Курс: «Рівняння в частинних похідних та їх застосування» **ст. викл. Рего В. Л.**
До Модуля 4

ІНСТРУКЦІЇ
ДО ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ЗАВДАННЯ №4
НА ТЕМУ «РІВНЯННЯ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ»

1. Типи крайових задач для рівнянь Лапласа та Пуассона

Рівняння еліптичного типу описують стаціонарні процеси різної фізичної природи. Такі рівняння отримуються з відповідних рівнянь гіперболічного (хвильове рівняння) та параболічного (рівняння теплопровідності) у випадку, коли шукана функція не залежить від часу. Стаціонарне хвильове рівняння називається рівнянням рівноваги, а стаціонарне рівняння теплопровідності називають також рівнянням стаціонарного розподілу температури.
У курсі «Рівняння з частинними похідними та їх застосування» розглядаються крайові задачі для рівнянь Лапласа $\Delta U = 0$ та Пуассона $\Delta U = F$ у різних областях.

I. Прямокутник $D_1 = \{(x, y) | 0 < x < a,\ \ 0 < y < b\}$. Загальна постановка задачі:

$$\Delta U(x, y) = F(x, y), \quad (x, y) \in D_1;$$
$$\alpha_1 U_x(0, y) + \beta_1 U(0, y) = \gamma_1(y), \quad \alpha_2 U_x(a, y) + \beta_2 U(a, y) = \gamma_2(y), \quad 0 \le y \le b; \quad (1.1)$$
$$\alpha_3 U_y(x,0) + \beta_3 U(x,0) = \gamma_3(x), \quad \alpha_4 U_y(x,b) + \beta_4 U(x,b) = \gamma_4(x), \quad 0 \le x < a,$$

де $\Delta U(x, y) \equiv U_{xx} + U_{yy}$ – двовимірний оператор Лапласа у декартовій системі координат. Тут можна вирізнити ***три типи задач.***

1. Задача для рівняння Лапласа з однорідними крайовими умовами на двох протилежних краях:

$$F(x, y) \equiv 0;\ \gamma_1(y) = \gamma_2(y) \equiv 0 \text{ або } \gamma_3(x) = \gamma_4(x) \equiv 0.$$

Будемо вважати, що крайові умови задачі (1.1) є узгодженими,
тоді розв’язок шукається у вигляді добутку

$$U(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \ne 0. \quad (1.2)$$

Відповідна задача Штурма-Ліувілля (ЗШЛ) у випадку $\gamma_1(y) = \gamma_2(y) \equiv 0$ будується для функції $X(x)$, а у випадку $\gamma_3(x) = \gamma_4(x) \equiv 0$ для $Y(y)$. Друга функція в (1.2) визначається з однорідного рівняння та неоднорідних крайових умов.

2. Задача для рівняння Лапласа з неоднорідними крайовими умовами:

$$F(x, y) \equiv 0;\ [\gamma_1^2(y) + \gamma_2^2(y)] \cdot [\gamma_3^2(x) + \gamma_4^2(x)] \equiv 0.$$

Будемо вважати, що крайові умови задачі (1.1) є узгодженими,
тоді задача розв’язується розбиттям на дві задачі типу 1: розв’язок шукається у вигляді суми двох функцій

$$U(x,y)=U_1(x,y)+U_2(x,y), \tag{1.3}$$
де $U_1(x,y)$, $U_2(x,y)$ є розв'язками крайових задач

$$\begin{aligned}
&\Delta U_1(x,y)=0, \quad (x,y)\in D_1;\\
&\alpha_1 U_{1x}(0,y)+\beta_1 U_1(0,y)=0, \quad \alpha_2 U_{1x}(a,y)+\beta_2 U_1(a,y)=0, \quad 0\le y\le b; \qquad (1.5)\\
&\alpha_3 U_{1y}(x,0)+\beta_3 U_1(x,0)=\gamma_3(x), \quad \alpha_4 U_{1y}(x,b)+\beta_4 U_1(x,b)=\gamma_4(x), \quad 0\le x<a,\\
&\Delta U_2(x,y)=0, \quad (x,y)\in D_1;\\
&\alpha_1 U_{2x}(0,y)+\beta_1 U_2(0,y)=\gamma_1(y), \quad \alpha_2 U_{2x}(a,y)+\beta_2 U_2(a,y)=\gamma_2(y), \quad 0\le y\le b; \quad (1.6)\\
&\alpha_3 U_{2y}(x,0)+\beta_3 U_2(x,0)=0, \quad \alpha_4 U_{2y}(x,b)+\beta_4 U_2(x,b)=0, \quad 0\le x<a.
\end{aligned}$$

Розв'язки задач (1.5) і (1.6) (задач типу 1) шукаємо у вигляді (1.2):

$$U_1=X_1(x)\cdot Y_1(y)\neq 0,\ U_2=X_2(x)\cdot Y_2(y)\neq 0,$$

де $X_1(x)$ і $Y_2(y)$ – власні функції відповідних ЗШЛ, а $Y_1(y)$ і $X_2(x)$ визначаються з однорідного рівняння та неоднорідних крайових умов.

3. Задача для рівняння Пуассона:

$$F(x,y)\neq 0.$$

Загальний метод: розв'язок шукаємо у вигляді суми трьох функцій

$$U(x,y)=U_1(x,y)+U_2(x,y)+V(x,y), \tag{1.7}$$

де $U_1(x,y)$, $U_2(x,y)$ є розв'язками крайових задач (1.5) і (1.6) відповідно, а $V(x,y)$ знаходиться із крайової задачі для рівняння Пуассона з однорідними крайовими умовами

$$\begin{aligned}
&\Delta V(x,y)=F(x,y), \quad (x,y)\in D_1;\\
&\alpha_1 V_x(0,y)+\beta_1 V(0,y)=0, \quad \alpha_2 V_x(a,y)+\beta_2 V(a,y)=0, \quad 0\le y\le b; \qquad (1.8)\\
&\alpha_3 V_y(x,0)+\beta_3 V(x,0)=0, \quad \alpha_4 V_y(x,b)+\beta_4 V(x,b)=0, \quad 0\le x<a
\end{aligned}$$

за допомогою методу власних функцій (див. [**2**], стор. 47-49) у вигляді ряду

$$V(x,y)=\sum_n C_n X_{1,n}(x)\cdot Y_{2,n}(y), \tag{1.9}$$

де $X_1(x)$ і $Y_2(y)$ – власні функції ЗШЛ із задач (1.5) та (1.6) відповідно, а значення сталих C_n визначаються підстановкою ряду (1.9) у рівняння Пуассона.

Загальний метод застосовний тільки у випадку коректності постановки дочірніх задач (1.5), (1.6) та (1.8) і є доволі громіздким. Однак якщо вільний член у рівнянні Пуассона має досить простий вигляд, то на першому етапі розв'язування доцільно звести задачу типу 3 до задачі для рівняння Лапласа (типу 1 або 2) підстановкою

$$U(x,y)=Z(x,y)+\omega(x,y), \tag{1.10}$$

де $Z(x,y)$ – нова невідома функція, а $\omega(x,y)$ деякий частинний розв'язок рівняння Пуассона. Іноді $\omega(x,y)$ вдається вибрати таким чином, щоб спростити також деякі з крайових умов.

II. Внутрішність круга: $D_2=\{(\rho,\varphi)\,|\,0<\rho<R,\ 0\le\varphi<2\pi\}$. Загальна постановка задачі:

$$\Delta U(\rho,\varphi)=F(\rho,\varphi), \quad (\rho,\varphi)\in D_2;$$
$$\lim_{\rho\to 0} U(\rho,\varphi)<\infty, \quad \alpha U_\rho(R,\varphi)+\beta U(R,\varphi)=\gamma(\varphi), \quad 0\le\varphi<2\pi; \tag{1.11}$$
$$U(\rho,\varphi)=U(\rho,\varphi+2\pi), \quad 0\le\rho\le R,$$
де $\Delta U(\rho,\varphi)=U_{\rho\rho}+\rho^{-1}U_\rho+\rho^{-2}U_{\varphi\varphi}$ – оператор Лапласа в полярній системі координат. Рівність $U(\rho,\varphi)=U(\rho,\varphi+2\pi)$ виражає умову періодичності розв'язку в крузі D_2. Нерівність $\lim\limits_{\rho\to 0} U(\rho,\varphi)<\infty$ виражає умову неперервності розв'язку в центрі круга і при розв'язанні використовується як додаткова крайова умова.

