

МІШАНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОБМЕЖЕНОЇ СТРУНИ. МЕТОД ВІДОКРЕМЛЕННЯ ЗМІННИХ

Приклад 1. Знайти закон вільних коливань однорідної струни довжини l із вільними кінцями, якщо в початковий момент часу відхилення струни описувалося функцією $\varphi(x) = 1 + \cos \frac{\pi}{l}x$, а початкова швидкість точок струни була рівна $\psi(x) = 2x^3 - 3lx^2$.

Розв'язання. Відповідна математична модель: в області $\Omega = \{(t, x) | t > 0, 0 < x < l\}$ знайти розв'язок рівняння вільних коливань струни

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}, \quad (1.1)$$

який задовольняє початкові умови

$$U(0, x) = 1 + \cos \frac{\pi}{l}x, \quad U_t(0, x) = 2x^3 - 3lx^2, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (1.2)$$

та крайові умови

$$U_x(t, 0) = 0, \quad U_x(t, l) = 0, \quad t \geq 0. \quad (1.3)$$

Маємо задачу з однорідними крайовими умовами для рівняння вільних коливань струни. Початкові та крайові умови є узгодженими, отже, до задачі (1.1)-(1.2)-(1.3) застосовний метод відокремлення змінних (метод Фур'є). Згідно з алгоритмом цього методу розв'язок шукаємо у вигляді добутку двох функцій

$$U(t, x) = T(t) \cdot X(x) \neq 0, \quad (1.4)$$

кожна з яких знаходиться окремо з урахуванням рівняння (1.1) та умов (1.2), (1.3). Підставивши (1.4) у рівняння (1.1), одержимо:

$$T''(t) \cdot X(x) = a^2 T(t) \cdot X''(x).$$

Відокремивши змінні шляхом ділення лівої та правої частин останньої рівності на величину $a^2 T(t) \cdot X(x) \neq 0$, маємо

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Одержана рівність виконується для всіх $(t, x) \in \Omega$ тільки тоді, коли

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda = \text{const},$$

звідки маємо

$$T''(t) - \lambda a^2 T(t) = 0, \quad T(t) \neq 0; \quad (1.5)$$

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(x) \neq 0. \quad (1.6)$$

Підставивши (1.4) у крайові умови (1.3), одержимо

$$T(t) \cdot X'(0) = 0, \quad T(t) \cdot X'(l) = 0,$$

звідки, враховуючи, що $T(t) \neq 0$, маємо

$$X'(0) = 0, \quad X'(l) = 0. \quad (1.7)$$

Дослідимо задачу Штурма-Ліувілля (1.6)-(1.7). Для цього зауважимо, що характеристичне рівняння для ДР зі сталими коефіцієнтами (1.6)

$$k^2 - \lambda = 0$$

залежно від значення параметра λ може мати дійсні різні, кратні або комплексні корені. Тому для повного дослідження слід розглянути три випадки.

1. Нехай $\lambda > 0$. Тоді $k_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$ і загальний розв'язок рівняння (1.6) запишеться у вигляді $X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$. Підставивши цей розв'язок у крайові умови (1.7), одержимо лінійну однорідну систему відносно невідомих сталих C_1, C_2 :

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda}(C_1 - C_2) = 0; \\ \sqrt{\lambda}(C_1 e^{\sqrt{\lambda}l} - C_2 e^{-\sqrt{\lambda}l}) = 0. \end{cases}$$

Детермінант цієї системи $\Delta = -2\lambda \operatorname{sh} \sqrt{\lambda}l \neq 0$, оскільки $\sqrt{\lambda}l > 0$. Отже, $C_1 = C_2 = 0$, а тому $X(x) \equiv 0$ і у випадку $\lambda > 0$ власних значень не існує.

2. Нехай $\lambda = 0$. Тоді $k_{1,2} = 0$, $X(x) = C_3x + C_4$ і з крайових умов (1.7) одержимо:

$$\begin{cases} C_3 = 0; \\ C_4 = 0, \end{cases}$$

звідки $C_3 = 0$, C_4 – довільна стала. Отже, нетривіальний розв'язок існує при $C_4 \neq 0$, а тому $\lambda = 0$ є власним значенням, якому відповідає власна функція $X(x) = C_4$.

3. При $\lambda < 0$ $k_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}i$ і загальний розв'язок рівняння (1.6) запишеться у вигляді $X(x) = C_5 \cos \sqrt{-\lambda}x + C_6 \sin \sqrt{-\lambda}x$. Із крайових умов (1.7) одержимо:

$$\begin{cases} \sqrt{-\lambda}C_6 = 0; \\ \sqrt{-\lambda}(C_6 \cos \sqrt{-\lambda}l - C_5 \sin \sqrt{-\lambda}l) = 0, \end{cases}$$

звідки $C_6 = 0$ і $-\sqrt{-\lambda}C_5 \sin \sqrt{-\lambda}l = 0$. Отже, нетривіальний розв'язок задачі (1.6)-(1.7) існує тільки для тих значень параметра λ , які є розв'язками тригонометричного

рівняння $\sin \sqrt{-\lambda}l = 0$, звідки $\lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$, а відповідні власні функції матимуть

вигляд $X_n(x) = C_5 \cos \frac{\pi n}{l}x$, $n \in \mathbb{N}$.

