2} x,$$

звідки з аналогічних міркувань випливають початкові умови

$$T_2(t) = A; \quad T_n(t) = 0, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{2\}.$$

Отже, для знаходження коефіцієнтів ряду (3.12) отримуємо три задачі Коші:

$$T_4'(t) + \left[ \frac{7a\pi}{2} \right]^2 T_4(t) = B e^{-t}, \quad T_4(0) = 0; \quad (3.13)$$

$$T_2'(t) + \left[ \frac{3a\pi}{2} \right]^2 T_2(t) = 0, \quad T_2(0) = A; \quad (3.14)$$

$$T_n'(t) + \left[ \frac{a\pi(2n-1)}{2} \right]^2 T_n(t) = 0, \quad T_n(t) = 0, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{2; 4\}. \quad (3.15)$$

Розв'язок задачі Коші (3.13) будемо методом, вказаним у Прикладі 2 щодо задачі (2.15)-(2.16):

$$T_4(t) = e^{-\int \left(\frac{7a\pi}{2}\right)^2 dt} \cdot \left[ A_4 + \int B e^{-t} \cdot e^{\int \left(\frac{7a\pi}{2}\right)^2 dt} dt \right] = A_4 e^{-\left(\frac{7a\pi}{2}\right)^2 t} + \frac{B e^{-t}}{(3,5a\pi)^2 - 1};$$

$$T_4(0) = 0 \Rightarrow A_4 = -\frac{B}{(3,5a\pi)^2 - 1},$$

тобто

$$T_4(t) = \frac{B \left[ e^{-t} - e^{-(3,5a\pi)^2 t} \right]}{(3,5a\pi)^2 - 1}.$$

Однорідні рівняння задач (3.14) і (3.15) інтегруються простим відокремленням змінних. Із (3.14) маємо:

$$T_2(t) = A_2 e^{-\left(\frac{3a\pi}{2}\right)^2 t}; \quad T_2(0) = A \Rightarrow A_2 = A,$$

тобто

$$T_2(t) = A e^{-(1,5a\pi)^2 t}.$$

Із (3.15), враховуючи однорідність початкової умови, очевидно отримуємо

$$T_n(t) \equiv 0, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{2; 4\}.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти у ряд (3.12), одержимо розв'язок мішаної задачі (3.7) у вигляді суми двох доданків (оскільки всі коефіцієнти, крім двох, рівні нулю):

$$V(t, x) = T_2(t) \cos \frac{3\pi}{2} x + T_4(t) \cos \frac{7\pi}{2} x = A e^{-(1,5a\pi)^2 t} \cos \frac{3\pi}{2} x + \frac{B \left[ e^{-t} - e^{-(3,5a\pi)^2 t} \right]}{(3,5a\pi)^2 - 1} \cos \frac{7\pi}{2} x.$$

Тоді шуканий розв'язок задачі (3.1)-(3.2)-(3.3) визначається підстановкою знайденого розв'язку  $V(t, x)$  задачі (3.7) у формулу (3.6).

**Відповідь.**  $U(t, x) = A e^{-(1,5a\pi)^2 t} \cos \frac{3\pi}{2} x + \frac{B \left[ e^{-t} - e^{-(3,5a\pi)^2 t} \right]}{(3,5a\pi)^2 - 1} \cos \frac{7\pi}{2} x + A(x-1) \sin t.$

**Приклад 4.** Дати фізичну інтерпретацію поставленої мішаної задачі та знайти її розв'язок:

$$U_t = 4U_{xx} + 2, \quad t > 0, \quad 0 < x < 2, \quad (4.1)$$

$$U(0, x) = x, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad (4.2)$$

$$U(t, 0) = 0, \quad U_x(t, 2) = 1, \quad t \geq 0. \quad (4.3)$$

**Розв'язання.** Фізична інтерпретація: знайти розподіл температури в однорідному ( $a = 2$ ) стрижні довжини  $l = 2$  із теплоізолюваною бічною поверхнею, лівий кінець якого підтримується при нульовій температурі, а на правому заданий сталий тепловий потік, якщо всередині стрижня діють джерела тепла сталої інтенсивності, а початкова температура стрижня описується функцією  $\varphi(x) = x$ .