III. Зовнішність круга: $D_3=\{(\rho,\varphi)\,|\,R<\rho<\infty,\ 0\le\varphi<2\pi\}$. Загальна постановка задачі:
$$\Delta U(\rho,\varphi)=F(\rho,\varphi), \quad (\rho,\varphi)\in D_3;$$
$$\lim_{\rho\to\infty} U(\rho,\varphi)<\infty, \quad \alpha U_\rho(R,\varphi)+\beta U(R,\varphi)=\gamma(\varphi), \quad 0\le\varphi<2\pi; \tag{1.12}$$
$$U(\rho,\varphi)=U(\rho,\varphi+2\pi), \quad 0\le\rho\le R,$$
де нерівність $\lim\limits_{\rho\to\infty} U(\rho,\varphi)<\infty$ виражає умову регулярності на нескінченності для двовимірного простору і при розв'язанні використовується як додаткова крайова умова.

IV. Кільце: $D_4=\{(\rho,\varphi)\,|\,R_1<\rho<R_2,\ 0\le\varphi<2\pi\}$. Загальна постановка задачі:
$$\Delta U(\rho,\varphi)=F(\rho,\varphi), \quad (\rho,\varphi)\in D_4;$$
$$\alpha_1 U_\rho(R_1,\varphi)+\beta_1 U(R_1,\varphi)=\gamma_1(\varphi), \quad \alpha_2 U_\rho(R_2,\varphi)+\beta_2 U(R_2,\varphi)=\gamma_2(\varphi), \quad 0\le\varphi<2\pi; \tag{1.13}$$
$$U(\rho,\varphi)=U(\rho,\varphi+2\pi), \quad R_1\le\rho\le R_2.$$

Для областей D_2, D_3, D_4 можна вирізнити ***два типи задач.***

1. Задача для рівняння Лапласа:
$$F(\rho,\varphi)\equiv 0.$$
Розв'язок шукається у вигляді добутку
$$U(\rho,\varphi)=X(\rho)\cdot\Phi(\varphi)\ne 0. \tag{1.14}$$
Відповідна задача Штурма-Ліувілля (ЗШЛ) у кругових областях завжди будується для функції $\Phi(\varphi)$, причому у випадку внутрішності й зовнішності круга роль крайової умови відіграє умова періодичності $\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi)$. Зауважимо, що алгоритм методу відокремлення змінних у випадку задачі Діріхле типу 1 для круга детально наводиться в [**3**], стор. 209-214, а одержана в ході розв'язання система власних функцій має вигляд
$$\Phi_n(\varphi)\in\{1,\cos n\varphi,\sin n\varphi\}, \quad n\in N. \tag{1.15}$$
Друга функція в (1.14) визначається з урахуванням крайової умови на межі круга, а також умови неперервності чи регулярності на нескінченності.

2. Задача для рівняння Пуассона:

$$F(\rho,\varphi)\neq 0\,.$$

Загальний метод: розв'язок шукаємо у вигляді ряду по системі власних функцій відповідної однорідної задачі типу 1, тобто по системі функцій (1.15):

$$U(\rho,\varphi)=X_0(\rho)+\sum_{n=1}^{\infty}[X_n(\rho)\cos n\varphi+Y_n(\rho)\sin n\varphi]\,, \tag{1.16}$$

коефіцієнти якого визначаються підстановкою ряду (1.16) у неоднорідне рівняння і крайову умову з урахуванням умови неперервності (або регулярності).
Однак якщо вільний член у рівнянні Пуассона має досить простий вигляд, то на першому етапі розв'язування доцільно звести задачу типу 2 до задачі для рівняння Лапласа (типу 1) підстановкою

$$U(\rho,\varphi)=V(\rho,\varphi)+\omega(\rho,\varphi)\,, \tag{1.17}$$

де $V(x,y)$ – нова невідома функція, а $\omega(\rho,\varphi)$ деякий частинний розв'язок рівняння Пуассона.

V. Круговий сектор: $D_5=\{(\rho,\varphi)\big|0<\rho<R,\ \ 0<\varphi<\varphi_0<2\pi\}$. Загальна постановка задачі:

$$\begin{aligned}
&\Delta U(\rho,\varphi)=F(\rho,\varphi),\quad (\rho,\varphi)\in D_5;\\
&\lim_{\rho\to 0}U(\rho,\varphi)<\infty,\quad \alpha_2U_\rho(R,\varphi)+\beta_2U(R,\varphi)=\gamma_2(\varphi),\quad 0\le\varphi\le\varphi_0;\\
&\alpha_3U_\varphi(\rho,0)+\beta_3U(\rho,0)=\gamma_3(\rho),\quad \alpha_4U_\varphi(\rho,\varphi_0)+\beta_4U(\rho,\varphi_0)=\gamma_4(\rho),\quad 0\le\rho\le R.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

VI. Кільцевий сектор (криволінійний прямокутник):
$D_6=\{(\rho,\varphi)\big|R_1<\rho<R_2,\ \ 0<\varphi<\varphi_0<2\pi\}$. Загальна постановка задачі:

$$\begin{aligned}
&\Delta U(\rho,\varphi)=F(\rho,\varphi),\quad (\rho,\varphi)\in D_6;\\
&\alpha_1U_\rho(R_1,\varphi)+\beta_1U(R_1,\varphi)=\gamma_1(\varphi),\quad \alpha_2U_\rho(R_2,\varphi)+\beta_2U(R_2,\varphi)=\gamma_2(\varphi),\quad 0\le\varphi\le\varphi_0;\\
&\alpha_3U_\varphi(\rho,0)+\beta_3U(\rho,0)=\gamma_3(\rho),\quad \alpha_4U_\varphi(\rho,\varphi_0)+\beta_4U(\rho,\varphi_0)=\gamma_4(\rho),\quad R_1\le\rho\le R_2.
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Для областей D_5, D_6 можна вирізнити ***три типи задач.***

1. Задача для рівняння Лапласа з однорідними крайовими умовами на прямолінійних краях:

$$F(\rho,\varphi)\equiv 0\,,\ \gamma_3(\rho)=\gamma_4(\rho)\equiv 0$$

Розв'язок шукається у вигляді добутку (1.14), де $\Phi(\varphi)$ – власні функції відповідної ЗШЛ, а друга функція в (1.14) визначається з урахуванням крайових умов на криволінійних краях, а також умови неперервності у випадку кругового сектора.

2. Задача для рівняння Пуассона з однорідними крайовими умовами на прямолінійних краях:

$$F(\rho,\varphi)\neq 0\,,\ \gamma_3(\rho)=\gamma_4(\rho)\equiv 0\,.$$

Загальний метод: розв'язок шукаємо у вигляді ряду

$$U(\rho,\varphi)=\sum_{n}^{\infty}X_n(\rho)\cdot\Phi_n(\varphi) \tag{1.20}$$

по системі власних функцій $\Phi_n(\varphi)$ відповідної однорідної задачі типу 1. Коефіцієнти $X_n(\rho)$ знаходимо підстановкою ряду (1.20) у неоднорідне рівняння і крайові умови на криволінійних краях із урахуванням умови неперервності у випадку кругового сектора.

3. Задача з неоднорідними крайовими умовами на прямолінійних краях:

$$\gamma_3^2(\rho)+\gamma_4^2(\rho)\neq 0\,.$$

У цьому випадку для застосування методу відокремлення змінних на першому етапі необхідно зоднорідніти крайові умови на прямолінійних краях підстановкою (1.17), причому допоміжну функцію $\omega(\rho,\varphi)$ підбираємо таким чином, щоб виконувалися крайові умови

$$\alpha_3\omega_\varphi(\rho,0)+\beta_3\omega(\rho,0)=\gamma_3(\rho),\quad \alpha_4\omega_\varphi(\rho,\varphi_0)+\beta_4\omega(\rho,\varphi_0)=\gamma_4(\rho). \tag{1.21}$$

Тоді для функції $V(t,x)$ одержимо крайову задачу типу 1 або типу 2 (з однорідними крайовими умовами на прямолінійних краях), розв'язок якої можна шукати методом Фур'є.