Об'єднавши випадки $\lambda = 0$ і $\lambda < 0$, і взявши для визначеності $C_4 = C_5 = 1$, одержимо систему власних значень і власних функцій ЗШЛ (1.6)-(1.7):

$$\lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \cos \frac{\pi n}{l}x, \quad n = \overline{0, \infty}. \quad (1.8)$$

Підставивши знайдені власні значення у (1.5), отримаємо рівняння для визначення функцій $T(t)$

$$T_n''(t) + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n(t) = 0, \quad n = \overline{0, \infty},$$

загальний розв'язок якого має різний вигляд для випадків $n = 0$ та $n > 0$:

$$n = 0 \Rightarrow T_0(t) = A_0 t + B_0;$$

$$n > 0 \Rightarrow T_n(t) = A_n \cos \frac{\pi n a}{l} t + B_n \sin \frac{\pi n a}{l} t,$$

де $A_n, B_n, n = \overline{0, \infty}$ – довільні сталі.

Згідно з (1.4) функції

$$U_0(t, x) = T_0(t) X_0(x) = A_0 t + B_0,$$

$$U_n(t, x) = T_n(t) X_n(x) = \left(A_n \cos \frac{\pi n a}{l} t + B_n \sin \frac{\pi n a}{l} t \right) \cos \frac{\pi n}{l} x, \quad n \in \mathbb{N},$$

є частинними розв'язками ДРЧП (1.1), що справджують крайові умови (1.3). Тоді з урахуванням лінійності й однорідності ДРЧП (1.1) та крайових умов (1.3) загальний розв'язок ДРЧП (1.1), що справджує крайові умови (1.3), запишеться у вигляді лінійної комбінації частинних розв'язків

$$U(t, x) = A_0 t + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi n a}{l} t + B_n \sin \frac{\pi n a}{l} t \right) \cos \frac{\pi n}{l} x. \quad (1.9)$$

Визначимо коефіцієнти ряду (1.9) таким чином, щоб він справджував початкові умови (1.2). Підстановка (1.9) в (1.2) дає

$$U(0, x) \equiv B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{\pi n}{l} x = 1 + \cos \frac{\pi}{l} x, \quad (1.10)$$

$$U_t(0, x) \equiv A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\pi n a}{l} \cos \frac{\pi n}{l} x = 2x^3 - 3lx^2. \quad (1.11)$$

Права частина рівності (1.10) містить доданки, які є власними функціями (1.8) при $n = 0$ та $n = 1$ (**резонансний випадок**), тому коефіцієнти знаходяться без інтегрування. Рівність (1.10) очевидно виконується, якщо покласти

$$B_0 = A_1 = 1, \quad A_n = 0, \quad n = \overline{2, \infty}.$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів із рівності (1.11) розкладемо праву частину в ряд Фур'є по системі власних функцій (1.8) на проміжку $x \in [0, l]$:

$$2x^3 - 3lx^2 = \frac{\Psi_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n \cos \frac{\pi n}{l} x, \quad (1.12)$$

де коефіцієнти Фур'є обчислюються за формулами

$$\Psi_0 = \frac{2}{l} \int_0^l (2\xi^3 - 3l\xi^2) d\xi = -l^3,$$

$$\Psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l (2\xi^3 - 3l\xi^2) \cos \frac{\pi n}{l} \xi d\xi = \frac{24l^3}{(\pi n)^4} [1 - (-1)^n] = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ 48l^3 (\pi n)^{-4}, & n = 2k - 1. \end{cases}$$

Порівнюючи ряди (1.12) і (1.11), маємо

$$A_0 = \frac{\Psi_0}{2} = -\frac{l^3}{2}, \quad B_n = \frac{l}{\pi n a} \Psi_n = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \frac{48l^4}{a(\pi n)^5}, & n = 2k - 1 \quad (k = \overline{1, \infty}). \end{cases}$$

Підставивши знайдені коефіцієнти у ряд (1.9), одержимо шуканий розв'язок мішаної задачі (1.1)-(1.2)-(1.3) у вигляді

$$U(t, x) = 1 - \frac{l^3 t}{2} + \cos \frac{a\pi}{l} t \cos \frac{\pi}{l} x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{48l^4}{a[\pi(2k-1)]^5} \sin \frac{a\pi(2k-1)}{l} t \cos \frac{\pi(2k-1)}{l} x.$$

Відповідь.

$$U(t, x) = 1 - \frac{l^3 t}{2} + \cos \frac{a\pi}{l} t \cos \frac{\pi}{l} x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{48l^4}{a[\pi(2k-1)]^5} \sin \frac{a\pi(2k-1)}{l} t \cos \frac{\pi(2k-1)}{l} x.$$

Приклад 2. Знайти закон коливань однорідної струни одиничної довжини, лівий кінець якої вільний, а правий – пружно закріплений ($h = 1$), якщо коливання відбуваються тільки за рахунок дії рівномірно розподіленої уздовж струни зовнішньої сили інтенсивності $f(t, x) = 24e^{-t}(3 - x^2)$.

