Цикл лекцій №1 по темах розділу:

МЕТОД ВІДОКРЕМЛЕННЯ ЗМІННИХ ДЛЯ РІВНЯНЬ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ

1. Фізичні процеси, що описуються рівняннями параболічного типу

Процеси поширення тепла, а також дифузії частинок у різних середовищах описуються ДРЧП другого порядку вигляду

$$\rho\frac{\partial U}{\partial t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(p\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)-qU+F(t,\boldsymbol{x}),\qquad(1.1)$$

де невідома функція $U(t,\boldsymbol{x})$ залежить від n ($n=1,2,3$) просторових координат $\boldsymbol{x}=(x_1,...,x_n)$ і часу t; коефіцієнти ρ, p і q визначаються властивостями середовища, де відбувається відповідний процес; вільний член $F(t,\boldsymbol{x})$ виражає інтенсивність джерел тепла або дифундуючої речовини. Зауважимо, що ДРЧП (1.1) є рівнянням параболічного типу. Розглянемо деякі частинні випадки рівняння (1.1).

Рівняння вигляду

$$c\rho\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial U}{\partial x}\right)+F(t,x)\qquad(1.2)$$

називається ***рівнянням поширення тепла в неоднорідному стрижні з теплоізольованою бічною поверхнею***. У рівнянні (1.2) шукана функція $U(t,x)$ характеризує температуру стрижня в точці x у момент часу t, тобто $U=U(t,x)$ є ***законом розподілу температури*** в стрижні; $c(x)$ – питома теплоємність, $\rho(x)$ – густина, $k(x)$ – коефіцієнт внутрішньої теплопровідності стрижня в точці з абсцисою x; $F(t,x)$ позначає інтенсивність джерел тепла, що діють у точці x у момент часу t. Якщо стрижень однорідний, тобто $c(x)$, $\rho(x)$ і $k(x)$ є сталими в кожній його точці, то рівняння поширення тепла набуває вигляду

$$\frac{\partial U}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+f(t,x),\qquad(1.3)$$

де $f(t,x)=\dfrac{F}{c\rho}$; $a^2=\dfrac{k}{c\rho}$ – додатна стала. ДРЧП (1.3) називають також ***одновимірним рівнянням теплопровідності***.

Якщо через бічну поверхню стрижня проходить теплообмін із довкіллям температури $\theta(t,x)$, то в цьому випадку процес поширення тепла описується ДРЧП

$$\frac{\partial U}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-b[U-\theta(t,x)]+f(t,x),\qquad(1.4)$$

де $b = \dfrac{\alpha\omega}{c\rho\sigma}$ – додатна стала (α – коефіцієнт зовнішньої теплопровідності; ω – периметр і σ – площа поперечного перерізу стрижня в точці x). Зауважимо, що рівняння (1.4) можна звести до вигляду (1.3) підстановкою

$$U(t,x) = \mathrm{e}^{-bt} \cdot V(t,x),$$

де $V(t,x)$ нова невідома функція.

Із фізичних міркувань випливає, що для однозначного опису процесу поширення тепла у стрижні необхідно додатково задати величину температури U в початковий момент часу (***початкову температуру***), і теплові режими на кінцях (***крайові умови***).

Аналогічний до (1.2) вигляд має ***рівняння поширення тепла в неоднорідній пластинці***

$$c\rho \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial U}{\partial y}\right) + F(t,x,y). \tag{1.5}$$

Якщо c, ρ і k є сталими, то з (1.5) отримуємо рівняння поширення тепла в однорідній пластинці

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) + f(t,x,y), \quad f = \frac{F}{c\rho}, \quad a^2 = \frac{k}{c\rho}, \tag{1.6}$$

яке називають також ***двовимірним рівнянням теплопровідності***.

Тривимірне рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) + f(t,x,y,z) \tag{1.7}$$

описує процеси поширення тепла, а також дифузії частинок в однорідному середовищі тривимірного простору. Зауважимо, що у випадку рівняння дифузії коефіцієнти рівняння (1.7) мають інший фізичний зміст, зокрема

$$f = \frac{F}{c}, \quad a^2 = \frac{d}{c},$$

де c – коефіцієнт пористості середовища, d – коефіцієнт дифузії, $F(t,x,y,z)$ позначає інтенсивність джерел дифундуючої речовини, що діють у точці (x,y,z) у момент часу t, а $U(t,x,y,z)$ – концентрацію частинок дифундуючої речовини в точці (x,y,z) простору в момент часу t.