Зауважимо, що в полярних областях допоміжну функцію $\omega(\rho,\varphi)$ рекомендується шукати в періодичному вигляді

$$\omega(\rho,\varphi)=A(\rho)\cos\theta\varphi+B(\rho)\sin\theta\varphi, \tag{1.22}$$

де коефіцієнти $A(\rho)$, $B(\rho)$ і константа θ визначаються з крайових умов (1.21).

2. Деякі особливості інтегрування крайових задач для рівнянь еліптичного типу

Фізична інтерпретація. Оскільки ДРЧП еліптичного типу отримуються з відповідних рівнянь гіперболічного та параболічного типів, то для них можливі різні фізичні інтерпретації. Наприклад, якщо розглядати задане рівняння як рівняння рівноваги, то фізичну інтерпретацію слід починати зі слів: «Знайти положення рівноваги однорідної мембрани, яка має форму ...», після чого вказати область задання крайової задачі і дати інтерпретацію вільного члена в рівнянні та крайових умов аналогічно до рівняння коливань (див. [**1**], стор. 47-48). Якщо розглядати задане рівняння як рівняння стаціонарного розподілу температури, то фізичну інтерпретацію слід починати зі слів: «Знайти стаціонарний розподіл температури в однорідній пластинці, яка має форму ...», після чого вказати область задання крайової задачі і дати інтерпретацію вільного члена в рівнянні та крайових умов аналогічно до рівняння теплопровідності (див. [**2**], стор. 5-6).

Власні функції. При застосуванні методу відокремлення змінних для розв'язання крайових задач в областях D_1, D_5, D_6 отримуються такі ж задачі Штурма-Ліувілля, які вже траплялися в мішаних задачах для ДРЧП гіперболічного та параболічного типів, і досліджуються аналогічним чином. В областях D_2, D_3, D_4 роль крайових умов у ЗШЛ відіграє умова періодичності. Як уже згадувалося вище, повне дослідження такої ЗШЛ наводиться в теоретичному матеріалі [**3**], тому повторювати його на практиці не обов'язково: можна зразу використовувати розв'язки у вигляді (1.15). Зауважимо при цьому, що розклад у ряд Фур'є за системою функцій (1.15) має вигляд

$$f(\varphi)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos n\varphi+\beta_n\sin n\varphi),$$

де коефіцієнти Фур'є обчислюються за формулами

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)\cos n\psi d\psi,\quad n=\overline{0,\infty};\qquad \beta_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)\sin n\psi d\psi,\quad n=\overline{1,\infty}.$$

Після знаходження власних функцій [наприклад, $X(x)$] для іншої функції $Y(y)$ із (1.2) в прямокутній області D_1 отримуємо лінійне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами вигляду $Y''(y)-\delta^2Y(y)=0$, загальний розв'язок якого зручно записувати у вигляді

$$Y(y)=\begin{cases}A_n\operatorname{ch}\delta x+B_n\operatorname{sh}\delta x, & \delta\neq 0,\\ A_0y+B_0, & \delta=0.\end{cases}\tag{2.1}$$

У випадку кругових областей D_2, D_3, D_4, D_5, D_6 для другої функції $X(\rho)$ із (1.14) загалом отримуємо рівняння вигляду

$$\rho^2X''(\rho)+\rho X'(\rho)-\delta^2X(\rho)=q(\rho).\tag{2.2}$$

Це рівняння Ейлера, яке зводиться до рівняння зі сталими коефіцієнтами підстановкою незалежної змінної $\rho=\mathrm{e}^t$, $t=\ln\rho$. Тоді

$$\frac{dX}{d\rho}=\frac{dX}{dt}\cdot\frac{dt}{d\rho}=\frac{dX}{dt}\cdot\frac{1}{\rho}=\mathrm{e}^{-t}\cdot X'(t);\quad \frac{d^2X}{d\rho^2}=\frac{d[\mathrm{e}^{-t}\cdot X'(t)]}{dt}\cdot\frac{dt}{d\rho}=\mathrm{e}^{-2t}\cdot[X''(t)-X'(t)],$$

і після підстановки одержаних виразів у (2.2) маємо

$$\mathrm{e}^{2t}\cdot\mathrm{e}^{-2t}\cdot[X''(t)-X'(t)]+\mathrm{e}^{t}\cdot\mathrm{e}^{-t}\cdot X'(t)-\delta^2X(t)=q(\mathrm{e}^t),$$

або після спрощення

$$X''(t)-\delta^2X(t)=q(\mathrm{e}^t).$$

Розв'язок останнього рівняння можна знайти загальним методом варіації сталих або як суму загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (знаходиться методом Ейлера) і деякого частинного розв'язку неоднорідного рівняння (знаходиться методом невизначених коефіцієнтів).

Інтеграл Пуассона. Розв'язок внутрішньої задачі Діріхле для рівняння Лапласа в крузі радіуса R із центром у початку координат

$$\Delta U(\rho,\varphi)=0,\quad 0<\rho<R,\quad 0\le\varphi<2\pi;$$
$$U(R,\varphi)=f(\varphi),\quad 0\le\varphi<2\pi$$

дається інтегралом Пуассона

$$U(\rho,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)\frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\psi-\varphi)}d\psi.$$

Для відповідної зовнішньої задачі ($R\le\rho<+\infty$)

$$U(\rho,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\frac{\rho^2-R^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\psi-\varphi)}d\psi.$$

Вираз

$$K(\rho,\varphi,R,\psi)=\frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\psi-\varphi)}$$

називається *ядром Пуассона*.

Задача Неймана. Розглянемо задачу Неймана для рівняння Лапласа у прямокутнику D_1:

$$\begin{aligned}&\Delta U(x,y)=0,\quad 0<x<a,\quad 0<y<b;\\ &U_x(0,y)=\varphi_1(y),\quad U_x(a,y)=\varphi_2(y),\quad 0\le y\le b;\\ &U_y(x,0)=\psi_1(x),\quad U_y(x,b)=\psi_2(x),\quad 0\le x\le a.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Розв'язок задачі (2.3) існує тільки за виконання *умови стаціонарності теплового поля* у вигляді

$$\int_0^b \varphi_1(y)dy=\int_0^b \varphi_2(y)dy,\quad \int_0^a \psi_1(x)dx=\int_0^a \psi_2(x)dx.\tag{2.4}$$

При невиконанні хоча б однієї з цих умов задача розв'язку не має. Проте у випадку задачі Неймана для рівняння Пуассона іноді вдається підібрати частинний розв'язок рівняння таким чином, щоб крайові умови стали узгодженими.

Умова стаціонарності теплового поля у випадку задачі Неймана для рівняння Лапласа в кругових областях має вигляд:

а) для внутрішності ($0\le\rho\le R$) або зовнішності ($R\le\rho<+\infty$) круга

$$\begin{aligned}&\Delta U(\rho,\varphi)=0;\\ &U_\rho(R,\varphi)=f(\varphi)\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\int_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi=0;$$

б) для кругового сектора ($0\le\rho\le R$, $0\le\varphi\le\alpha<2\pi$), якщо крайові умови на прямолінійних краях однорідні, буде

$$\begin{aligned}&\Delta U(\rho,\varphi)=0;\\ &U_\rho(R,\varphi)=f(\varphi);\\ &U_\varphi(\rho,0)=U_\varphi(\rho,\alpha)=0\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\int_0^{\alpha} f(\varphi)d\varphi=0;$$

в) для кільця ($a\le\rho\le b$, $0\le\varphi<2\pi$)

$$\begin{aligned}&\Delta U(\rho,\varphi)=0;\\ &U_\rho(a,\varphi)=f_1(\varphi);\\ &U_\rho(b,\varphi)=f_2(\varphi)\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad a\int_0^{2\pi} f_1(\varphi)d\varphi=b\int_0^{2\pi} f_2(\varphi)d\varphi;$$

г) для криволінійного прямокутника чи кільцевого сектора ($a\le\rho\le b$, $0\le\varphi\le\alpha<2\pi$), якщо крайові умови на прямолінійних краях однорідні, буде

$$\begin{aligned}&\Delta U(\rho,\varphi)=0;\\&U_\rho(a,\varphi)=f_1(\varphi);\\&U_\rho(b,\varphi)=f_2(\varphi);\\&U_\varphi(\rho,0)=U_\varphi(\rho,\alpha)=0\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad a\int_0^\alpha f_1(\varphi)d\varphi=b\int_0^\alpha f_2(\varphi)d\varphi.$$

Якщо наведені вище умови виконуються, то відповідна задача Неймана буде мати розв'язок, який визначається з точністю до сталого доданка. Якщо ж рівняння неоднорідне або при $0\le\varphi\le\alpha<2\pi$ маємо неоднорідні крайові умови на прямолінійних краях, то можна спробувати звести задачу до однорідної з урахуванням умов узгодженості аналогічно до прямокутних областей.