Розв'язання. Відповідна математична модель: в області $\Omega = \{(t, x) | t > 0, 0 < x < 1\}$ знайти розв'язок рівняння вимушених коливань струни

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + 24e^{-t}(3 - x^2), \quad (2.1)$$

який задовольняє початкові умови

$$U(0, x) = 0, \quad U_t(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.2)$$

та крайові умови

$$U_x(t, 0) = 0, \quad U_x(t, 1) + U(t, 1) = 0, \quad t \geq 0. \quad (2.3)$$

Маємо задачу з однорідними крайовими умовами для рівняння вимушених коливань струни. Вільний член у рівнянні справджує крайові умови (2.3), отже, до задачі (2.1)-(2.2)-(2.3) застосовний метод відокремлення змінних (метод Фур'є). Згідно з алгоритмом цього методу розв'язок шукаємо у вигляді

$$U(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x), \quad (2.4)$$

де $X_n(x)$ – власні функції задачі Штурма-Ліувілля для відповідної однорідної задачі

$$\begin{aligned} Z_{tt} &= a^2 Z_{xx}, \quad (t, x) \in \Omega, \\ Z(0, x) &= 0, \quad Z_t(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ Z_x(t, 0) &= 0, \quad Z_x(t, 1) + Z(t, 1) = 0, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Для знаходження власних функцій застосуємо до задачі (2.5) алгоритм, проілюстрований у Прикладі 1. Отже, шукаючи $Z(t, x)$ у вигляді добутку двох функцій

$$Z(t, x) = Q(t) \cdot X(x) \neq 0,$$

для визначення $X(x)$ отримуємо задачу Штурма-Ліувілля для рівняння (1.6) із крайовими умовами

$$X'(0) = 0, \quad X'(1) + X(1) = 0. \quad (2.6)$$

Дослідимо задачу Штурма-Ліувілля (1.6)-(2.6) аналогічно до Прикладу 1.

1. Нехай $\lambda > 0$. Тоді загальний розв'язок рівняння (1.6) запишеться у вигляді

$X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$. Підставивши цей розв'язок у крайові умови (2.6), одержимо:

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda}(C_1 - C_2) = 0; \\ \sqrt{\lambda}(C_1 e^{\sqrt{\lambda}} - C_2 e^{-\sqrt{\lambda}}) + C_1 e^{\sqrt{\lambda}} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}} = 0. \end{cases}$$

Детермінант цієї системи $\Delta = 2(\sqrt{\lambda} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda} + \lambda \operatorname{sh} \sqrt{\lambda}) \neq 0$, оскільки $\lambda > 0$. Отже, $C_1 = C_2 = 0$, а тому $X(x) \equiv 0$ і у випадку $\lambda > 0$ власних значень не існує.

2. Нехай $\lambda = 0$. Тоді $X(x) = C_3 x + C_4$ і з крайових умов (2.6) одержимо:

$$\begin{cases} C_3 = 0; \\ 2C_3 + C_4 = 0, \end{cases}$$

звідки $C_3 = C_4 = 0$, а тому $X(x) \equiv 0$ і $\lambda = 0$ не є власним значенням.

3. При $\lambda < 0$ загальний розв'язок рівняння (1.6) запишеться у вигляді

$X(x) = C_5 \cos \sqrt{-\lambda} x + C_6 \sin \sqrt{-\lambda} x$. Із крайових умов (2.6) одержимо:

$$\begin{cases} \sqrt{-\lambda} C_6 = 0; \\ \sqrt{-\lambda} (C_6 \cos \sqrt{-\lambda} - C_5 \sin \sqrt{-\lambda}) + C_5 \cos \sqrt{-\lambda} + C_6 \sin \sqrt{-\lambda} = 0, \end{cases}$$

звідки $C_6 = 0$ і $C_5 (\cos \sqrt{-\lambda} - \sqrt{-\lambda} \sin \sqrt{-\lambda}) = 0$. Отже, нетривіальний розв'язок задачі (1.6)-(2.6) існує тільки для тих значень параметра λ , які є розв'язками трансцендентного рівняння

$$\sqrt{-\lambda} = \operatorname{ctg} \sqrt{-\lambda}. \quad (2.7)$$

Останнє рівняння має безліч коренів (це можна легко показати графічно), які не знаходяться в явному вигляді. Введемо задля зручності позначення $\mu_n = \sqrt{-\lambda_n}$, де λ_n , $n \in \mathbb{N}$ – множина від'ємних коренів рівняння (2.7). Тоді, взявши для визначеності $C_5 = 1$, одержимо систему власних значень і власних функцій ЗШЛ (1.6)-(2.6):

$$\lambda_n = -\mu_n^2, \quad X_n(x) = \cos \mu_n x, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.8)$$

З урахуванням знайдених власних функцій (2.8) ряд (2.4) для шуканого розв'язку мішаної задачі (2.1)-(2.2)-(2.3) запишеться у вигляді

$$U(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cos \mu_n x. \quad (2.9)$$

