Курс: «Рівняння в частинних похідних та їх застосування» **ст. викл. Рего В. Л.**

До Модуля 2

ІЛЮСТРАТИВНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ВАРІАНТУ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ЗАВДАННЯ №2 ДО РОЗДІЛУ: МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ ЗАДАЧ КОШІ ТА МІШАНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РІВНЯННЯ КОЛИВАНЬ СТРУНИ

Завдання 1. По однорідній необмеженій струні поширюються хвилі імпульсу, викликані наданою струні початковою швидкістю

$$\psi(x)=\begin{cases}0, & x\notin[0;4],\\ 2ax, & x\in[0;4],\end{cases}$$

де a – стала, що фігурує в рівнянні коливань струни. Записати формули, які визначають ***а)*** профіль струни в момент часу $t_0=\frac{1}{a}$, і ***б)*** закон руху точки струни з абсцисою $x_0=5$.

Розв'язання. Маємо задачу Коші для рівняння вільних коливань струни

$$u_{tt}=a^2u_{xx}(t,x),\quad t>0,\quad x\in(-\infty,+\infty), \tag{1.1}$$

$$u(0,x)=0,\quad u_t(0,x)=\psi(x)=\begin{cases}2ax, & 0\le x\le 4,\\ 0, & x\notin[0;4]\end{cases} \tag{1.2}$$

з поширенням хвиль імпульсу. Будемо шукати узагальнений розв'язок задачі (1.1)-(1.2) згідно з формулою Д'Аламбера у вигляді (див. [3], тема 2)

$$u(t,x)=\Psi(x+at)-\Psi(x-at), \tag{1.3}$$

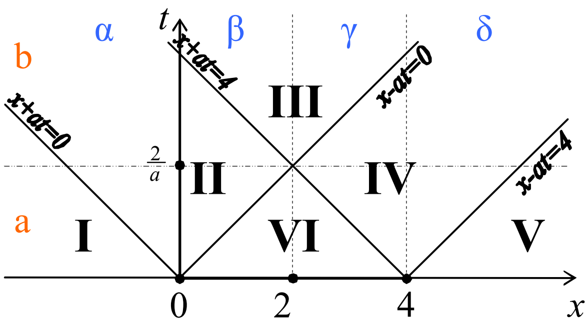
де

$$\Psi(x)=\frac{1}{2a}\int_0^x\psi(z)dz=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x^2}{2}, & 0\le x\le 4,\\ 8, & x>4.\end{cases}$$

Зауважимо, що на проміжку $x>4$ функція $\Psi(x)$ знаходиться у вигляді суми двох інтегралів:

$$\Psi(x)=\frac{1}{2a}\int_0^x\psi(z)dz=\frac{1}{2a}\left[\int_0^4 2azdz+\int_4^x 0\cdot dz\right]=8.$$

Фазова площина для задачі (1.1)-(1.2) зображена на мал. 1. Чотири характеристики розбивають її на шість зон, позначених римськими цифрами, у кожній із яких пряма й зворотна складові розв'язку (1.3) визначаються однозначно.



Мал. 1

На підставі формули (1.3) з визначеною функцією $\Psi(x)$ маємо (Табл. 1):

Таблиця 1			
Зона	**Область зміни характеристик**	**Значення** $\Psi(x+at)$ **і** $\Psi(x-at)$	**Розв'язок (1.3)**
I	$x \pm at < 0$	$\Psi(x \pm at) = 0$	$u(t,x) = 0$
II	$x - at < 0,$ $0 < x + at < 4$	$\Psi(x-at) = 0,$ $\Psi(x+at) = \dfrac{(x+at)^2}{2}$	$u(t,x) = \dfrac{(x+at)^2}{2}$
III	$x - at < 0,$ $x + at > 4$	$\Psi(x-at) = 0,$ $\Psi(x+at) = 8$	$u(t,x) = 8$
IV	$0 < x - at < 4$ $x + at > 4$	$\Psi(x-at) = \dfrac{(x-at)^2}{2}$ $\Psi(x+at) = 8$	$u(t,x) = 8 - \dfrac{(x-at)^2}{2}$
V	$x \pm at > 4$	$\Psi(x \pm at) = 8$	$u(t,x) = 0$
VI	$0 < x \pm at < 4$	$\Psi(x \pm at) = \dfrac{(x \pm at)^2}{2}$	$u(t,x) = 2atx$