3. Ілюстративне розв'язання варіанту індивідуального завдання

1. Визначити прогин однорідної мембрани, яка має форму кільця $1\le\rho\le 2$, $0\le\varphi<2\pi$, якщо мембрана піддається дії сили $68\cos 2\varphi$, на внутрішньому краї відхилення рівне $10\sin\varphi+1$, а зовнішній край вільний.

Розв'язання. Маємо область $D_4=\{(\rho,\varphi)|1<\rho<2,\ 0\le\varphi<2\pi\}$. Математична модель згідно з (1.13) (**[1]**, стор. 47-48):

$$\begin{aligned}&\Delta U(\rho,\varphi)=68\cos 2\varphi,\quad (\rho,\varphi)\in D_4;\\&U(1,\varphi)=10\sin\varphi+1,\quad U_\rho(2,\varphi)=0,\quad 0\le\varphi<2\pi;\\&U(\rho,\varphi)=U(\rho,\varphi+2\pi),\quad 1\le\rho\le 2.\end{aligned}\tag{3.1}$$

1 етап. Це задача для рівняння Пуассона (типу 2 для кільця). Отже, розв'язок задачі шукаємо у вигляді ряду (1.16):

$$U(\rho,\varphi)=X_0(\rho)+\sum_{n=1}^{\infty}[X_n(\rho)\cos n\varphi+Y_n(\rho)\sin n\varphi].$$

У такому вигляді функція $U(\rho,\varphi)$ вже справджує умову періодичності. Виберемо коефіцієнти ряду таким чином, щоб задовольнити рівняння і крайові умови задачі (3.1). Враховуючи, що $\Delta U(\rho,\varphi)=U_{\rho\rho}+\rho^{-1}U_\rho+\rho^{-2}U_{\varphi\varphi}$, після підстановки (1.16) у рівняння маємо:

$$X_0''(\rho)+\sum_{n=1}^{\infty}[X_n''(\rho)\cos n\varphi+Y_n''(\rho)\sin n\varphi]+\rho^{-1}\{X_0'(\rho)+\sum_{n=1}^{\infty}[X_n'(\rho)\cos n\varphi+$$

$$+Y_n'(\rho)\sin n\varphi]\}-\rho^{-2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}n^2\cdot[X_n(\rho)\cos n\varphi+Y_n(\rho)\sin n\varphi]=68\cos 2\varphi,$$

або після спрощення

$$\begin{aligned}&\rho^2X_0''(\rho)+\rho X_0'(\rho)+\sum_{n=1}^{\infty}\{[\rho^2X_n''(\rho)+\rho X_n'(\rho)-n^2X_n(\rho)]\cos n\varphi+\\&+[\rho^2Y_n''(\rho)+\rho Y_n'(\rho)-n^2Y_n(\rho)]\sin n\varphi\}=68\rho^2\cos 2\varphi.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Далі підставимо (1.16) у крайові умови задачі (3.1):

$$U(1,\varphi) \equiv X_0(1) + \sum_{n=1}^{\infty}[X_n(1)\cos n\varphi + Y_n(1)\sin n\varphi] = 10\sin\varphi + 1; \tag{3.3}$$

$$U_\rho(2,\varphi) = X_0'(2) + \sum_{n=1}^{\infty}[X_n'(2)\cos n\varphi + Y_n'(2)\sin n\varphi] = 0. \tag{3.4}$$

Функції 1, $\sin\varphi$, $\cos 2\varphi$, що фігурують у правих частинах рівностей (3.2)-(3.4), входять у систему власних функцій (1.15), отже, маємо резонансний випадок. Тому крайові задачі для коефіцієнтів ряду (1.16) можна записати без розкладів у ряди Фур'є, прирівнявши у (3.2)-(3.4) коефіцієнти при однакових власних функціях:

$$\rho^2 X_n''(\rho) + \rho X_n'(\rho) - n^2 X_n(\rho) = \begin{cases} 68\rho^2, & n = 2, \\ 0, & n \neq 2; \end{cases}$$

$$X_n(1) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0; \end{cases} \quad X_n'(2) = 0, \quad n = \overline{0,\infty}.$$

$$\rho^2 Y_n''(\rho) + \rho Y_n'(\rho) - n^2 Y_n(\rho) = 0, \quad n \in N;$$

$$Y_n(1) = \begin{cases} 10, & n = 1, \\ 0, & n \neq 1; \end{cases} \quad Y_n'(2) = 0, \quad n \in N.$$

З останніх рівностей випливає, що ненульовими будуть лише три з коефіцієнтів: $X_0(\rho)$, $X_2(\rho)$ і $Y_1(\rho)$, оскільки для всіх інших функцій і рівняння, і обидві крайові умови однорідні. Випишемо окремо крайові задачі для згаданих трьох коефіцієнтів:

$$\rho^2 X_0''(\rho) + \rho X_0'(\rho) = 0, \quad X_0(1) = 1, \quad X_0'(2) = 0; \tag{3.5}$$

$$\rho^2 X_2''(\rho) + \rho X_2'(\rho) - 4X_2(\rho) = 68\rho^2, \quad X_2(1) = X_2'(2) = 0; \tag{3.6}$$

$$\rho^2 Y_1''(\rho) + \rho Y_1'(\rho) - Y_1(\rho) = 0, \quad Y_1(1) = 10, \quad Y_1'(2) = 0. \tag{3.7}$$

2 етап. Розв'яжемо отримані задачі, починаючи з найпростішої (3.5) до найскладнішої (3.6). Рівняння (3.5) інтегрується безпосередньо після скорочення на ρ:

$$\rho X_0''(\rho) + X_0'(\rho) = 0 \quad\Rightarrow\quad [\rho X_0'(\rho)]' = 0 \quad\Rightarrow\quad \rho X_0'(\rho) = A_0 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad X_0'(\rho) = A_0\rho^{-1} \quad\Rightarrow\quad X_0(\rho) = A_0 \ln\rho + B_0.$$

Підставляємо у крайові умови задачі (3.5):

$$X_0(1) = 1 \quad\Rightarrow\quad B_0 = 1; \quad X_0'(2) \equiv 0{,}5A_0 = 0 \quad\Rightarrow\quad A_0 = 0,$$

звідки маємо $X_0(\rho) \equiv 1$.

Введемо підстановку $\rho = \mathrm{e}^t$, $t = \ln\rho$, в однорідному рівнянні Ейлера (3.7). Тоді згідно з виведеними вище формулами $Y_1'(\rho) = \mathrm{e}^{-t} \cdot Y_1'(t)$, $Y_1''(\rho) = \mathrm{e}^{-2t} \cdot [Y_1''(t) - Y_1'(t)]$ і з (3.7) отримаємо

$$\mathrm{e}^{2t} \cdot \mathrm{e}^{-2t} \cdot [Y_1''(t) - Y_1'(t)] + \mathrm{e}^t \cdot \mathrm{e}^{-t} \cdot Y_1'(t) - Y_1(t) = 0 \quad\Rightarrow\quad Y_1''(t) - Y_1(t) = 0,$$

звідки після застосування методу Ейлера дістанемо загальний розв'язок

$$Y_1(t) = A_1\mathrm{e}^t + B_1\mathrm{e}^{-t} \quad\Rightarrow\quad Y_1(\rho) = A_1\rho + B_1\rho^{-1}.$$

Згідно з крайовими умовами задачі (3.7)

$$Y_0(1)=10 \quad \Rightarrow \quad A_1+B_1=10, \quad Y_1'(2)=0 \quad \Rightarrow \quad A_1-0{,}25B_1=0.$$

Із останньої системи $A_1=2$, $B_1=8$. Отже, розв'язок крайової задачі (3.7) рівний $Y_1(\rho)=2\rho+8\rho^{-1}$.