Функція (2.9) очевидно справджує крайові умови (2.3). Залишилося визначити коефіцієнти $T_n(t)$ таким чином, щоб ряд (2.9) справджував неоднорідне рівняння (2.1) та однорідні початкові умови (2.2). Для цього спершу розкладемо вільний член рівняння (2.1) у ряд Фур'є по системі власних функцій (2.8) на проміжку $x \in [0; 1]$, тобто подамо її у вигляді

$$24e^{-t}(3-x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \cos \mu_n x, \quad (2.10)$$

де коефіцієнти Фур'є обчислюються згідно з загальною формулою

$$f_n(t) = \frac{24e^{-t} \int_0^1 (3-\xi^2) \cos \mu_n \xi d\xi}{\int_0^1 \cos^2 \mu_n \xi d\xi} = \frac{96 \sin \mu_n}{\mu_n^3 (1 + \sin^2 \mu_n)} e^{-t}.$$

Підставивши (2.9) і (2.10) у рівняння (2.1), одержимо

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t) \cos \mu_n x = -a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 T_n(t) \cos \mu_n x + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \cos \mu_n x,$$

або

$$\sum_{n=1}^{\infty} [T_n''(t) + (a\mu_n)^2 T_n(t) - f_n(t)] \cos \mu_n x = 0.$$

Остання рівність можлива тоді й тільки тоді, коли

$$T_n''(t) + (a\mu_n)^2 T_n(t) = f_n(t) = \frac{96 \sin \mu_n}{\mu_n^3 (1 + \sin^2 \mu_n)} e^{-t}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.11)$$

Підставляючи (2.9) у початкові умови (2.2), маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \cos \mu_n x = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0) \cos \mu_n x = 0,$$

звідки очевидно випливають початкові умови

$$T_n(0) = 0, \quad T_n'(0) = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.12)$$

Знайдемо розв'язок задачі Коші (2.11)-(2.12) із застосуванням методу невизначених коефіцієнтів. Загальний розв'язок відповідного до (2.11) однорідного рівняння має вигляд

$$T_{n_{3.o.}}(t) = A_n \cos a\mu_n t + B_n \sin a\mu_n t, \quad n \in \mathbb{N},$$

де A_n, B_n – довільні сталі. Частинний розв'язок рівняння (2.11) згідно з правилами методу невизначених коефіцієнтів можна шукати у вигляді

$$T_{n_{ч.н.}}(t) = C e^{-t}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Шляхом підстановки в рівняння (2.11) знаходимо значення невизначеного коефіцієнта

$$C = \frac{96 \sin \mu_n}{\mu_n^3 (1 + \sin^2 \mu_n) [1 + (a\mu_n)^2]}.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (2.11) має вигляд

$$T_n(t) = T_{n_{3.o.}}(t) + T_{n_{ч.н.}}(t) = A_n \cos a\mu_n t + B_n \sin a\mu_n t + \frac{96 \sin \mu_n e^{-t}}{\mu_n^3 (1 + \sin^2 \mu_n) [1 + (a\mu_n)^2]}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.13)$$

Підстановка (2.13) у початкові умови (2.12) дає

$$T_n(0) \equiv A_n + \frac{96 \sin \mu_n}{\mu_n^3 (1 + \sin^2 \mu_n) [1 + (a\mu_n)^2]} = 0,$$

$$T_n'(0) \equiv a\mu_n B_n - \frac{96 \sin \mu_n}{\mu_n^3 (1 + \sin^2 \mu_n) [1 + (a\mu_n)^2]} = 0.$$

Визначивши з останніх рівностей A_n, B_n , і підклавши отримані значення в (2.13), дістанемо розв'язок задачі Коші (2.11)-(2.12)

$$T_n(t) = \frac{96 \sin \mu_n}{\mu_n^3 (1 + \sin^2 \mu_n) [1 + (a\mu_n)^2]} \left(\frac{1}{a\mu_n} \sin a\mu_n t - \cos a\mu_n t + e^{-t} \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Підставивши знайдені функції у (2.9), одержимо шуканий розв'язок мішаної задачі (2.1)-(2.2)-(2.3).

Відповідь.
$$U(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{96 \sin \mu_n}{\mu_n^3 (1 + \sin^2 \mu_n) [1 + (a\mu_n)^2]} \left(\frac{1}{a\mu_n} \sin a\mu_n t - \cos a\mu_n t + e^{-t} \right) \cos \mu_n x,$$

де μ_n – додатні корені трансцендентного рівняння $\mu = \operatorname{ctg} \mu$.

Приклад 3. Дати фізичну інтерпретацію поставленої мішаної задачі та знайти її розв'язок:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + A(x^2 - x) \sin t, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1, \quad (3.1)$$

$$U(0, x) = 0, \quad U_t(0, x) = A(x - 1), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (3.2)$$

$$U_x(t, 0) = A \sin t, \quad U(t, 1) = 0, \quad t \geq 0, \quad (3.3)$$

де $A = \text{const} > 0$.