Вільний член у рівнянні (4.1) і крайові умови (4.3) не залежать явно від змінної часу, тому маємо задачу зі стаціонарними неоднорідностями. Для застосування методу відокремлення змінних необхідно спершу звести задачу (4.1)-(4.2)-(4.3) до однорідної підстановкою

$$U(t, x) = V(t, x) + \omega(x), \quad (4.4)$$

де  $V(t, x)$  – нова невідома функція, а допоміжна функція (стаціонарна температура)  $\omega(x)$  має справджувати рівняння (4.1) та крайові умови (4.3), тобто має бути розв'язком наступної крайової задачі (отримується шляхом безпосередньої підстановки):

$$\begin{aligned} 4\omega''(x) + 2 &= 0, \\ \omega(0) &= 0, \quad \omega'(2) = 1. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Зінтегруємо крайову задачу (4.5). Із рівняння маємо

$$\omega'' = -\frac{1}{2} \Rightarrow \omega' = -\frac{x}{2} + C_1 \Rightarrow \omega = -\frac{x^2}{4} + C_1x + C_2.$$

З урахуванням крайових умов

$$\begin{aligned} \omega(0) = 0 &\Rightarrow C_2 = 0, \\ \omega'(2) = 1 &\Rightarrow C_1 = 2. \end{aligned}$$

Отже, крайова задача (4.5) має єдиний розв'язок, тобто існує стаціонарна температура

$$\omega(x) = -\frac{x^2}{4} + 2x,$$

а тому підстановка (4.4) запишеться у вигляді

$$U(t, x) = V(t, x) - 0,25x^2 + 2x. \quad (4.6)$$

Введемо підстановку (4.6) у рівняння (4.1), початкову умову (4.2) та крайові умови (4.3). Маємо:

$$\begin{aligned} V_t &= 4[V_{xx} - 0,5] + 2, \\ V(0, x) - 0,25x^2 + 2x &= x, \\ V(t, 0) = 0, \quad V_x(t, 2) - 1 + 2 &= 1. \end{aligned}$$

Після спрощення останніх рівностей отримаємо мішану задачу для визначення нової невідомої функції  $V(t, x)$ :

$$\begin{aligned} V_t &= 4V_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 2, \\ V(0, x) &= 0,25x^2 - x, \quad 0 \leq x \leq 2, \\ V(t, 0) &= 0, \quad V_x(t, 2) = 0, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Маємо задачу з однорідними крайовими умовами для однорідного рівняння теплопровідності, подібну до розв'язаної у Прикладі 1. Початкові та крайові умови є узгодженими, отже, до задачі (4.7) застосовний метод відокремлення змінних (метод Фур'є), згідно з яким розв'язок шукаємо у вигляді добутку двох функцій

$$V(t, x) = T(t) \cdot X(x) \neq 0. \quad (4.8)$$

Підставивши (4.8) у рівняння і крайові умови задачі (4.7) і відокремивши змінні аналогічно до Прикладу 1, для визначення  $T(t)$  дістанемо рівняння

$$T'(t) - 4\lambda T(t) = 0, \quad T(t) \neq 0, \quad (4.9)$$

а для визначення  $X(x)$  – задачу Штурма-Ліувілля для рівняння (1.6) із крайовими умовами

$$X(0) = 0, \quad X'(2) = 0. \quad (4.10)$$

Дослідимо задачу Штурма-Ліувілля (1.6)-(4.10). Для цього, як і в попередніх прикладах, слід розглянути три випадки.

1. Нехай  $\lambda > 0$ . Тоді загальний розв'язок рівняння (1.6) запишеться у вигляді

$X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$ . Підставивши цей розв'язок у крайові умови (4.10), одержимо

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0; \\ \sqrt{\lambda}(C_1 e^{2\sqrt{\lambda}} - C_2 e^{-2\sqrt{\lambda}}) = 0. \end{cases}$$

Детермінант цієї системи  $\Delta = -2\sqrt{\lambda} \operatorname{ch} 2\sqrt{\lambda} \neq 0$ , оскільки  $\lambda > 0$ . Отже,  $C_1 = C_2 = 0$ , а тому  $X(x) \equiv 0$  і у випадку  $\lambda > 0$  власних значень не існує.