Рівняння теплопровідності типу (1.3), (1.6), (1.7) загалом записують єдиною формулою для n-вимірного простору

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \Delta U + f(t,\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_n),$$

де $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2} + \ldots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n}$ – ***оператор Лапласа***.

2. Постановка мішаних задач для одновимірного рівняння теплопровідності

Розглянемо задачу: знайти закон розподілу температури в однорідному ($c\rho = 1$) скінченому стрижні довжини l із теплоізольованою бічною поверхнею, якщо всередині стрижня діють джерела тепла сумарної інтенсивності $f(t,x)$, початкова температура стрижня задана функцією $\varphi(x)$, а на його кінцях (у точках з абсцисами $x = 0$ та $x = l$)

1) задані закони зміни температури $\mu_1(t)$ та $\mu_2(t)$ відповідно;

2) задані теплові потоки $\nu_1(t)$ та $\nu_2(t)$ відповідно, які поступають у стрижень через поперечні перерізи σ;

3) відбувається теплообмін із довкіллям температури $\gamma(t)$ з коефіцієнтом зовнішньої теплопровідності $\alpha > 0$.

Зауважимо: у випадку $\mu_1(t) = \mu_2(t) \equiv 0$ кажуть, що кінці струни ***підтримуються при нульовій температурі***; якщо ж $\nu_1(t) = \nu_2(t) \equiv 0$, то кінці називають ***теплоізольованими***.

Відповідна математична модель: в області $\Omega = \{(t,x) \mid t > 0, 0 < x < l\}$ знайти розв'язок одновимірного рівняння теплопровідності

$$U_t = a^2 U_{xx} + f(t,x), \tag{2.1}$$

який задовольняє початкову умову

$$U(0,x) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{2.2}$$

та одну з відповідних пар крайових умов:

$$U(t,0) = \mu_1(t), \quad U(t,l) = \mu_2(t), \quad t \ge 0, \tag{2.3}$$

$$-k\sigma U_x(t,0) = \nu_1(t), \quad k\sigma U_x(t,l) = \nu_2(t), \quad t \ge 0, \tag{2.4}$$

де k – коефіцієнт внутрішньої теплопровідності, або

$$U_x(t,0) - h[U(t,0) - \gamma(t)] = 0, \quad U_x(t,l) + h[U(t,l) - \gamma(t)] = 0 \quad t \ge 0, \tag{2.5}$$

де $h = \alpha k^{-1}$.

Задачі (2.1)-(2.2)-(2.3), (2.1)-(2.2)-(2.4), (2.1)-(2.2)-(2.5) називаються відповідно першою, другою та третьою мішаними задачами для одновимірного рівняння теплопровідності.

Якщо початкові та крайові умови не суперечні, тобто, наприклад, у випадку крайових умов першого роду (2.3)

$$\mu_1(0) = \varphi(0), \quad \mu_2(0) = \varphi(l),$$

а за крайових умов другого роду (2.4)

$$\nu_1(0) = -k\sigma\varphi'(0), \quad \nu_2(0) = k\sigma\varphi'(l),$$

то кажуть, що початкова та крайові умови є ***узгодженими***, тобто мішана задача поставлена коректно.

Аналогічно ставляться мішані задачі для рівняння теплопровідності і у випадку довільної вимірності простору (див. [1] с. 167-169, а також [2] с. 106).

3. Метод відокремлення змінних для однорідного рівняння теплопровідності

Розглянемо задачу: знайти закон розподілу температури в однорідному скінченому стрижні довжини l із теплоізольованою бічною поверхнею, якщо початкова температура стрижня рівна $\varphi(x)$, а його кінці підтримуються при нульовій температурі.