Розв'язання. Фізична інтерпретація: знайти закон коливань однорідної струни одиничної довжини, лівий кінець якої піддається дії змінної сили, а правий – нерухомо закріплений, якщо на струну додатково діє рівномірно розподілена по всій її довжині зовнішня сила інтенсивності $f(t, x) = A(x^2 - x) \sin t$. У початковий момент часу струна перебувала в рівновазі, а початкова швидкість її точок описувалася функцією $\psi(x) = A(x - 1)$.

Маємо задачу з неоднорідними крайовими умовами, залежними від часу (загальна мішана задача). Для застосування методу відокремлення змінних необхідно спершу звести задачу (3.1)-(3.2)-(3.3) до задачі з однорідними крайовими умовами підстановкою

$$U(t, x) = V(t, x) + \omega(t, x), \quad (3.4)$$

де $V(t, x)$ – нова невідома функція, а допоміжна функція $\omega(t, x)$ повинна справджувати крайові умови (3.3), тобто

$$\omega_x(t, 0) = A \sin t, \quad \omega(t, 1) = 0, \quad t \geq 0. \quad (3.5)$$

Згідно з правилами знаходження допоміжної функції $\omega(t, x)$ шукаємо у вигляді $\omega(t, x) = a(t)x + b(t)$. Коефіцієнти знаходяться безпосередньою підстановкою у (3.5):

$$\omega_x(t, 0) \equiv a(t) = A \sin t, \quad \omega(t, 1) \equiv a(t) + b(t) = 0, \quad t \geq 0,$$

звідки

$$a(t) = A \sin t, \quad b(t) = -A \sin t,$$

тобто

$$\omega(t, x) = A(x - 1) \sin t.$$

Тоді підстановка (3.4) запишеться у вигляді

$$U(t, x) = V(t, x) + A(x - 1) \sin t. \quad (3.6)$$

Введемо підстановку (3.6) у рівняння (3.1), початкові умови (3.2) та крайові умови (3.3). Маємо:

$$V_{tt} - A(x - 1) \sin t = a^2 V_{xx} + A(x^2 - x) \sin t,$$

$$V(0, x) = 0, \quad V_t(0, x) + A(x - 1) = A(x - 1),$$

$$V_x(t, 0) + A \sin t = A \sin t, \quad V(t, 1) = 0.$$

Після спрощення останніх рівностей отримаємо мішану задачу для визначення нової невідомої функції $V(t, x)$:

$$V_{tt} = a^2 V_{xx} + A(x^2 - 1) \sin t, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$V(0, x) = 0, \quad V_t(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (3.7)$$

$$V_x(t, 0) = 0, \quad V(t, 1) = 0, \quad t \geq 0.$$

Одержана мішана задача (3.7) є задачею з однорідними крайовими умовами для рівняння вимушених коливань струни. Вільний член у рівнянні справджує крайові умови, отже, до задачі (3.7) застосовний метод відокремлення змінних (метод Фур'є).

Згідно з алгоритмом цього методу, проілюстрованим у Прикладі 2, розв'язок шукаємо у вигляді

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x), \quad (3.8)$$

де $X_n(x)$ – власні функції задачі Штурма-Ліувілля для відповідної однорідної задачі

$$\begin{aligned} Z_{tt} &= a^2 Z_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1, \\ Z(0, x) &= 0, \quad Z_t(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ Z_x(t, 0) &= 0, \quad Z(t, 1) = 0, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Шукаючи $Z(t, x)$ у вигляді добутку двох функцій

$$Z(t, x) = Q(t) \cdot X(x) \neq 0,$$

аналогічно до попередніх прикладів для визначення $X(x)$ отримуємо задачу Штурма-Ліувілля для рівняння (1.6) із крайовими умовами

$$X'(0) = 0, \quad X(1) = 0. \quad (3.10)$$

Дослідимо задачу Штурма-Ліувілля (1.6)-(3.10) за вже відомою з попередніх прикладів схемою.

1. Нехай $\lambda > 0$. Тоді загальний розв'язок рівняння (1.6) запишеться у вигляді $X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$. Підставивши цей розв'язок у крайові умови (3.10), одержимо:

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda}(C_1 - C_2) = 0; \\ C_1 e^{\sqrt{\lambda}} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}} = 0. \end{cases}$$

Детермінант цієї системи $\Delta = 2\sqrt{\lambda} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda} \neq 0$, оскільки $\lambda > 0$. Отже, $C_1 = C_2 = 0$, а тому $X(x) \equiv 0$ і у випадку $\lambda > 0$ власних значень не існує.

2. Нехай $\lambda = 0$. Тоді $X(x) = C_3 x + C_4$ і з крайових умов (3.10) одержимо:

$$\begin{cases} C_3 = 0; \\ C_3 + C_4 = 0, \end{cases}$$

звідки $C_3 = C_4 = 0$, а тому $X(x) \equiv 0$ і $\lambda = 0$ не є власним значенням.