Тією ж підстановкою $\rho=e^t$, $t=\ln\rho$ зводимо до рівняння зі сталими коефіцієнтами неоднорідне рівняння Ейлера (3.6). Аналогічно до попереднього випадку одержимо

$$X_2''(t)-4X_2(t)=68e^{2t} \tag{3.8}$$

і $X_{2з.о.}(t)=A_2e^{2t}+B_2e^{-2t}$. Правій частині рівняння (3.8) відповідає контрольне число $\gamma=2$, яке є однократним коренем характеристичного рівняння. Тому частинний розв'язок ДР (3.8) шукаємо у вигляді $X_{2ч.н.}(t)=Cte^{2t}$, тоді $X''_{2ч.н.}(t)=4C(t+1)e^{2t}$ і після підстановки у (3.8) маємо

$$4C(t+1)e^{2t}-4Cte^{2t}=68e^{2t} \quad \Rightarrow \quad C=17.$$

Тоді загальний розв'язок ДР (3.8)

$$X_2(t)=X_{2з.о.}(t)+X_{2ч.н.}(t)=A_2e^{2t}+B_2e^{-2t}+17te^{2t},$$

а ДР (3.6) відповідно

$$X_2(\rho)=A_2\rho^2+B_2\rho^{-2}+17\rho^2\ln\rho.$$

Згідно з крайовими умовами задачі (3.6)

$$X_2(1)=0 \quad \Rightarrow \quad A_2+B_2=0, \quad X_2'(2)=0 \quad \Rightarrow \quad 4A_2-0{,}25B_2+68\ln 2+34=0.$$

Із останньої системи $A_2=-16\ln 2-8$, $B_2=16\ln 2+8$. Отже, розв'язок крайової задачі (3.6) рівний $X_2(\rho)=(16\ln 2+8)(\rho^{-2}-\rho^2)+17\rho^2\ln\rho$.

Підставивши знайдені коефіцієнти у ряд (1.16), одержимо шуканий розв'язок крайової задачі (3.1):

$$U(\rho,\varphi)=1+(2\rho+8\rho^{-1})\sin\varphi+[(16\ln 2+8)(\rho^{-2}-\rho^2)+17\rho^2\ln\rho]\cos 2\varphi.$$

2. Зінтегрувати крайову задачу та дати фізичну інтерпретацію:

$$\Delta U(x,y)=18xy, \quad 0<x<a, \quad 0<y<b; \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} &U_x(0,y)=0, \quad U_x(a,y)=9a^2y+\cos\tfrac{2\pi}{b}y, \quad 0\le y\le b; \\ &U_y(x,0)=U_y(x,b)=1+3x^3, \quad 0\le x\le a. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Розв'язання. Дамо фізичну інтерпретацію задачі, виходячи з рівняння теплопровідності: знайти стаціонарний розподіл температури в однорідній прямокутній пластинці зі сторонами довжин a та b, всередині якої діють джерела тепла інтенсивності $18xy$, якщо край пластинки $x=0$ теплоізольований, через краї $y=0$ та $y=b$ проходять теплові потоки однакової величини $1+3x^2$, а на краї $x=a$ тепловий потік рівний $9a^2y+\cos\frac{2\pi}{b}y$.

1 етап. Маємо задачу Неймана для рівняння Пуассона в прямокутній області. Зауважимо, що умова стаціонарності теплового поля (2.4) за крайових умов (3.10) очевидно не виконується, адже

$$\int_0^b 0\cdot dy \neq \int_0^b \left(9a^2 y + \cos\tfrac{2\pi}{b} y\right) dy.$$

Однак оскільки рівняння (3.9) неоднорідне, то остання нерівність ще не означає, що задача Неймана не має розв'язку. Введемо підстановку (1.10) у вигляді

$$U(x,y) = V(x,y) + \omega(x,y), \tag{3.11}$$

де $V(x,y)$ – нова невідома функція, а $\omega(x,y)$ деякий частинний розв'язок рівняння (3.9), який спробуємо підібрати таким чином, щоб крайові умови стали узгодженими.

Враховуючи, що $\Delta U(x,y) \equiv U_{xx} + U_{yy}$, можемо зробити висновок: для того, щоб одержати доданок, подібний до вільного члена рівняння (3.9), частинний розв'язок $\omega(x,y)$ має містити доданки вигляду Axy^3 або $Bx^3 y$. Отже, його можна шукати, наприклад, у загальному вигляді

$$\omega(x,y) = Axy^3 + Bx^3 y + Cxy + Dy + Ex + F. \tag{3.12}$$

Підставимо суму (3.11) із допоміжною функцією (3.12) у рівняння (3.9) і крайові умови (3.10). Маємо:

$$\Delta V(x,y) + 6Axy + 6Bxy = 18xy; \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned} &V_x(0,y) + Ay^3 + Cy + E = 0,\\ &V_x(a,y) + Ay^3 + 3a^2 By + Cy + E = 9a^2 y + \cos\tfrac{2\pi}{b} y; \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned} &V_y(x,0) + Bx^3 + Cx + D = 1 + 3x^3,\\ &V_y(x,b) + 3b^2 Ax + Bx^3 + Cx + D = 1 + 3x^3. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Для пари крайових умов (3.15) умова стаціонарності теплового поля (2.4) очевидно виконується при $A = 0$; тоді з (3.13) виходить $B = 3$. Задля спрощення крайових умов (3.15) доцільно вибрати $D = 1$. Усі інші сталі можна покласти рівними нулю, оскільки за такого вибору коефіцієнтів у (3.12) для крайових умов (3.14) також виконується умова (2.4) існування розв'язку крайової задачі для рівняння Лапласа, адже

$$\int_0^b 0\cdot dy = \int_0^b \cos\tfrac{2\pi}{b} y dy = 0.$$

Отже, вводимо підстановку (3.11) у вигляді

$$U(x,y) = V(x,y) + \omega(x,y) = V(x,y) + y(3x^3 + 1).$$

Задачу для $V(x,y)$ можна записати на підставі (3.13)-(3.15), підклавши вибрані значення коефіцієнтів допоміжної функції (3.12):

$$\Delta V(x,y) = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \tag{3.16}$$

$$V_x(0,y) = 0, \quad V_x(a,y) = \cos\tfrac{2\pi}{b} y, \quad 0 \le y \le b; \tag{3.17}$$

$$V_y(x,0) = V_y(x,b) = 0, \quad 0 \le x \le a. \tag{3.18}$$

2 етап. Маємо задачу для рівняння Лапласа з однорідними крайовими умовами на протилежних краях $y = 0$, $y = b$ (задача типу 1 для прямокутника). Отже, розв'язок шукаємо методом відокремлення змінних у вигляді (1.2):

$$V(x,y) = X(x)\cdot Y(y) \neq 0, \tag{3.19}$$

причому задачу Штурма-Ліувілля слід будувати для функцій $Y(y)$.

Підставивши (3.19) у рівняння (3.16) та крайові умови (3.18), одержимо:

$$X''(x)\cdot Y(y)+X(x)\cdot Y''(y) \quad\Rightarrow\quad \frac{Y''(y)}{Y(y)}=-\frac{X''(x)}{X(x)}=\lambda=const \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{l} Y''(y)=\lambda Y(y), \\ X''(x)=-\lambda X(x). \end{array}$$

Із урахуванням крайових умов (3.18) для шуканих власних функцій $Y(y)$ отримаємо ЗШЛ

$$\begin{aligned} &Y''(y)-\lambda Y(y)=0; \\ &Y'(0)=0, \quad Y'(b)=0, \end{aligned} \tag{3.20}$$

а для визначення функцій $X(x)$ – рівняння

$$X''(x)+\lambda X(x)=0. \tag{3.21}$$

Дослідимо спочатку ЗШЛ (3.20).