Відповідна математична модель: в області $\Omega = \{(t,x) \mid t > 0, 0 < x < l\}$ знайти розв'язок ДРЧП

$$U_t = a^2 U_{xx}, \tag{3.1}$$

який справджує початкову умову (2.2) та крайові умови

$$U(t,0) = 0, \quad U(t,l) = 0, \quad t \geq 0. \tag{3.2}$$

Будемо вважати, що задача (3.1)-(2.2)-(3.2) поставлена коректно, тобто виконуються умови узгодженості у вигляді

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0. \tag{3.3}$$

Для побудови розв'язку мішаної задачі (3.1)-(2.2)-(3.2) застосуємо вже відомий з розділу рівнянь гіперболічного типу метод відокремлення змінних (метод Фур'є). Згідно з цим методом розв'язок шукається у вигляді добутку двох функцій

$$U(t,x) = T(t) \cdot X(x) \neq 0, \tag{3.4}$$

кожна з яких знаходиться окремо з урахуванням рівняння (3.1) та умов (2.2), (3.2). Підставивши (3.4) у рівняння (3.1), одержимо:

$$T'(t) \cdot X(x) = a^2 T(t) \cdot X''(x).$$

Відокремивши змінні шляхом ділення лівої та правої частин останньої рівності на величину $a^2 T(t) \cdot X(x) \neq 0$, маємо

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Одержана рівність виконується для всіх $(t,x) \in \Omega$ тільки тоді, коли

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda = const,$$

звідки маємо

$$T'(t) - \lambda a^2 T(t) = 0, \quad T(t) \neq 0; \tag{3.5}$$

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(x) \neq 0. \tag{3.6}$$

Підставивши (3.4) у крайові умови (3.2), одержимо

$$T(t) \cdot X(0) = 0, \quad T(t) \cdot X(l) = 0,$$

звідки, враховуючи, що $T(t) \neq 0$, маємо

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \tag{3.7}$$

Дослідимо задачу Штурма-Ліувілля (3.6)-(3.7). Для цього зауважимо, що характеристичне рівняння для ДР зі сталими коефіцієнтами (3.6)

$$k^2 - \lambda = 0$$

залежно від значення параметра λ може мати дійсні різні, кратні або комплексні корені. Тому для повного дослідження слід розглянути три випадки.

1. Нехай $\lambda > 0$. Тоді $k_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$ і загальний розв'язок рівняння (3.6) запишеться у вигляді $X(x) = C_1 \mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x}$. Підставивши цей розв'язок у крайові умови (3.7), одержимо лінійну однорідну систему відносно невідомих сталих C_1, C_2:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0; \\ C_1 \mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}l} + C_2 \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}l} = 0. \end{cases}$$

Детермінант цієї системи $\Delta = -2\,\mathrm{sh}\sqrt{\lambda}l \neq 0$, оскільки $\sqrt{\lambda}l > 0$. Отже, $C_1 = C_2 = 0$, а тому $X(x) \equiv 0$, тобто у випадку $\lambda > 0$ власних значень не існує.

2. Нехай $\lambda = 0$. Тоді $k_{1,2} = 0$, $X(x) = C_3 x + C_4$ і з крайових умов (3.7) одержимо:

$$\begin{cases} C_4 = 0; \\ C_3 l + C_4 = 0, \end{cases}$$

звідки $C_3 = C_4 = 0$, а тому $X(x) \equiv 0$ і $\lambda = 0$ також не є власним значенням.

3. При $\lambda < 0$ $k_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}i$ і загальний розв'язок рівняння (3.6) запишеться у вигляді $X(x) = C_5 \cos\sqrt{-\lambda}x + C_6 \sin\sqrt{-\lambda}x.$ Із крайових умов (3.7) одержимо:

$$\begin{cases} C_5 = 0; \\ C_6 \sin\sqrt{-\lambda}l + C_5 \cos\sqrt{-\lambda}l = 0, \end{cases}$$

звідки $C_5 = 0$ і $C_6 \sin\sqrt{-\lambda}l = 0.$ Отже, нетривіальний розв'язок задачі (3.6)-(3.7) існує тільки для тих значень параметра λ, які є розв'язками тригонометричного рівняння $\sin\sqrt{-\lambda}l = 0$, звідки $\lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$. Тоді відповідні власні функції матимуть вигляд (беремо для визначеності $C_6 = 1$)

$$X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l}x, \quad n \in \mathrm{N}. \tag{3.8}$$

Підставивши знайдені власні значення у (3.5), отримаємо рівняння для визначення функцій $T(t)$

$$T_n'(t) + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n(t) = 0, \quad n \in \mathrm{N}, \tag{3.9}$$

загальний розв'язок якого отримується шляхом відокремлення змінних у звичайному диференціальному рівнянні першого порядку (3.9):

$$\frac{dT_n}{dt} = -\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n \quad \Rightarrow \quad \frac{dT_n}{T_n} = -\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 dt,$$

звідки

$$T_n(t) = A_n \mathrm{e}^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}, \quad n \in \mathrm{N}, \tag{3.10}$$

де A_n – довільна стала.