3. При $\lambda < 0$ загальний розв'язок рівняння (1.6) запишеться у вигляді

$X(x) = C_5 \cos \sqrt{-\lambda}x + C_6 \sin \sqrt{-\lambda}x$. Із крайових умов (3.10) одержимо:

$$\begin{cases} \sqrt{-\lambda}C_6 = 0; \\ C_5 \cos \sqrt{-\lambda} + C_6 \sin \sqrt{-\lambda} = 0, \end{cases}$$

звідки $C_6 = 0$ і $C_5 \cos \sqrt{-\lambda} = 0$. Отже, нетривіальний розв'язок задачі (1.6)-(3.10) існує тільки для тих значень параметра λ , які є розв'язками тригонометричного рівняння

рівняння $\cos \sqrt{-\lambda} = 0$, звідки $\lambda_n = -\left[\frac{\pi(2n-1)}{2}\right]^2$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді відповідні власні функції

матимуть вигляд (беремо для визначеності $C_5 = 1$)

$$X_n(x) = \cos \frac{\pi(2n-1)}{2} x, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.11)$$

З урахуванням знайдених власних функцій (3.11) ряд (3.8) для шуканого розв'язку мішаної задачі (3.7) запишеться у вигляді

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cos \frac{\pi(2n-1)}{2} x. \quad (3.12)$$

Функція (3.12) очевидно справджує крайові умови задачі (3.7). Залишилося визначити коефіцієнти $T_n(t)$ таким чином, щоб ряд (3.12) справджував неоднорідне рівняння та однорідні початкові умови задачі (3.7). Для цього спершу розкладемо вільний член рівняння у ряд Фур'є по системі власних функцій (3.11) на проміжку $x \in [0;1]$, тобто подамо її у вигляді

$$A(x^2 - 1) \sin t = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \cos \frac{\pi(2n-1)}{2} x, \quad (3.13)$$

де коефіцієнти Фур'є обчислюються згідно з формулою

$$f_n(t) = 2A \sin t \int_0^1 (\xi^2 - 1) \cos \frac{\pi(2n-1)}{2} \xi d\xi = \frac{32A \cdot (-1)^n}{[\pi(2n-1)]^3} \sin t.$$

Підставивши (3.12) і (3.13) у рівняння задачі (3.7), одержимо

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t) \cos \frac{\pi(2n-1)}{2} x = -a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\pi(2n-1)}{2} \right]^2 T_n(t) \cos \frac{\pi(2n-1)}{2} x + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \cos \frac{\pi(2n-1)}{2} x,$$

або

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ T_n''(t) + \left[\frac{a\pi(2n-1)}{2} \right]^2 T_n(t) - f_n(t) \right\} \cos \frac{\pi(2n-1)}{2} x = 0.$$

Остання рівність можлива тоді й тільки тоді, коли

$$T_n''(t) + \left[\frac{a\pi(2n-1)}{2} \right]^2 T_n(t) = f_n(t) = \frac{32A \cdot (-1)^n}{\pi^3 (2n-1)^3} \sin t, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.14)$$

Підставляючи (3.12) у початкові умови задачі (3.7), маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \cos \frac{\pi(2n-1)}{2} x = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0) \cos \frac{\pi(2n-1)}{2} x = 0,$$

звідки очевидно випливають початкові умови (2.12).

Знайдемо розв'язок задачі Коші (3.14)-(2.12) із застосуванням методу невизначених коефіцієнтів. Загальний розв'язок відповідного до (3.14) однорідного рівняння має вигляд

$$T_{n_{3.o.}}(t) = A_n \cos \frac{a\pi(2n-1)}{2} t + B_n \sin \frac{a\pi(2n-1)}{2} t, \quad n \in \mathbb{N}.$$

де A_n, B_n – довільні сталі. Частинний розв'язок рівняння (3.14) згідно з правилами методу невизначених коефіцієнтів можна шукати у вигляді

$$T_{n_{ч.н.}}(t) = C \sin t + D \cos t, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Шляхом підстановки в рівняння (3.14) знаходимо значення невизначених коефіцієнтів

$$C = \frac{128A \cdot (-1)^n}{[\pi(2n-1)]^3 \cdot [(a\pi)^2 (2n-1)^2 - 4]}, \quad D = 0.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (3.14) має вигляд

$$T_n(t) = T_{n_{3.o.}}(t) + T_{n_{ч.н.}}(t) = A_n \cos \frac{a\pi(2n-1)}{2}t + B_n \sin \frac{a\pi(2n-1)}{2}t + \frac{128A \cdot (-1)^n \sin t}{[\pi(2n-1)]^3 \cdot [(a\pi)^2(2n-1)^2 - 4]}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.15)$$

Підстановка (3.15) у початкові умови (2.12) дає

$$T_n(0) \equiv A_n = 0,$$

$$T_n'(0) \equiv \frac{a\pi(2n-1)}{2} B_n + \frac{128A \cdot (-1)^n}{[\pi(2n-1)]^3 \cdot [(a\pi)^2(2n-1)^2 - 4]} = 0.$$

Визначивши з останніх рівностей A_n , B_n , і підклавши отримані значення в (3.15), дістанемо розв'язок задачі Коші (3.14)-(2.12)

$$T_n(t) = \frac{128A \cdot (-1)^n}{[\pi(2n-1)]^3 \cdot [(a\pi)^2(2n-1)^2 - 4]} \left(\sin t - \frac{2}{a\pi(2n-1)} \sin \frac{a\pi(2n-1)}{2}t \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Підставивши знайдені функції у (3.12), одержимо розв'язок мішаної задачі (3.7). Тоді шуканий розв'язок задачі (3.1)-(3.2)-(3.3) визначається підстановкою знайденого розв'язку $V(t, x)$ задачі (3.7) у формулу (3.6).