1. Нехай $\lambda>0.$ Тоді загальний розв'язок рівняння з (3.20) запишеться у вигляді $Y(y)=C_1e^{\sqrt{\lambda}y}+C_2e^{-\sqrt{\lambda}y}$. Підставивши цей розв'язок у крайові умови, одержимо лінійну однорідну систему відносно невідомих сталих C_1, C_2:

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda}(C_1-C_2)=0; \\ \sqrt{\lambda}(C_1e^{\sqrt{\lambda}b}-C_2e^{-\sqrt{\lambda}b})=0. \end{cases}$$

Детермінант цієї системи $\Delta=2\lambda\,\mathrm{sh}\sqrt{\lambda}\neq 0$, оскільки $\sqrt{\lambda}>0.$ Отже, $C_1=C_2=0,$ а тому $Y(y)\equiv 0$ і $\lambda>0$ не є власним значенням.

2. Нехай $\lambda=0.$ Тоді $Y(y)=C_3y+C_4$ і з крайових умов одержимо:

$$\begin{cases} C_3=0; \\ C_3=0, \end{cases}$$

а отже, при $C_4\neq 0$ $\lambda=0$ є власним значенням: йому відповідає власна функція $Y(y)=C_4$.

3. При $\lambda<0$ загальний розв'язок рівняння з (3.20) запишеться у вигляді $Y(y)=C_5\cos\sqrt{-\lambda}y+C_6\sin\sqrt{-\lambda}y.$ На підставі крайових умов одержимо:

$$\begin{cases} \sqrt{-\lambda}C_6=0; \\ \sqrt{-\lambda}(C_6\cos\sqrt{-\lambda}b-C_5\sin\sqrt{-\lambda}b)=0, \end{cases}$$

звідки $C_6=0$ і $-C_5\sqrt{-\lambda}\sin\sqrt{-\lambda}b=0.$ Отже, нетривіальний розв'язок задачі (3.20) існує тільки для тих значень параметра λ, які є розв'язками тригонометричного рівняння $\sin\sqrt{-\lambda}b=0$, звідки $\lambda_n=-\left(\frac{\pi n}{b}\right)^2$. Тоді відповідні власні функції матимуть вигляд (беремо для визначеності C_4 та C_6 рівними 1)

$$Y_n(y)=\cos\tfrac{\pi n}{b}y, \quad n=\overline{0,\infty}. \tag{3.22}$$

З урахуванням знайдених власних значень рівняння (3.21) для визначення функцій $X(x)$ запишеться у вигляді

$$X_n''(x)-\left(\tfrac{\pi n}{b}\right)^2X_n(x)=0. \tag{3.23}$$

Загальний розв'язок згідно з (2.1) задля зручності підстановки в неоднорідні крайові умови подамо у вигляді

$$X_n(x)=\begin{cases} A_n \operatorname{ch}\frac{\pi n}{b}x + B_n \operatorname{sh}\frac{\pi n}{b}x, & n\neq 0,\\ A_0 x + B_0, & n=0.\end{cases}$$

Згідно з (3.19) будь-яка функція вигляду $V_n(x,y)=X_n(x)\cdot Y_n(y)$ є частинним розв'язком рівняння (3.16), який справджує крайові умови (3.18). Тоді на підставі лінійності й однорідності рівняння і крайових умов загальний розв'язок запишеться у вигляді лінійної комбінації

$$V(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}V_n(x,y)=A_0x+B_0+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n \operatorname{ch}\tfrac{\pi n}{b}x+B_n \operatorname{sh}\tfrac{\pi n}{b}x)\cos\tfrac{\pi n}{b}y. \quad (3.24)$$

Невідомі коефіцієнти ряду (3.24) знаходимо шляхом безпосередньої підстановки (3.24) у неоднорідні крайові умови (3.17):

$$V_x(0,y)\equiv A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{\pi n}{b}B_n\cos\tfrac{\pi n}{b}y=0,$$

$$V_x(a,y)\equiv A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{\pi n}{b}(A_n \operatorname{sh}\tfrac{\pi n}{b}a+B_n \operatorname{ch}\tfrac{\pi n}{b}a)\cos\tfrac{\pi n}{b}y=\cos\tfrac{2\pi}{b}y.$$

Із першої рівності очевидно випливає: $A_0=0$, $B_n=0$, $n\in N$. У правій частині другої рівності стоїть функція, яка входить у множину власних функцій (3.22) при $n=2$: отже, маємо резонансний випадок, і решту коефіцієнтів можна обчислити без розкладу в ряд Фур'є. Таким чином,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{\pi n}{b}A_n \operatorname{sh}\tfrac{\pi n}{b}a\cos\tfrac{\pi n}{b}y=\cos\tfrac{2\pi}{b}y \quad\Rightarrow\quad A_n=\begin{cases}\dfrac{b}{2\pi \operatorname{sh}\frac{2\pi a}{b}}, & n=2,\\ 0, & n\neq 2.\end{cases}$$

Підставивши знайдені коефіцієнти в ряд (3.24), одержимо розв'язок крайової задачі Неймана (3.16)-(3.18), який визначається з точністю до сталого доданка:

$$V(x,y)=B_0+\frac{b\operatorname{ch}\frac{2\pi}{b}x}{2\pi \operatorname{sh}\frac{2\pi a}{b}}\cos\tfrac{2\pi}{b}y.$$

Тоді згідно з (3.11) шуканий розв'язок задачі (3.9), (3.10)

$$U(x,y)=V(x,y)+\omega(x,y)=B_0+\frac{b\operatorname{ch}\frac{2\pi}{b}x}{2\pi \operatorname{sh}\frac{2\pi a}{b}}\cos\tfrac{2\pi}{b}y+y(3x^3+1).$$

3. Зінтегрувати крайову задачу та дати фізичну інтерпретацію:

$$\Delta U(\rho,\varphi)=-\tfrac{15}{4}\sin\tfrac{3\varphi}{2},\quad 0<\rho<1,\quad 0<\varphi<\pi; \quad (3.25)$$

$$U(1,\varphi)=\sin\tfrac{\varphi}{2},\quad 0\le\varphi\le\pi; \quad (3.26)$$

$$U(\rho,0)=0,\quad U(\rho,\pi)=\rho^2,\quad 0\le\rho\le 1. \quad (3.27)$$

Розв'язання. Дамо фізичну інтерпретацію задачі, виходячи з рівняння коливань: знайти положення рівноваги однорідної мембрани, яка має форму півкола одиничного радіусу, якщо мембрана піддається дії зовнішньої сили інтенсивності

$-\frac{15}{4}\sin\frac{3\varphi}{2}$, край $\varphi=0$ нерухомо закріплений, а відхилення країв $\rho=1$ та $\varphi=\pi$ описуються функціями $\sin\frac{\varphi}{2}$ та ρ^2 відповідно.

1 етап. Маємо задачу Діріхле для рівняння Пуассона у круговому секторі $D_5=\{(\rho,\varphi)|0<\rho<1,\ 0<\varphi<\pi\}$. Крайові умови (3.27) на прямолінійних краях неоднорідні (задача типу 3), отже, на першому етапі необхідно звести їх до однорідних підстановкою (1.17), причому допоміжну функцію $\omega(\rho,\varphi)$ підбираємо таким чином, щоб для неї виконувалися рівності (3.27):

$$\omega(\rho,0)=0,\quad \omega(\rho,\pi)=\rho^2. \tag{3.28}$$

Будемо шукати $\omega(\rho,\varphi)$ у періодичному вигляді (1.22)

$$\omega(\rho,\varphi)=A(\rho)\cos\theta\varphi+B(\rho)\sin\theta\varphi,$$

де коефіцієнти $A(\rho)$, $B(\rho)$ і константа θ визначаються з крайових умов (3.28). Безпосередня підстановка (1.22) в (3.28) дає

$$\omega(\rho,0)\equiv A(\rho)=0,\quad \omega(\rho,\pi)\equiv A(\rho)\cos\theta\pi+B(\rho)\sin\theta\pi=\rho^2.$$

Остання рівність очевидно виконується при $B(\rho)=\rho^2$, $\theta=\frac{1}{2}$. Підклавши ці значення разом із $A(\rho)=0$ в (1.22), запишемо підстановку (1.17):

$$U(\rho,\varphi)=V(\rho,\varphi)+\omega(\rho,\varphi)=V(\rho,\varphi)+\rho^2\sin\tfrac{\varphi}{2}. \tag{3.29}$$