2. Нехай  $\lambda = 0$ . Тоді  $X(x) = C_3 x + C_4$  і з крайових умов (4.10) одержимо:

$$\begin{cases} C_4 = 0; \\ C_3 = 0, \end{cases}$$

звідки  $X(x) \equiv 0$ , а тому  $\lambda = 0$  не є власним значенням.

3. При  $\lambda < 0$  загальний розв'язок рівняння (1.6) запишеться у вигляді

$X(x) = C_5 \cos \sqrt{-\lambda}x + C_6 \sin \sqrt{-\lambda}x$ . Із крайових умов (4.10) одержимо:

$$\begin{cases} C_5 = 0; \\ \sqrt{-\lambda}(C_6 \cos 2\sqrt{-\lambda} - C_5 \sin 2\sqrt{-\lambda}) = 0, \end{cases}$$

звідки  $C_5 = 0$  і  $\sqrt{-\lambda}C_6 \cos 2\sqrt{-\lambda} = 0$ . Отже, нетривіальний розв'язок задачі (1.6)-(4.10)

існує тільки для тих значень параметра  $\lambda$ , які є розв'язками тригонометричного

рівняння  $\cos 2\sqrt{-\lambda} = 0$ , звідки  $\lambda_n = -\left[\frac{\pi(2n-1)}{4}\right]^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Тоді відповідні власні

функції матимуть вигляд (беремо для визначеності  $C_6 = 1$ )

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi(2n-1)}{4}x, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.11)$$

Підставивши знайдені власні значення у (4.9), отримаємо рівняння для визначення функцій  $T(t)$

$$T'_n(t) + \left[\frac{\pi(2n-1)}{2}\right]^2 T_n(t) = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

загальний розв'язок якого має вигляд

$$T_n(t) = A_n e^{-[0,5\pi(2n-1)]^2 t}, \quad n \in \mathbb{N},$$

де  $A_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  – довільні сталі.

Повторюючи міркування, викладені в Прикладі 1, отримуємо ряд для розв'язку мішаної задачі (4.7):

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-[0,5\pi(2n-1)]^2 t} \cdot \sin \frac{\pi(2n-1)}{4}x. \quad (4.12)$$

Шляхом безпосередньої підстановки визначимо коефіцієнти ряду (4.12) таким чином, щоб він справджував початкову умову задачі (4.7):

$$V(0, x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi(2n-1)}{4}x = \frac{x^2}{4} - x. \quad (4.13)$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів  $A_n$  із рівності (4.13) розкладемо праву частину в ряд Фур'є по системі власних функцій (4.11) на проміжку  $x \in [0;2]$ :

$$\frac{x^2}{4} - x = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi(2n-1)}{4} x, \quad (4.14)$$

де коефіцієнти Фур'є обчислюються за формулою

$$\varphi_n = \int_0^2 \left( \frac{\xi^2}{4} - \xi \right) \sin \frac{\pi(2n-1)}{4} \xi d\xi = -\frac{32}{(2n-1)^3 \pi^3}.$$

Порівнюючи ряди (4.13) і (4.14), маємо

$$A_n = \varphi_n = -\frac{32}{(2n-1)^3 \pi^3}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти у ряд (4.12), одержимо розв'язок мішаної задачі (4.7). Тоді шуканий розв'язок задачі (4.1)-(4.2)-(4.3) визначається підстановкою знайденого розв'язку  $V(t, x)$  задачі (4.7) у формулу (4.6).

**Відповідь.** 
$$U(t, x) = 2x - \frac{x^2}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{32 e^{-[0,5\pi(2n-1)]^2 t}}{[\pi(2n-1)]^3} \cdot \sin \frac{\pi(2n-1)}{4} x.$$

### Джерела:

Перестюк М. О., Маринець В. В. Теорія рівнянь математичної фізики. – К.: Либідь, 2001. – С. 159-174.

Перестюк М. О., Маринець В. В., Рего В. Л. Збірник задач з математичної фізики. – Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2012. – С. 105-119.

Цикл лекцій по темах розділу «Метод відокремлення змінних для рівнянь параболічного типу».