Курс: «Рівняння в частинних похідних та їх застосування» **ст. викл. Рего В. Л.**
До Модуля 3
Індивідуальні завдання №3 до розділу:

РІВНЯННЯ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ

Варіант 1

1. Дано тонкий однорідний ($k = 1$) стрижень довжини l, початкова температура якого задана функцією $\varphi(x) = x^2 - lx - 1$. На обох кінцях стрижня та через бічну поверхню проходить теплообмін (з однаковим коефіцієнтом $\alpha = l$) із навколишнім середовищем, температура якого рівна нулеві. Визначити температуру стрижня в довільний момент часу $t > 0$.

2. Зінтегрувати мішані задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

а) $U_t = a^2 U_{xx}, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 1;$
$U(0,x) = 0{,}5 U_0 x^2, \quad 0 \le x \le 1;$
$U_x(t,0) = 0, \quad U_x(t,1) = U_0, \quad 0 \le t < T \quad (U_0 = const).$

б) $U_t = a^2 U_{xx}, \quad 0 < t < T, \quad x > 0;$
$U(0,x) = A, \quad x \ge 0;$
$U(t,0) = A e^{-t}, \quad 0 \le t < T \quad (A = const).$

Варіант 2

1. Дано тонкий однорідний стрижень довжини l із теплоізольованою бічною поверхнею, початкова температура якого рівна нулеві. На правому кінці стрижня підтримується нульова температура, а на лівому кінці температура зростає пропорційно до часу: $U(t,0) = At$, де $A = const$. Визначити температуру стрижня в довільний момент часу $t > 0$.

2. Зінтегрувати мішані задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

а) $U_t = a^2 U_{xx}, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 2;$
$U(0,x) = 2x, \quad 0 \le x \le 2;$
$U(t,0) = 0, \quad U_x(t,2) + 2U(t,2) = 10, \quad 0 \le t < T.$

б) $U_t = U_{xx} - U, \quad 0 < t < T, \quad x > 0;$
$U(0,x) = A, \quad x \ge 0;$
$U_x(t,0) = 0, \quad 0 \le t < T \quad (A = const).$

Варіант 3

1. Знайти закон зміни температури в однорідному ізотропному стрижні довжини l при вільному теплообміні, якщо початкова температура точок стрижня задана рівністю:

$U(0,x)=U_0 x^2 l^{-2}$, де $U_0 = const$; бічна поверхня стрижня та його лівий кінець теплоізольовані, а на правому кінці підтримується стала температура U_0.

2. Зінтегрувати мішані задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

а) $U_t = a^2 U_{xx} - 2xt(l-x), \quad 0<t<T, \quad 0<x<l;$

$U(0,x) = 3\sin\frac{7\pi}{l}x, \quad 0 \le x \le l;$

$U(t,0)=0, \quad U(t,l)=0, \quad 0\le t<T.$

б) $U_t = \frac{1}{16}U_{xx} - 2U + A\mathrm{e}^{-2t}, \quad 0<t<T, \quad x>0;$

$U(0,x)=\mathrm{e}^{-8x^2}, \quad x\ge 0;$

$U_x(t,0)=0, \quad 0\le t<T \quad (A=const).$

Варіант 4

1. В однорідному ізотропному стрижні довжини l обидва кінці та бічна поверхня теплоізольовані, а початкова температура стрижня стала й рівна U_0. Теплообмін вільний. Знайти розподіл температури в стрижні при $t>0$.

2. Зінтегрувати мішані задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

а) $U_t = U_{xx} - U + x + tx^2, \quad 0<t<T, \quad 0<x<1;$

$U(0,x)=0, \quad 0\le x\le 1;$

$U(t,0)=0, \quad U(t,1)=t, \quad 0\le t<T.$

б) $U_t = a^2 U_{xx}, \quad 0<t<T, \quad x>0;$

$U(0,x)=0, \quad x\ge 0;$

$U_x(t,0)=A\sin t, \quad 0\le t<T \quad (A=const).$

Варіант 5

1. Знайти закон зміни температури в однорідному ізотропному стрижні довжини l при вільному теплообміні, якщо початкова температура точок стрижня рівна $x(x-l)^2$, бічна поверхня стрижня та його правий кінець теплоізольовані, а на лівому кінці підтримується нульова температура.