Поставимо крайову задачу для нової невідомої функції $V(\rho,\varphi)$. Для цього підставимо (3.29) у рівняння (3.25) і умови (3.26), (3.27), враховуючи, що $\Delta U(\rho,\varphi)=U_{\rho\rho}+\rho^{-1}U_\rho+\rho^{-2}U_{\varphi\varphi}$. Отже, маємо:

$$V_{\rho\rho}+2\sin\tfrac{\varphi}{2}+\rho^{-1}(V_\rho+2\rho\sin\tfrac{\varphi}{2})+\rho^{-2}(V_{\varphi\varphi}-0{,}25\rho^2\sin\tfrac{\varphi}{2})=-\tfrac{15}{4}\sin\tfrac{3\varphi}{2};$$

$$U(1,\varphi)\equiv V(1,\varphi)+\sin\tfrac{\varphi}{2}=\sin\tfrac{\varphi}{2};$$

$$U(\rho,0)\equiv V(\rho,0)=\grave{}0,\quad U(\rho,\pi)\equiv V(\rho,\pi)+\rho^2\sin\tfrac{\pi}{2}=\rho^2,$$

або після спрощення і додавання умови неперервності в нулі, яку необхідно враховувати при розв’язуванні крайових задач у області D_5

$$\Delta V(\rho,\varphi)=-\tfrac{15}{4}(\sin\tfrac{3\varphi}{2}+\sin\tfrac{\varphi}{2}),\quad 0<\rho<1,\quad 0<\varphi<\pi; \tag{3.30}$$

$$\lim_{\rho\to 0}V(\rho,\varphi)<\infty,\quad V(1,\varphi)=0,\quad 0\le\varphi\le\pi; \tag{3.31}$$

$$V(\rho,0)=\grave{}0,\quad V(\rho,\pi)=0,\quad 0\le\rho\le 1. \tag{3.32}$$

2 етап. Маємо задачу Діріхле для рівняння Пуассона з однорідними крайовими умовами на прямолінійних краях (задача типу 2 для кругового сектора). Розв’язок слід шукати у вигляді ряду (1.20)

$$V(\rho,\varphi)=\sum_n^\infty X_n(\rho)\cdot\Phi_n(\varphi) \tag{3.33}$$

по системі власних функцій $\Phi_n(\varphi)$ відповідної однорідної задачі типу 1.

Тому на другому етапі спочатку необхідно знайти власні функції задачі Штурма-Ліувілля для відповідної до (3.30)-(3.32) однорідної задачі

$$\Delta W(\rho,\varphi)=W_{\rho\rho}+\rho^{-1}W_{\rho}+\rho^{-2}W_{\varphi\varphi}=0\,, \tag{3.34}$$

$$W(\rho,0)=0,\quad W(\rho,\pi)=0,\quad 0\le\rho\le 1 \tag{3.35}$$

[крайові умови (3.31) наразі можна не враховувати]. Розв’язок допоміжної задачі (3.34)-(3.35) (задачі типу 1) шукаємо методом відокремлення змінних у вигляді (1.14), або, перепозначивши допоміжну функцію через $Y(\rho)$,

$$W(\rho,\varphi)=Y(\rho)\cdot\Phi(\varphi)\ne 0. \tag{3.36}$$

Підставивши (3.36) у рівняння (3.34) і відокремивши змінні, маємо:

$$Y''(\rho)\cdot\Phi(\varphi)+\rho^{-1}Y'(\rho)\cdot\Phi(\varphi)+\rho^{-2}Y(\rho)\cdot\Phi''(\varphi)=0 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad -\frac{Y''(\rho)+\rho^{-1}Y'(\rho)}{\rho^{-2}Y(\rho)}=\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=\lambda=const \quad\Rightarrow\quad \Phi''(\varphi)-\lambda\Phi(\varphi)=0.$$

Із урахуванням крайових умов (3.35) для шуканих власних функцій $\Phi(\varphi)$ отримаємо задачу Штурма-Ліувілля (ЗШЛ)

$$\begin{aligned}&\Phi''(\varphi)-\lambda\Phi(\varphi)=0;\\ &\Phi(0)=0,\quad \Phi(\pi)=0.\end{aligned} \tag{3.37}$$

Дослідимо ЗШЛ (3.37).

1. Нехай $\lambda>0.$ Тоді загальний розв’язок рівняння з (3.37) запишеться у вигляді $\Phi(\varphi)=C_1e^{\sqrt{\lambda}\varphi}+C_2e^{-\sqrt{\lambda}\varphi}$. Підставивши цей розв’язок у крайові умови, одержимо лінійну однорідну систему відносно невідомих сталих C_1, C_2:

$$\begin{cases}C_1+C_2=0;\\ C_1e^{\sqrt{\lambda}\pi}+C_2e^{-\sqrt{\lambda}\pi}=0.\end{cases}$$

Детермінант цієї системи $\Delta=-2\,\mathrm{sh}\sqrt{\lambda}\pi\ne 0$, оскільки $\sqrt{\lambda}>0.$ Отже, $C_1=C_2=0,$ а тому $\Phi(\varphi)\equiv 0$ і $\lambda>0$ не є власним значенням.

2. Нехай $\lambda=0.$ Тоді $\Phi(\varphi)=C_3\varphi+C_4$ і з крайових умов одержимо:

$$\begin{cases}C_4=0;\\ C_3\pi+C_4=0,\end{cases}$$

звідки $C_3=C_4=0,$ а тому $\Phi(\varphi)\equiv 0$ і $\lambda=0$ також не є власним значенням.

3. При $\lambda<0$ загальний розв’язок рівняння з (3.37) запишеться у вигляді $\Phi(\varphi)=C_5\cos\sqrt{-\lambda}\varphi+C_6\sin\sqrt{-\lambda}\varphi.$ Із крайових умов одержимо:

$$\begin{cases}C_5=0;\\ C_6\sin\sqrt{-\lambda}\pi+C_5\cos\sqrt{-\lambda}\pi=0,\end{cases}$$

звідки $C_5=0$ і $C_6\sin\sqrt{-\lambda}\pi=0.$ Отже, нетривіальний розв’язок задачі (3.37) існує тільки для тих значень параметра λ, які є розв’язками тригонометричного рівняння $\sin\sqrt{-\lambda}\pi=0$, звідки $\lambda_n=-n^2$. Тоді відповідні власні функції матимуть вигляд (беремо для визначеності $C_6=1$)

$$\Phi_n(\varphi)=\sin nx,\quad n\in\mathrm{N}\,. \tag{3.38}$$

З урахуванням знайдених власних функцій (3.38) ряд (3.33) для розв’язку $V(t,x)$ крайової задачі (3.30)-(3.32) запишеться у вигляді

$$V(\rho,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(\rho)\sin n\varphi. \qquad (3.39)$$

3 етап. Коефіцієнти $X_n(\rho)$ знаходимо підстановкою ряду (3.39) у неоднорідне рівняння (3.30) та умови (3.31), які включають крайову умову на дузі півкола і умову неперервності розв’язку для випадку кругового сектора.

Враховуючи, що $\Delta V(\rho,\varphi)=V_{\rho\rho}+\rho^{-1}V_\rho+\rho^{-2}V_{\varphi\varphi}$, після підстановки (3.39) у рівняння (3.30) маємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty}X_n''(\rho)\sin n\varphi+\rho^{-1}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}X_n'(\rho)\sin n\varphi-\rho^{-2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}n^2\cdot X_n(\rho)\sin n\varphi=-\tfrac{15}{4}\left(\sin\tfrac{3\varphi}{2}+\sin\tfrac{\varphi}{2}\right),$$

або після спрощення

$$\sum_{n=1}^{\infty}[\rho^2X_n''(\rho)+\rho X_n'(\rho)-n^2X_n(\rho)]\sin n\varphi=-\tfrac{15}{4}\rho^2\left(\sin\tfrac{3\varphi}{2}+\sin\tfrac{\varphi}{2}\right). \qquad (3.40)$$

Далі підставимо (3.39) в умови (3.31):

$$\lim_{\rho\to0}V(\rho,\varphi)<\infty \quad\Rightarrow\quad \lim_{\rho\to0}X_n(\rho)<\infty; \qquad (3.41)$$

$$V(1,\varphi)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}X_n(1)\sin n\varphi=0 \quad\Rightarrow\quad X_n(1)=0,\quad n\in N. \qquad (3.42)$$