Згідно з (3.4) функції

$$U_n(t,x) = A_n\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x, \quad n \in \mathrm{N},$$

є частинними розв'язками ДРЧП (3.1), що справджують крайові умови (3.2). Тоді з урахуванням лінійності й однорідності ДРЧП (3.1) та крайових умов (3.2) загальний розв'язок ДРЧП (3.1), що справджує крайові умови (3.2), запишеться у вигляді лінійної комбінації частинних розв'язків

$$U(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x. \tag{3 .11}$$

Визначимо коефіцієнти ряду (3.11) таким чином, щоб він справджував початкові умови (2.2). Підстановка (3.11) у (2.2) дає

$$U(0,x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi n}{l}x = \varphi(x). \tag{3.12}$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів із рівності (3.12) розкладемо функцію $\varphi(x)$ у ряд Фур'є (вважаючи це можливим) по системі власних функцій (3.8) на проміжку $x \in [0,l]$:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{3.13}$$

де коефіцієнти Фур'є обчислюються за формулами

$$\alpha_n = \frac{\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi}{\int_0^l \sin^2\frac{\pi n}{l}\xi d\xi} = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi.$$

Порівнюючи ряди (3.12) і (3.13), маємо

$$A_n = \alpha_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти у (3.9), одержимо розв'язок мішаної задачі (3.1)-(2.2)-(3.2) у вигляді

$$U(t,x) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi \cdot \mathrm{e}^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x. \tag{3.14}$$

Справедлива наступна теорема.

Теорема 3.1 ***(обґрунтування методу Фур'є для одновимірного рівняння теплопровідності)***. Якщо в початковій умові (2.2) функція $\varphi(x)$ на проміжку $x \in [0,l]$ неперервна, має кусково-неперервну похідну і справджує умови узгодженості (3.3), тоді ряд (3.14) збігається абсолютно й рівномірно в області $\overline{\Omega} = \{(t,x) \mid t \ge 0, 0 \le x \le l\}$, причому його можна почленно диференціювати довільну кількість разів за t і за x, і отримані ряди збігаються абсолютно й рівномірно в області Ω.

4. Метод відокремлення змінних для неоднорідного рівняння теплопровідності

Розглянемо задачу: знайти закон розподілу температури в однорідному ($c\rho = 1$) скінченому стрижні довжини l із теплоізольованою бічною поверхнею, якщо всередині стрижня діють джерела тепла сумарної інтенсивності $f(t,x)$, початкова температура стрижня задана функцією $\varphi(x)$, а його кінці підтримуються при нульовій температурі.

Відповідна математична модель: в області $\Omega = \{(t,x) \mid t > 0, 0 < x < l\}$ знайти розв'язок неоднорідного рівняння теплопровідності (2.1), який справджує початкову умову (2.2) та крайові умови (3.2).

Розв'язок мішаної задачі (2.1)-(2.2)-(3.2) будемо шукати у вигляді суми двох функцій

$$U(t,x) = Z(t,x) + V(t,x), \tag{4.1}$$

де $Z(t,x)$, $V(t,x)$ – розв'язки мішаних задач

$$\begin{aligned} &Z_t = a^2 Z_{xx}, \quad (t,x) \in \Omega, \\ &Z(0,x) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l, \\ &Z(t,0) = 0, \quad Z(t,l) = 0, \quad t \ge 0; \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} &V_t = a^2 V_{xx} + f(t,x), \quad (t,x) \in \Omega, \\ &V(0,x) = 0, \quad 0 \le x \le l, \\ &V(t,0) = 0, \quad V(t,l) = 0, \quad t \ge 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Задача (4.2) очевидно аналогічна вже розв'язаній задачі (3.1)-(2.2)-(3.2), тож її розв'язок подається формулою (3.14).