Результати, одержані в таблиці, можна використати для побудови ***а)*** формул, які описують профіль струни в різні моменти часу $t = t_0$, а також ***б)*** формул, які визначають закони руху точок струни з різними абсцисами $x = x_0$. У першому випадку слід виписати розв'язок уздовж горизонтальних смуг $0 \le t \le \dfrac{2}{a}$ та $t \ge \dfrac{2}{a}$ (на мал. 1 позначені латинськими літерами), а у другому – уздовж вертикальних півсмуг $x \le 0,\ 0 \le x \le 2,\ 2 \le x \le 4$ та $x \ge 4$ (на мал. 1 позначені грецькими літерами).

Знайдемо формули, що вимагаються в умові задачі.

а) $t_0 = \dfrac{1}{a} < \dfrac{2}{a}$, а отже, пряма $t = \dfrac{1}{a}$ лежить у смузі «а» і послідовно перетинає зони I, II, VI, IV, V. Запишемо розв'язок задачі Коші (1.1)-(1.2) уздовж цієї прямої зліва направо, враховуючи отримані в Таблиці 1 значення $u(t,x)$ у зонах фазової площини:

$$u\left(\frac{1}{a},x\right)=\begin{cases}0, & x\in(-\infty,-1);\\ \dfrac{(x+1)^2}{2}, & x\in[-1;1);\\ 2x, & x\in[1;3);\\ 8-\dfrac{(x-1)^2}{2}, & x\in[3;5);\\ 0, & x\in[5,+\infty).\end{cases}$$

б) $x_0=5>4$, а отже, півпряма $x=5$ лежить у півсмузі «δ» і послідовно перетинає зони V, IV, III. Запишемо розв'язок задачі Коші (1.1)-(1.2) уздовж цієї півпрямої знизу вгору, враховуючи отримані в Таблиці 1 значення $u(t,x)$ у зонах фазової площини:

$$u(t,5)=\begin{cases}0, & t\in\left[0,\dfrac{1}{a}\right);\\ 8-\dfrac{(5-at)^2}{2}, & t\in\left[\dfrac{1}{a},\dfrac{5}{a}\right);\\ 8, & t\in\left[\dfrac{5}{a},+\infty\right).\end{cases}$$

Зауваження. Більше прикладів на розв'язування задач Коші для необмеженої струни можна знайти у джерелах: [1], стор. 31-47; [2], стор. 42-46.

Завдання 2. Зобразити графічно профіль однорідної $(a=1)$ напівобмеженої струни з нерухомо закріпленим кінцем у моменти часу $t=0$, 1, 2, 3, 4, якщо струна коливається тільки за рахунок початкового відхилення її точок, яке рівне

$$\varphi(x)=\begin{cases}0, & x>2,\\ 2-2(x-1)^2, & x\in[0;2].\end{cases}$$

Розв'язання. Маємо мішану задачу для рівняння вільних коливань струни

$$U_{tt}=U_{xx}(t,x),\quad t>0,\quad x>0, \tag{2.1}$$

$$U(0,x)=\varphi(x),\quad U_t(0,x)=0,\quad x\ge 0, \tag{2.2}$$

$$U(t,0)=0,\quad t\ge 0. \tag{2.3}$$

Оскільки кінець струни нерухомо закріплений, то для зведення мішаної задачі (2.1)-(2.2)-(2.3) до еквівалентної задачі Коші слід застосувати метод непарного продовження початкових функцій на від'ємну піввісь. Отже, маємо:

$$U(t,x)=V(t,x)\big|_{x\ge 0}, \tag{2.4}$$

де $V(t,x)$ є розв'язком задачі Коші

$$\begin{aligned}&V_{tt}=V_{xx},\quad t>0,\quad x\in\mathrm{R},\\ &V(0,x)=\varphi_1(x),\quad V_t(0,x)=0,\end{aligned} \tag{2.5}$$

а

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \ge 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2 - 2(x-1)^2, & 0 \le x \le 2, \\ 2(x+1)^2 - 2, & -2 \le x < 0, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$$