Відповідь.

$$U(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{128A \cdot (-1)^n}{[\pi(2n-1)]^3 \cdot [(a\pi)^2(2n-1)^2 - 4]} \left(\sin t - \frac{2}{a\pi(2n-1)} \sin \frac{a\pi(2n-1)}{2}t \right) \times \times \cos \frac{\pi(2n-1)}{2}x + A(x-1)\sin t.$$

Приклад 4. Дати фізичну інтерпретацію поставленої мішаної задачі та знайти її розв'язок:

$$U_{tt} = 4U_{xx} + 2, \quad t > 0, \quad 0 < x < 2, \quad (4.1)$$

$$U(0, x) = x, \quad U_t(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad (4.2)$$

$$U(t, 0) = 0, \quad U_x(t, 2) = 1, \quad t \geq 0. \quad (4.3)$$

Розв'язання. Фізична інтерпретація: знайти закон коливань однорідної ($a = 2$) струни довжини $l = 2$, лівий кінець якої нерухомо закріплений, а правий піддається дії сталої сили, якщо на струну додатково діє рівномірно розподілена по всій її довжині зовнішня сила сталої інтенсивності. Початкове відхилення струни описується функцією $\varphi(x) = x$, а початкова швидкість її точок рівна нулеві.

Вільний член у рівнянні (4.1) і крайові умови (4.3) не залежать явно від змінної часу, тому маємо задачу зі стаціонарними неоднорідностями. Для застосування методу відокремлення змінних необхідно спершу звести задачу (4.1)-(4.2)-(4.3) до однорідної підстановкою

$$U(t, x) = V(t, x) + \omega(x), \quad (4.4)$$

де $V(t, x)$ – нова невідома функція, а допоміжна функція (статичний прогин) $\omega(x)$ має справджувати рівняння (4.1) та крайові умови (4.3), тобто має бути розв'язком наступної крайової задачі (отримується шляхом безпосередньої підстановки):

$$\begin{aligned} 4\omega''(x) + 2 &= 0, \\ \omega(0) &= 0, \quad \omega'(2) = 1. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Зінтегруємо крайову задачу (4.5). Із рівняння маємо

$$\omega'' = -\frac{1}{2} \Rightarrow \omega' = -\frac{x}{2} + C_1 \Rightarrow \omega = -\frac{x^2}{4} + C_1x + C_2.$$

З урахуванням крайових умов

$$\begin{aligned} \omega(0) = 0 &\Rightarrow C_2 = 0, \\ \omega'(2) = 1 &\Rightarrow C_1 = 2. \end{aligned}$$

Отже, крайова задача (4.5) має єдиний розв'язок, тобто існує статичний прогин

$$\omega(x) = -\frac{x^2}{4} + 2x,$$

а тому підстановка (4.4) запишеться у вигляді

$$U(t, x) = V(t, x) - 0,25x^2 + 2x. \quad (4.6)$$

Введемо підстановку (4.6) у рівняння (4.1), початкові умови (4.2) та крайові умови (4.3). Маємо:

$$\begin{aligned} V_{tt} &= 4[V_{xx} - 0,5] + 2, \\ V(0, x) - 0,25x^2 + 2x &= x, \quad V_t(0, x) = 0, \\ V(t, 0) &= 0, \quad V_x(t, 2) - 1 + 2 = 1. \end{aligned}$$

Після спрощення останніх рівностей отримаємо мішану задачу для визначення нової невідомої функції $V(t, x)$:

$$\begin{aligned} V_{tt} &= 4V_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 2, \\ V(0, x) &= 0,25x^2 - x, \quad V_t(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 2, \\ V(t, 0) &= 0, \quad V_x(t, 2) = 0, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Маємо задачу з однорідними крайовими умовами для рівняння вільних коливань струни, подібну до розв'язаної у Прикладі 1. Початкові та крайові умови є узгодженими, отже, до задачі (4.7) застосовний метод відокремлення змінних (метод Фур'є), згідно з яким розв'язок шукаємо у вигляді добутку двох функцій

$$V(t, x) = T(t) \cdot X(x) \neq 0. \quad (4.8)$$

Підставивши (4.8) у рівняння і крайові умови задачі (4.7) і відокремивши змінні аналогічно до Прикладу 1, для визначення $T(t)$ дістанемо рівняння

$$T''(t) - 4\lambda T(t) = 0, \quad T(t) \neq 0, \quad (4.9)$$

а для визначення $X(x)$ – задачу Штурма-Ліувілля для рівняння (1.6) із крайовими умовами

$$X(0) = 0, \quad X'(2) = 0. \quad (4.10)$$

Дослідимо задачу Штурма-Ліувілля (1.6)-(4.10). Для цього, як і в попередніх прикладах, слід розглянути три випадки.