Розв'язок другої задачі (4.3) будемо шукати у вигляді

$$V(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x), \tag{4.4}$$

де $X_n(x)$ – власні функції задачі Штурма-Ліувілля для відповідної однорідної задачі (4.2). Оскільки остання задача аналогічна мішаній задачі (3.1)-(2.2)-(3.2), то можемо скористатися вже знайденими власними функціями (3.8), тобто записати ряд (4.4) як

$$V(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\frac{\pi n}{l} x. \tag{4.5}$$

Функція (4.5) очевидно справджує крайові умови задачі (4.3). Залишилося визначити коефіцієнти $T_n(t)$ таким чином, щоб ряд (4.5) справджував неоднорідне рівняння та однорідні початкові умови задачі (4.3).

Будемо вважати, що функція $f(t,x)$ допускає розклад у ряд Фур'є по системі власних функцій (3.8) на проміжку $x \in [0,l]$, тобто подається у вигляді

$$f(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\frac{\pi n}{l} x, \quad f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(t,\xi) \sin\frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi. \tag{4.6}$$

Підставивши (4.5) і (4.6) у рівняння задачі (4.3), одержимо

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t)\sin\frac{\pi n}{l}x = -a^2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 T_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

або

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n'(t) + \left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 T_n(t) - f_n(t)\right]\sin\frac{\pi n}{l}x = 0.$$

Остання рівність можлива тоді й тільки тоді, коли

$$T_n'(t) + \left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 T_n(t) = f_n(t), \quad n\in \mathrm{N}. \tag{4.7}$$

Підставляючи (4.5) у початкову умову задачі (4.3), маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\sin\frac{\pi n}{l}x = 0,$$

звідки очевидно випливає початкова умова

$$T_n(0) = 0, \quad n\in \mathrm{N}. \tag{4.8}$$

Розв'язок задачі Коші (4.7)-(4.8) знайдемо із застосуванням відомої з курсу звичайних диференціальних рівнянь формули загального розв'язку лінійного рівняння першого порядку (4.7) за врахування початкової умови (4.8). Отже, маємо

$$T_n(t) = \mathrm{e}^{-\int\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 dt}\cdot\left[A_n + \int_0^t f_n(\tau)\mathrm{e}^{\int\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 d\tau} d\tau\right] = A_n\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 t} + \int_0^t f_n(\tau)\mathrm{e}^{\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2(\tau-t)} d\tau.$$

На підставі (4.8) одержуємо $A_n = 0$, а тому розв'язок задачі Коші (4.7)-(4.8) запишеться у вигляді

$$T_n(t) = \int_0^t f_n(\tau)\mathrm{e}^{\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2(\tau-t)} d\tau, \quad n\in \mathrm{N}. \tag{4.9}$$

Тоді згідно з (4.5) розв'язком мішаної задачі (4.3) буде функція

$$V(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t f_n(\tau)\mathrm{e}^{\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2(\tau-t)} d\tau\sin\frac{\pi n}{l}x. \tag{4.10}$$

Підставивши у (4.1) замість $Z(t,x)$ вираз (3.14), а замість $V(t,x)$ вираз (4.10) за врахування (4.6), дістанемо розв'язок мішаної задачі (2.1)-(2.2)-(3.2)

$$\begin{aligned} U(t,x) = {} & \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi\cdot\mathrm{e}^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x + \\ & + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^l f(\tau,\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi\cdot\mathrm{e}^{\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2(\tau-t)} d\tau\sin\frac{\pi n}{l}x. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Можна показати, що одержаний ряд (4.11) буде розв'язком поставленої задачі (2.1)-(2.2)-(3.2), якщо початкова функція $\varphi(x)$ справджує умови Теореми 3.1, а функція

$f(t,x)$ в області Ω неперервна, має неперервні похідні за змінною x до другого порядку включно і справджує умови

$$f(t,0) = f(t,l) = 0, \quad t \geq 0 .$$

Джерела:

[1] *Перестюк М. О., Маринець В. В.* Теорія рівнянь математичної фізики. – К.: Либідь, 2001. – С. 159-174.

[2] *Перестюк М. О., Маринець В. В., Рего В. Л.* Збірник задач з математичної фізики. – Кам’янець-Подільський: Аксіома, 2012. – С. 105-119.