2. Зінтегрувати мішані задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

а) $U_t = U_{xx} - U + 4x^3 - 6x^2, \quad 0<t<T, \quad 0<x<1;$

$U(0,x)=3, \quad 0\le x\le 1;$

$U_x(t,0)=0, \quad U_x(t,1)=0, \quad 0\le t<T.$

б) $U_t = a^2 U_{xx}, \quad 0<t<T, \quad x>0;$

$U(0,x)=0, \quad x\ge 0;$

$U(t,0)=A\sin t, \quad 0\le t<T \quad (A=const).$

Варіант 6

1. Дано тонкий однорідний стрижень довжини l, початкова температура якого рівна $U_0 + xl^{-1}(U_1 - U_0)$, де $U_0, U_1 - const$. На лівому кінці стрижня температура змінюється згідно з законом $U_0\,\mathrm{e}^{-t}$, а на правому – по закону $U_1\,\mathrm{e}^{-t}$. Через бічну поверхню стрижня проходить теплообмін – із коефіцієнтом $\alpha > 0$ таким, що $b = \alpha\omega(c\rho\sigma)^{-1} = 1$, – із довкіллям нульової температури. Визначити температуру стрижня в довільний момент часу $t > 0$.

2. Зінтегрувати мішані задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

а) $U_t = a^2 U_{xx} - 6, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 3;$
$U(0,x) = 3x^2(3-x)^2, \quad 0 \le x \le 3;$
$U_x(t,0) = 0, \quad U_x(t,3) = 0, \quad 0 \le t < T.$

б) $U_t = a^2 U_{xx} + f(t,x), \quad 0 < t < T, \quad x > 0;$
$U(0,x) = 0, \quad x \ge 0;$
$U_x(t,0) = 0, \quad 0 \le t < T$
[розглянути випадок $f(t,x) \equiv U_0 = const$].

Варіант 7

1. Дано тонкий однорідний ($k = c\rho = 1$) стрижень довжини l із теплоізольованою бічною поверхнею, початкова температура якого рівна Axl^{-1}, де $A = const$. На правому кінці стрижня температура змінюється згідно з законом $A\mathrm{e}^{-t}$, а лівий кінець підтримується при нульовій температурі. Інтенсивність внутрішніх джерел тепла всередині стрижня рівна $f(t,x) = -A\mathrm{e}^{-t}\,x^2 l^{-2}$. Знайти розподіл температури уздовж стрижня при $t > 0$.

2. Зінтегрувати вказані задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

а) $U_t = U_{xx} - U - \cos\frac{5\pi}{2l}x, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l;$
$U(0,x) = x^2 - l^2, \quad 0 \le x \le l;$
$U_x(t,0) = 0, \quad U(t,l) = 0, \quad 0 \le t < T.$

б) $U_t = a^2 U_{xx} + 2a\cos t, \quad 0 < t < T, \quad x \in \mathrm{R};$
$U(0,x) = 0, \quad x \in \mathrm{R}.$

Варіант 8

1. Дано тонкий однорідний стрижень довжини l, початкова температура якого рівна $U_0(lx+1)(l^2+1)^{-1}$, де $U_0 = const$. На правому кінці стрижня температура змінюється згідно з законом $U_0\,\mathrm{e}^{-lt}$, а на лівому кінці стрижня та через бічну поверхню проходить теплообмін – із коефіцієнтом $\alpha > 0$ таким, що $b = \alpha\omega(c\rho\sigma)^{-1} = l$, – з навколишнім середовищем, температура якого рівна нулеві. Визначити температуру стрижня в довільний момент часу $t > 0$.

2. Зінтегрувати вказані задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

а) $U_t = a^2 U_{xx} + 0{,}5(2 - x)(\omega\cos\omega t - x\sin\omega t), \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 2;$
$U(0,x) = \sin\pi x, \quad 0 \le x \le 2;$
$U(t,0) = \sin\omega t, \quad U(t,2) = 0, \quad 0 \le t < T \quad (\omega = const).$

б) $U_t = a^2 U_{xx} + Q, \quad 0 < t < T, \quad x \in \mathrm{R};$
$U(0,x) = a\,\mathrm{e}^{-x^2}, \quad x \in \mathrm{R} \quad (Q = const).$

Джерело: *Перестюк М. О., Маринець В. В., Рего В. Л.* Збірник задач з математичної фізики. – Кам’янець-Подільський: Аксіома, 2012. – 245 с.