Будемо будувати узагальнений розв'язок задачі Коші (2.4) згідно з формулою Д'Аламбера у вигляді (див. [3], тема 2)

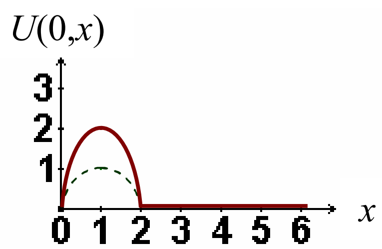
$$V(t,x) = \Phi(x+t) + \Phi(x-t) \tag{2.6}$$

за значення $a = 1$, де

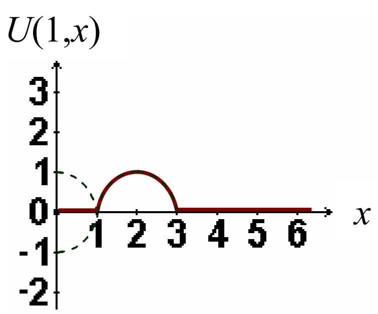
$$\Phi(x) = \frac{\varphi_1(x)}{2} = \begin{cases} 1 - (x-1)^2, & 0 \le x \le 2, \\ (x+1)^2 - 1, & -2 \le x < 0, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$$

Побудуємо графічно профілі напівобмеженої струни у вказані в умові задачі моменти часу. Для цього з огляду на (2.4) нам достатньо зобразити згідно з формулою (2.6) розв'язок задачі Коші (2.5) в області $x \ge 0$.

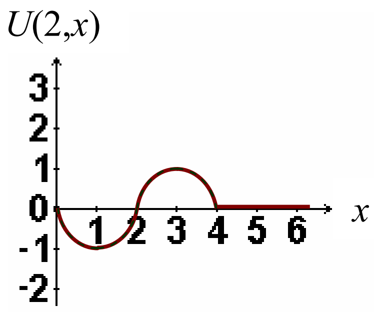
У початковий момент часу $t = 0$ згідно з (2.6) пряма та зворотна хвилі співпадають і рівні $\Phi(x)$, а їх суперпозиція $V(0,x) = 2\Phi(x)$. Отже, в області $x \ge 0$ маємо:



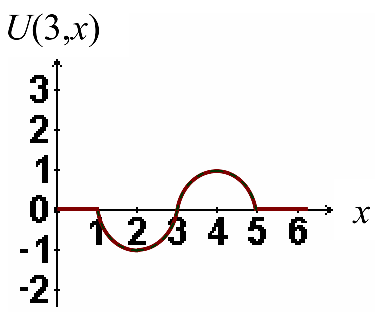
У момент часу $t = 1$ згідно з (2.6) $V(t,x) = \Phi(x+1) + \Phi(x-1)$, де перший доданок являє собою зворотну хвилю, що рухається вліво (її графік отримується зсувом графіка функції $\Phi(x)$ вліво на 1 уздовж осі x), а другий – пряму хвилю, що рухається вправо (її графік отримується зсувом графіка функції $\Phi(x)$ вправо на 1 уздовж осі x). Отже, в області $x \ge 0$ маємо:

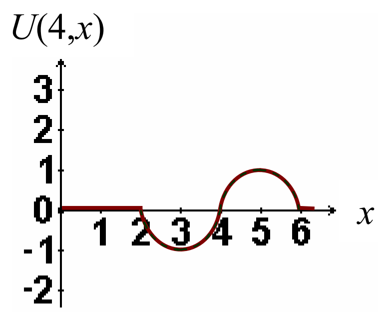


У момент часу $t = 2$ згідно з (2.6) $V(t,x) = \Phi(x+2) + \Phi(x-2)$, де перший доданок являє собою зворотну хвилю, що рухається вліво (її графік отримується зсувом графіка функції $\Phi(x)$ вліво на 2 уздовж осі x), а другий – пряму хвилю, що рухається вправо (її графік отримується зсувом графіка функції $\Phi(x)$ вправо на 2 уздовж осі x). Зауважимо, що за зсуву вліво на 2 ненульова частина зворотної хвилі цілком опиняється в «фіктивній» області $x<0$, а тому всі подальші профілі будуть співпадати з профілем прямої хвилі. Таким чином, в області $x \geq 0$ маємо:



У момент часу $t=3$ згідно з (2.6) $V(t,x)=\Phi(x+3)+\Phi(x-3)$, де перший доданок являє собою зворотну хвилю (яка, як ми вже зауважили раніше, цілком опиняється в «фіктивній» області $x<0$, а тому не впливає на процес коливань), а другий – пряму хвилю, що рухається вправо (її графік отримується зсувом графіка функції $\Phi(x)$ вправо на 3 уздовж осі x) і визначає профіль напівобмеженої струни. Аналогічно будується профіль струни і в момент часу $t=4$ згідно з формулою $V(t,x)=\Phi(x+4)+\Phi(x-4)$. Таким чином, в області $x \geq 0$ маємо:





Зауваження. Більше прикладів на розв'язування мішаних задач для напівобмеженої струни можна знайти у джерелах: [1], стор. 95-107; [2], стор. 63-73; приклади на метод характеристик для напівобмеженої струни – [4], тема 2.

Завдання 3. Знайти закон коливань однорідної струни довжини l із вільними кінцями під дією рівномірно розподіленої уздовж струни зовнішньої сили інтенсивності $f(t,x)=6\sin t-\mathrm{e}^{-2t}\cos\frac{2\pi}{l}x$, якщо в початковий момент часу струна займала прямолінійне положення, а початкова швидкість її точок була рівна $\psi(x)=A\cos\frac{\pi}{l}x$, де $A=const\neq 0$.

Розв'язання. Відповідна математична модель: в області $\Omega=\{(t,x)\,|\,t>0, 0<x<l\}$ знайти розв'язок рівняння вимушених коливань струни

$$U_{tt}=a^2U_{xx}+6\sin t-\mathrm{e}^{-2t}\cos\frac{2\pi}{l}x, \qquad (3.1)$$

який задовольняє початкові умови

$$U(0,x)=0, \quad U_t(0,x)=A\cos\frac{\pi}{l}x, \quad 0\le x\le l, \tag{3.2}$$

та крайові умови

$$U_x(t,0)=0, \quad U_x(t,l)=0, \quad t\ge 0. \tag{3.3}$$

Маємо задачу з однорідними крайовими умовами для рівняння вимушених коливань струни. Як початкові умови, так і вільний член у рівнянні справджують крайові умови (3.3), отже, до задачі (3.1)-(3.2)-(3.3) застосовний метод відокремлення змінних (метод Фур'є), причому цей розв'язок можна шукати у вигляді суми двох функцій

$$U(t,x)=Z(t,x)+V(t,x), \tag{3.4}$$

де $Z(t,x)$, $V(t,x)$ – розв'язки мішаних задач

$$\begin{aligned} &Z_{tt}=a^2Z_{xx}, \quad (t,x)\in\Omega,\\ &Z(0,x)=0, \quad Z_t(0,x)=A\cos\frac{\pi}{l}x, \quad 0\le x\le l,\\ &Z_x(t,0)=0, \quad Z_x(t,l)=0, \quad t\ge 0; \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} &V_{tt}=a^2V_{xx}+6\sin t-\mathrm{e}^{-2t}\cos\frac{2\pi}{l}x, \quad (t,x)\in\Omega,\\ &V(0,x)=0, \quad V_t(0,x)=0, \quad 0\le x\le l,\\ &V_x(t,0)=0, \quad V_x(t,l)=0, \quad t\ge 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Знайдемо спочатку розв'язок однорідної задачі (3.5). Згідно з алгоритмом методу Фур'є шукаємо його у вигляді добутку двох функцій

$$Z(t,x)=T(t)\cdot X(x)\ne 0\,. \tag{3.7}$$

Підставивши (3.7) у рівняння задачі (3.5), одержимо:

$$T''(t)\cdot X(x)=a^2T(t)\cdot X''(x)\,.$$

Відокремивши змінні шляхом ділення лівої та правої частин останньої рівності на величину $a^2T(t)\cdot X(x)\ne 0$, маємо