1. Нехай $\lambda > 0$. Тоді загальний розв'язок рівняння (1.6) запишеться у вигляді

$X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$. Підставивши цей розв'язок у крайові умови (4.10), одержимо

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0; \\ \sqrt{\lambda}(C_1 e^{2\sqrt{\lambda}} - C_2 e^{-2\sqrt{\lambda}}) = 0. \end{cases}$$

Детермінант цієї системи $\Delta = -2\sqrt{\lambda} \operatorname{ch} 2\sqrt{\lambda} \neq 0$, оскільки $\lambda > 0$. Отже, $C_1 = C_2 = 0$, а тому $X(x) \equiv 0$ і у випадку $\lambda > 0$ власних значень не існує.

2. Нехай $\lambda = 0$. Тоді $X(x) = C_3 x + C_4$ і з крайових умов (4.10) одержимо:

$$\begin{cases} C_4 = 0; \\ C_3 = 0, \end{cases}$$

звідки $X(x) \equiv 0$, а тому $\lambda = 0$ не є власним значенням.

3. При $\lambda < 0$ загальний розв'язок рівняння (1.6) запишеться у вигляді

$X(x) = C_5 \cos \sqrt{-\lambda} x + C_6 \sin \sqrt{-\lambda} x$. Із крайових умов (4.10) одержимо:

$$\begin{cases} C_5 = 0; \\ \sqrt{-\lambda}(C_6 \cos 2\sqrt{-\lambda} - C_5 \sin 2\sqrt{-\lambda}) = 0, \end{cases}$$

звідки $C_5 = 0$ і $\sqrt{-\lambda} C_6 \cos 2\sqrt{-\lambda} = 0$. Отже, нетривіальний розв'язок задачі (1.6)-(4.10) існує тільки для тих значень параметра λ , які є розв'язками тригонометричного

рівняння $\cos 2\sqrt{-\lambda} = 0$, звідки $\lambda_n = -\left[\frac{\pi(2n-1)}{4}\right]^2$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді відповідні власні

функції матимуть вигляд (беремо для визначеності $C_6 = 1$)

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi(2n-1)}{4} x, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.11)$$

Підставивши знайдені власні значення у (4.9), отримаємо рівняння для визначення функцій $T(t)$

$$T_n''(t) + \left[\frac{\pi(2n-1)}{2}\right]^2 T_n(t) = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

загальний розв'язок якого має вигляд

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{\pi(2n-1)}{2} t + B_n \sin \frac{\pi(2n-1)}{2} t, \quad n \in \mathbb{N},$$

де $A_n, B_n, n \in \mathbb{N}$ – довільні сталі.

Повторюючи міркування, викладені в Прикладі 1, отримуємо ряд для розв'язку мішаної задачі (4.7):

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi(2n-1)}{2} t + B_n \sin \frac{\pi(2n-1)}{2} t \right) \sin \frac{\pi(2n-1)}{4} x. \quad (4.12)$$

Шляхом безпосередньої підстановки визначимо коефіцієнти ряду (4.12) таким чином, щоб він справджував початкові умови задачі (4.7):

$$V(0, x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi(2n-1)}{4} x = \frac{x^2}{4} - x, \quad (4.13)$$

$$V_t(0, x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\pi(2n-1)}{2} \sin \frac{\pi(2n-1)}{4} x = 0. \quad (4.14)$$

Із рівності (4.14) очевидно випливає, що

$$B_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів A_n із рівності (4.13) розкладемо праву частину в ряд Фур'є по системі власних функцій (4.11) на проміжку $x \in [0;2]$:

$$\frac{x^2}{4} - x = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi(2n-1)}{4} x, \quad (4.15)$$

де коефіцієнти Фур'є обчислюються за формулою

$$\varphi_n = \int_0^2 \left(\frac{\xi^2}{4} - \xi \right) \sin \frac{\pi(2n-1)}{4} \xi d\xi = -\frac{32}{(2n-1)^3 \pi^3}.$$

Порівнюючи ряди (4.13) і (4.15), маємо

$$A_n = \varphi_n = -\frac{32}{(2n-1)^3 \pi^3}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти у ряд (4.12), одержимо розв'язок мішаної задачі (4.7). Тоді шуканий розв'язок задачі (4.1)-(4.2)-(4.3) визначається підстановкою знайденого розв'язку $V(t,x)$ задачі (4.7) у формулу (4.6).

Відповідь.
$$U(t,x) = 2x - \frac{x^2}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{32}{[\pi(2n-1)]^3} \cos \frac{\pi(2n-1)}{2} t \sin \frac{\pi(2n-1)}{4} x.$$

Джерела:

Перестюк М. О., Маринець В. В. Теорія рівнянь математичної фізики. – К.: Либідь, 2001. – С. 108-120.

Перестюк М. О., Маринець В. В., Рего В. Л. Збірник задач з математичної фізики. – Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2012. – С. 78-90.

Цикл лекцій по темах розділу «Мішані задачі для обмеженої струни. Метод відокремлення змінних».