Отже, крайові умови для функцій $X_n(\rho)$ визначаються співвідношеннями (3.41), (3.42). Щоб записати відповідне рівняння, для правої частини рівності (3.40) необхідно застосувати розклад у ряд Фур’є по системі власних функцій (3.38) на відрізку $[0;\pi]$ (маємо нерезонансний випадок):

$$-\tfrac{15}{4}\rho^2\left(\sin\tfrac{3\varphi}{2}+\sin\tfrac{\varphi}{2}\right)=\rho^2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\sin n\varphi, \qquad (3.43)$$

де коефіцієнти Фур’є обчислюємо за формулами (див. [**1**], стор. 62-63, або п. 4 Інструкцій до Інд03):

$$\alpha_n=\frac{-\tfrac{15}{4}\int_0^{\pi}\left(\sin\tfrac{3\varphi}{2}+\sin\tfrac{\varphi}{2}\right)\sin n\varphi d\varphi}{\int_0^{\pi}\sin^2 n\varphi d\varphi}=-\frac{240n\cdot(-1)^n}{\pi(4n^2-1)(4n^2-9)}. \qquad (3.44)$$

Замінивши в (3.40) вираз у правій частині рядом Фур’є (3.43) і прирівнявши коефіцієнти при однакових власних функціях під знаками сум зліва і справа, для визначення функцій $X_n(\rho)$ отримаємо рівняння Ейлера

$$\rho^2X_n''(\rho)+\rho X_n'(\rho)-n^2X_n(\rho)=\alpha_n\rho^2. \qquad (3.45)$$

Підстановкою $\rho=e^t$, $t=\ln\rho$ (див. 2 етап у прикладі 1) рівняння (3.45) зводиться до рівняння зі сталими коефіцієнтами вигляду

$$X_n''(t)-n^2X_n(t)=\alpha_n e^{2t}. \qquad (3.46)$$

Згідно з правилами методу Ейлера $X_{\text{пз.о.}}(t)=A_n e^{nt}+B_n e^{-nt}$. Правій частині рівняння (3.46) відповідає контрольне число $\gamma=2$, яке є однократним коренем характеристичного рівняння у випадку $n=2$, і не є коренем характеристичного рівняння для інших значень n. Тому частинний розв'язок ДР (3.46) доводиться шукати окремо для кожного з двох випадків у вигляді

$$X_{пч.н.}(t)=\begin{cases} Ct\,e^{2t}, & n=2, \\ D e^{2t}, & n\neq 2. \end{cases}$$

Нехай $n=2$, тоді $X''_{2ч.н.}(t)=4C(t+1)e^{2t}$ і після підстановки у (3.46) маємо

$$4C(t+1)e^{2t}-4Ct\,e^{2t}=\alpha_2\, e^{2t} \quad \Rightarrow \quad C=\tfrac{\alpha_2}{4}.$$

При $n\neq 2$ $X''_{пч.н.}(t)=4D e^{2t}$, і після підстановки у (3.46) маємо

$$4D e^{2t}-n^2 D e^{2t}=\alpha_n\, e^{2t} \quad \Rightarrow \quad D=\tfrac{\alpha_n}{4-n^2}.$$

Отже, загальний розв'язок ДР (3.46)

$$X_n(t)=A_n\, e^{nt}+B_n\, e^{-nt}+\begin{cases} \frac{\alpha_2}{4} t\, e^{2t}, & n=2, \\ \frac{\alpha_n}{4-n^2} e^{2t}, & n\neq 2. \end{cases}$$

Загальний розв'язок рівняння Ейлера (3.45) отримаємо, підставивши в останню рівність значення $t=\ln\rho$:

$$X_n(\rho)=A_n\rho^n+B_n\rho^{-n}+\begin{cases} \frac{\alpha_2}{4}\rho^2\ln\rho, & n=2, \\ \frac{\alpha_n}{4-n^2}\rho^2, & n\neq 2. \end{cases} \tag{3.47}$$

Для визначення сталих A_n, B_n скористаємося умовами (3.41), (3.42). Очевидно, що умова неперервності (3.41) буде виконуватися, якщо у (3.47) покласти $B_n=0$ [зауважимо, що $\lim\limits_{\rho\to 0}(\rho^2\ln\rho)=0$, а отже, останній доданок у формулі для функції $X_2(\rho)$ не дає невизначеності]. Отже, умова (3.41) спрощує розв'язки (3.47) до вигляду

$$X_n(\rho)=A_n\rho^n+\begin{cases} \frac{\alpha_2}{4}\rho^2\ln\rho, & n=2, \\ \frac{\alpha_n}{4-n^2}\rho^2, & n\neq 2. \end{cases} \tag{3.48}$$

Значення сталих A_n знаходимо підстановкою функцій (3.48) у крайову умову (3.42):

$$X_n(1)=0 \quad \Rightarrow \quad 0=A_n+\begin{cases} 0, & n=2, \\ \frac{\alpha_n}{4-n^2}, & n\neq 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A_n=\begin{cases} 0, & n=2, \\ -\frac{\alpha_n}{4-n^2}, & n\neq 2. \end{cases}$$

Далі підставимо знайдені значення A_n у (3.48):

$$X_n(\rho)=\begin{cases} \frac{\alpha_2}{4}\rho^2\ln\rho, & n=2, \\ \frac{\alpha_n}{4-n^2}(\rho^2-\rho^n), & n\neq 2. \end{cases} \tag{3.49}$$

Тепер нарешті можемо записати розв'язок $V(t,x)$ крайової задачі (3.30)-(3.32), підставивши знайдені коефіцієнти (3.49) у ряд (3.39). Оскільки другий доданок суми має вигляд, відмінний від інших, то для кращої наочності виділимо в нашому записі з суми (3.39) перші два доданки. Зауважимо, що згідно з формулою (3.44) для коефіцієнтів Фур'є при $n=1$ і $n=2$ маємо

$$\alpha_1 = -\frac{240\cdot 1\cdot(-1)^1}{\pi(4\cdot 1^2-1)(4\cdot 1^2-9)} = -\frac{16}{\pi} \quad\Rightarrow\quad X_1(\rho) = -\frac{16}{3\pi}(\rho^2-\rho),$$

$$\alpha_2 = -\frac{240\cdot 2\cdot(-1)^2}{\pi(4\cdot 2^2-1)(4\cdot 2^2-9)} = -\frac{32}{7\pi} \quad\Rightarrow\quad X_2(\rho) = -\frac{8}{7\pi}\rho^2\ln\rho.$$

Тоді ряд (3.39) запишеться у вигляді

$$V(\rho,\varphi) = X_1(\rho)\sin\varphi + X_2(\rho)\sin 2\varphi + \sum_{n=3}^{\infty} X_n(\rho)\sin n\varphi =$$

$$= -\frac{16}{3\pi}(\rho^2-\rho)\sin\varphi - \frac{8}{7\pi}\rho^2\ln\rho\sin 2\varphi +$$

$$+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{240n\cdot(-1)^n\cdot(\rho^n-\rho^2)}{\pi(4n^2-1)(4n^2-9)(4-n^2)}\sin n\varphi$$

і згідно з формулою (3.29) шуканий розв'язок крайової задачі (3.25)-(3.27)

$$U(\rho,\varphi) = \omega(\rho,\varphi) + V(\rho,\varphi) = \rho^2\sin\frac{\varphi}{2} - \frac{16}{3\pi}(\rho^2-\rho)\sin\varphi -$$

$$-\frac{8}{7\pi}\rho^2\ln\rho\sin 2\varphi + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{240n\cdot(-1)^n\cdot(\rho^n-\rho^2)}{\pi(4n^2-1)(4n^2-9)(4-n^2)}\sin n\varphi.$$

Джерела:

[1] *Маринець В. В., Рего В. Л.* Рівняння математичної фізики (методична розробка з практичних занять), ч. I. – Ужгород: Говерла, 2006. – 96 с.

[2] *Маринець В. В., Рего В. Л.* Рівняння математичної фізики (методична розробка з практичних занять), ч. II. – Ужгород: Говерла, 2009. – 92 с.

[3] *Перестюк М.О., Маринець В.В.* Теорія рівнянь математичної фізики. – К.: Либідь, 2001. – 334 с.