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}\,.$$

Одержана рівність виконується для всіх $(t,x)\in\Omega$ тільки тоді, коли

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=\lambda=const\,,$$

звідки маємо

$$T''(t)-\lambda a^2T(t)=0, \quad T(t)\ne 0; \tag{3.8}$$

$$X''(x)-\lambda X(x)=0, \quad X(x)\ne 0\,. \tag{3.9}$$

Підставивши (3.7) у крайові умови задачі (3.5), одержимо

$$T(t)\cdot X'(0)=0, \quad T(t)\cdot X'(l)=0,$$

звідки, враховуючи, що $T(t)\ne 0$, маємо

$$X'(0)=0, \quad X'(l)=0. \tag{3.10}$$

Дослідимо задачу Штурма-Ліувілля (3.9)-(3.10). Для цього зауважимо, що характеристичне рівняння для ДР зі сталими коефіцієнтами (3.9)

$$k^2 - \lambda = 0$$

залежно від значення параметра λ може мати дійсні різні, кратні або комплексні корені. Тому для повного дослідження слід розглянути три випадки.

1. Нехай $\lambda > 0.$ Тоді $k_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$ і загальний розв'язок рівняння (3.9) запишеться у вигляді $X(x) = C_1 \mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x}$. Підставивши цей розв'язок у крайові умови (3.10), одержимо лінійну однорідну систему відносно невідомих сталих C_1, C_2:

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda}(C_1 - C_2) = 0; \\ \sqrt{\lambda}(C_1 \mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}l} - C_2 \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}l}) = 0. \end{cases}$$

Детермінант цієї системи $\Delta = -2\lambda \,\mathrm{sh}\sqrt{\lambda}l \neq 0$, оскільки $\sqrt{\lambda}l > 0.$ Отже, $C_1 = C_2 = 0,$ а тому $X(x) \equiv 0$ і у випадку $\lambda > 0$ власних значень не існує.

2. Нехай $\lambda = 0.$ Тоді $k_{1,2} = 0$, $X(x) = C_3 x + C_4$ і з крайових умов (3.10) одержимо:

$$\begin{cases} C_3 = 0; \\ C_3 = 0, \end{cases}$$

звідки $C_3 = 0,$ C_4 – довільна стала. Отже, нетривіальний розв'язок існує при $C_4 \neq 0$, а тому $\lambda = 0$ є власним значенням, якому відповідає власна функція $X(x) = C_4$.

3. При $\lambda < 0$ $k_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}i$ і загальний розв'язок рівняння (3.9) запишеться у вигляді $X(x) = C_5 \cos\sqrt{-\lambda}x + C_6 \sin\sqrt{-\lambda}x.$ Із крайових умов (3.10) одержимо:

$$\begin{cases} \sqrt{-\lambda}C_6 = 0; \\ \sqrt{-\lambda}(C_6 \cos\sqrt{-\lambda}l - C_5 \sin\sqrt{-\lambda}l) = 0, \end{cases}$$

звідки $C_6 = 0$ і $-\sqrt{-\lambda}C_5 \sin\sqrt{-\lambda}l = 0.$ Отже, нетривіальний розв'язок задачі (3.9)-(3.10) існує тільки для тих значень параметра λ, які є розв'язками тригонометричного рівняння $\sin\sqrt{-\lambda}l = 0$, звідки $\lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$, а відповідні власні функції матимуть вигляд $X_n(x) = C_5 \cos\frac{\pi n}{l}x,$ $n \in \mathrm{N}$.

Об'єднавши випадки $\lambda = 0$ і $\lambda < 0$, і взявши для визначеності $C_4 = C_5 = 1$, одержимо систему власних значень і власних функцій ЗШЛ (3.9)-(3.10):

$$\lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \cos\frac{\pi n}{l}x, \quad n = \overline{0,\infty}. \tag{3.11}$$

Підставивши знайдені власні значення у (3.8), отримаємо рівняння для визначення функцій $T(t)$

$$T_n''(t)-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n(t)=0,\quad n=\overline{0,\infty},$$

загальний розв'язок якого має різний вигляд для випадків $n=0$ та $n>0$:

$$n=0\quad\Rightarrow\quad T_0(t)=A_0 t+B_0;$$

$$n>0\quad\Rightarrow\quad T_n(t)=A_n\cos\frac{\pi n a}{l}t+B_n\sin\frac{\pi n a}{l}t,$$

де A_n, B_n, $n=\overline{0,\infty}$ – довільні сталі.

Згідно з (3.7), і з урахуванням лінійності й однорідності ДРЧП та крайових умов задачі (3.5) загальний розв'язок цієї задачі запишеться у вигляді лінійної комбінації частинних розв'язків

$$Z(t,x)=A_0 t+B_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{\pi n a}{l}t+B_n\sin\frac{\pi n a}{l}t\right)\cos\frac{\pi n}{l}x. \qquad (3.12)$$

Визначимо коефіцієнти ряду (3.12) таким чином, щоб він справджував початкові умови задачі (3.5). Підстановка (3.12) у ці умови дає

$$Z(0,x)\equiv B_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{\pi n}{l}x=0, \qquad (3.13)$$

$$Z_t(0,x)\equiv A_0+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{\pi n a}{l}\cos\frac{\pi n}{l}x=A\cos\frac{\pi}{l}x. \qquad (3.14)$$

Із (3.13) очевидно $B_0=0$, $A_n=0$, $n=\overline{1,\infty}$. Права частина рівності (3.14) містить доданок, який є власною функцією з (3.11) при $n=1$ (***резонансний випадок***), тому коефіцієнти знаходяться без інтегрування. Рівність (3.14) очевидно виконується, якщо покласти

$$B_1=\frac{Al}{\pi a},\quad A_0=B_n=0,\quad n=\overline{2,\infty}.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти у ряд (3.12), одержимо розв'язок однорідної мішаної задачі (3.5) у вигляді

$$Z(t,x)=\frac{Al}{\pi a}\sin\frac{a\pi}{l}t\cos\frac{\pi}{l}x. \qquad (3.15)$$

Згідно з алгоритмом методу відокремлення змінних розв'язок неоднорідної мішаної задачі шукаємо у вигляді ряду по власних функціях (3.11) відповідної однорідної задачі (3.5):

$$V(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)\cos\frac{\pi n}{l}x. \qquad (3.16)$$

Функція (3.16) очевидно справджує крайові умови задачі (3.6). Залишилося визначити коефіцієнти $T_n(t)$ таким чином, щоб ряд (3.16) справджував неоднорідне рівняння та однорідні початкові умови цієї задачі.

Підставивши (3.16) у рівняння задачі (3.6), одержимо

$$T_0''(t)+\sum_{n=1}^{\infty}T_n''(t)\cos\frac{\pi n}{l}x=-a^2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 T_n(t)\cos\frac{\pi n}{l}x+6\sin t-e^{-2t}\cos\frac{2\pi}{l}x,$$

або

$$T_0''(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n''(t)+\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 T_n(t)\right]\cos\frac{\pi n}{l}x=6\sin t-\mathrm{e}^{-2t}\cos\frac{2\pi}{l}x. \qquad (3.17)$$

Легко бачити, що в (3.17), як і у початкових умовах (3.14), маємо резонансний випадок. Рівність очевидно виконується, якщо покласти

$$T_0''(t)=6\sin t, \qquad (3.18)$$

$$T_2''(t)+\left(\frac{2a\pi}{l}\right)^2 T_2(t)=-\mathrm{e}^{-2t}, \qquad (3.19)$$

$$T_n''(t)+\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 T_n(t)=0, \quad n\in N\setminus\{2\}. \qquad (3.20)$$

Підставляючи (3.16) у початкові умови задачі (3.6), маємо

$$\sum_{n=0}^{\infty}T_n(0)\cos\frac{\pi n}{l}x=0, \quad \sum_{n=0}^{\infty}T_n'(0)\cos\frac{\pi n}{l}x=0,$$

звідки очевидно випливають початкові умови

$$T_n(0)=0, \quad T_n'(0)=0, \quad n\in \mathrm{N}\cup\{0\}. \qquad (3.21)$$

Із (3.20) і (3.21) на підставі єдиності розв'язку задачі Коші очевидно випливає, що

$$T_n(t)\equiv 0, \quad n\in N\setminus\{2\}.$$

Знайдемо розв'язки задач Коші (3.18)-(3.19)-(3.20). Маємо:

$$T_0''(t)=6\sin t \quad \Rightarrow \quad T_0(t)=-6\sin t+A_0t+B_0.$$

Із початкових умов (3.21) отримуємо:

$$T_0(0)=0 \quad \Rightarrow \quad B_0=0;$$

$$T_0'(0)=0 \quad \Rightarrow \quad A_0=6,$$

тобто $T_0(t)=6(t-\sin t)$.

Функцію $T_2(t)$ знаходимо із застосуванням методу невизначених коефіцієнтів. Загальний розв'язок відповідного до (3.19) однорідного рівняння має вигляд

$$T_{2_{з.о.}}(t)=A_2\cos\frac{2\pi a}{l}t+B_2\sin\frac{2\pi a}{l}t,$$

де A_2, B_2 – довільні сталі. Частинний розв'язок рівняння (3.19) згідно з правилами методу невизначених коефіцієнтів можна шукати у вигляді

$$T_{2_{ч.н.}}(t)=C\,\mathrm{e}^{-2t}.$$

Шляхом підстановки в рівняння (3.19) знаходимо значення невизначеного коефіцієнта

$$C=-\frac{l^2}{4(l^2+[a\pi]^2)}.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (3.19) має вигляд

$$T_2(t)=T_{2_{з.о.}}(t)+T_{2_{ч.н.}}(t)=A_2\cos\frac{2\pi a}{l}t+B_2\sin\frac{2\pi a}{l}t-\frac{l^2\,\mathrm{e}^{-2t}}{4(l^2+[a\pi]^2)}. \qquad (3.22)$$

Підстановка (3.22) у початкові умови (3.21) дає

$$T_2(0) \equiv A_2 - \frac{l^2}{4(l^2+[a\pi]^2)} = 0,$$

$$T_2'(0) \equiv \frac{2\pi a}{l} B_2 + \frac{2l^2 \, \mathrm{e}^{-2t}}{4(l^2+[a\pi]^2)} = 0.$$

Визначивши з останніх рівностей A_2, B_2, і підклавши отримані значення в (3.22), дістанемо розв'язок задачі Коші (3.19)-(3.20)

$$T_2(t) = \frac{l^2}{4(l^2+[a\pi]^2)} \left(\cos\frac{2a\pi}{l}t - \frac{l}{a\pi}\sin\frac{2a\pi}{l}t - \mathrm{e}^{-2t} \right).$$

Підставивши знайдені коефіцієнти $T_n(t)$ у (3.16), одержимо розв'язок мішаної задачі (3.6)

$$V(t,x) = T_0(t) + T_2(t)\cos\frac{2\pi}{l}x =$$

$$= 6(t - \sin t) + \frac{l^2}{4(l^2+[a\pi]^2)} \left(\cos\frac{2a\pi}{l}t - \frac{l}{a\pi}\sin\frac{2a\pi}{l}t - \mathrm{e}^{-2t} \right) \cos\frac{2\pi}{l}x.$$

А тоді шуканий розв'язок задачі (3.1)-(3.2)-(3.3) згідно з (3.4) рівний

$$U(t,x) = Z(t,x) + V(t,x) = \frac{Al}{a\pi}\sin\frac{a\pi}{l}t\cos\frac{\pi}{l}x +$$

$$+ 6(t - \sin t) + \frac{l^2}{4(l^2+[a\pi]^2)} \left(\cos\frac{2a\pi}{l}t - \frac{l}{a\pi}\sin\frac{2a\pi}{l}t - \mathrm{e}^{-2t} \right) \cos\frac{2\pi}{l}x.$$

Зауваження. Більше прикладів на застосування методу відокремлення змінних до інтегрування мішаних задач для обмеженої струни можна знайти у джерелах: [2], стор. 78-89, а також [6], [7]; теоретичні відомості з тем розділу – [1], стор. 108-120, а також [5], [6].

Джерела:

[1] *Перестюк М. О., Маринець В. В.* Теорія рівнянь математичної фізики. – К.: Либідь, 2001. – 364 с.

[2] *Перестюк М.О., Маринець В.В., Рего В.Л.* Збірник задач з математичної фізики. – Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2012. – 252 с.

[3] Лекція до Модуля 2 – Задачі Коші для рівняння коливань струни

[4] Лекція до Модуля 2 – Мішані задачі для напівобмеженої струни

[5] Лекція до Модуля 2 – Метод відокремлення змінних для обмеженої струни

[6] Лекція до Модуля 2 – Загальна мішана задача для рівняння коливань струни

[7] Практичні до Модуля 2 – Метод відокремлення змінних