

**Курс: «Практикум з розв'язування  
олімпіадних та конкурсних задач»  
Навчальний матеріал до Теми 13:**

**ст. викл. Рого В. Л.**

## **Числові ребуси**

## 1. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЧИСЛОВИХ РЕБУСІВ

**Задача-розминка.** Дано порожню клітинкову таблицю 3x3. Заповнити її всіма цифрами, крім 0, так, щоб по горизонталях, по вертикалях і по діагоналях була однакова сума.

**Обговорення отриманих результатів між групами.** Зрозуміло, що треба додати усі цифри та отримати 45. Це число розділити на 3, отримати 15. Отже, сума по горизонталях, по вертикалях і по діагоналях рівна 15. Середня серед цих цифр, а це 5, повинна стояти в центральній клітинці. Тоді в сусідніх із нею клітинках повинні стояти непарні цифри. У кутових клітинках повинні стояти парні числа. Знайшовши один такий набір, можна отримати ще вісім таких квадратів за допомогою повороту навколо центральної клітинки.

**Числові ребуси** – це завдання, в яких треба відновити цифри у буквеному записі арифметичної дії. Однаковим буквам відповідають однакові цифри, різним буквам відповідають різні цифри.

Зауважимо, що простіші числові ребуси часто мають кілька варіантів відповіді. У такому разі повне розв'язання повинне включати всі можливі варіанти.

**Ребус 1.** У заданій буквеній рівності  $РАК + БУГ = РІКА$  треба замінити букви цифрами, але так, щоб зробити цю рівність правильною: при цьому однаковим буквам відповідають рівні цифри, а різним буквам відповідають нерівні цифри.

**Розв'язання.** Сума двох трицифрових чисел дає чотирицифрове. Звідси одразу випливає, що «Р = 1». Тоді, співставляючи «сотні» й «тисячі» доданків і суми, робимо висновок, що «І = 0», оскільки цифра «1» уже зайнята, а «Б» може дорівнювати лише 8 або 9. Отже, на цьому етапі розв'язання результат додавання набуває вигляду

$$\begin{array}{r} 1 \text{ А К} \\ + \\ \text{Б У Г} \\ \hline 1 \text{ 0 К А} \end{array} \quad (1.1)$$

Щоб знайти значення інших букв, проведемо повний аналіз можливих варіантів з урахуванням того, що цифри «0» і «1» уже зайняті. Результати подамо у вигляді таблиці, виходячи із можливих значень однієї з букв, наприклад, «А»:

А	К	Г	У	Б	Результат
2	7	5	4	9	$127 + 945 = 1072$
2	5	7	2	9	неможливо
2	8	4	5	9	$128 + 954 = 1082$
2	4	8	1	9	неможливо
2	9	3	6	9	неможливо

<b>А</b>	<b>К</b>	<b>Г</b>	<b>У</b>	<b>Б</b>	<b>Результат</b>
2	3	9	0	9	неможливо
3	7	6	3	9	неможливо
3	6	7	2	9	$136 + 927 = 1063$
3	8	5	4	9	$138 + 945 = 1083$
3	5	8	1	9	неможливо
3	9	4	5	9	неможливо
3	4	9	0	9	неможливо
4	9	5	4	8	неможливо
4	5	9	0	8	неможливо
4	8	6	3	9	$148 + 936 = 1084$
4	6	8	1	9	неможливо
5	9	6	3	8	$159 + 836 = 1095$
5	6	9	0	8	неможливо
5	8	7	2	9	$158 + 927 = 1085$
5	7	8	1	9	неможливо
5	3	2	8	8	неможливо
5	2	3	7	8	$152 + 873 = 1025$
6	9	7	2	9	неможливо
6	7	9	0	9	неможливо
6	4	2	8	8	неможливо
6	2	4	6	8	неможливо
7	5	2	8	8	неможливо
7	2	5	5	8	неможливо
7	4	3	7	8	неможливо
7	3	4	6	8	$173 + 864 = 1037$
8	6	2	8	8	неможливо
8	2	6	4	8	неможливо
8	5	3	7	8	неможливо
8	3	5	5	8	неможливо
9	7	2	8	8	неможливо
9	2	7	3	8	$192 + 837 = 1029$
9	6	3	7	8	$196 + 873 = 1069$
9	3	6	4	8	$193 + 846 = 1039$
9	5	4	6	8	$195 + 864 = 1059$
9	4	5	5	8	неможливо

*Відповідь.* Ребус має 13 варіантів розв'язання, які подані в останньому стовпці таблиці (виділені жовтим кольором).

**Ребус 2.** При додаванні двох чисел цифри замінили літерами (однакові цифри – однаковими літерами) та одержали результат:

$$\begin{array}{r} \text{СОРОК} \\ + \\ \text{ОДИН} \\ \hline \text{ТРИСТА} \end{array}$$

Відновити цифри, які замінено літерами.

**Розв'язання.** Нагадаємо, що: *за додавання відповідних одиниць певного розряду двох чисел (одиниць, десятків, сотень; одиниць тисяч, десятків тисяч, сотень тисяч і т.д.) «за правилом переходу через розряд у десятковій системі числення» до наступного розряду може перейти щонайбільше одна розрядна одиниця.*

1) Співставляючи «десятки тисяч» та «сотні тисяч» першого доданку та суми, з урахуванням вищезгаданого правила можна зробити висновок, що «Т = 1». І тому результат додавання набуває вигляду

$$\begin{array}{r} \text{СОРОК} \\ + \\ \text{ОДИН} \\ \hline \text{1 РИС1А} \end{array} \quad (2.1)$$

2) Співставляючи «одиниці тисяч» та «десятки тисяч» доданків та суми з (2.1), методом від супротивного можна зробити висновок, що «С = 9», звідки

а) «Р» може бути тільки нулем, і тому результат додавання набуває вигляду

$$\begin{array}{r} \text{9000К} \\ + \\ \text{ОДИН} \\ \hline \text{10И91А} \end{array} \quad (2.2)$$

б) крім того, «О» повинна бути або п'ятіркою, або шісткою, або сімкою, або вісімкою, або ж дев'яткою.

Проте за умовою різні літери повинні відповідати різним цифрам. І тому

б1) «О» не може дорівнювати 9;

б2) якщо припустити, що «О = 5», то «И = 0» або ж «И = 1», чого бути не може, бо цифри 0 і 1 вже відповідають іншим літерам;

б3) якщо припустити, що «О = 6», то «И = 2» або ж «И = 3», чого бути не може, бо: у випадку, коли «И = 2» – «О + И = 8», а тому сума десятків при будь-яких цифрах у розряді одиниць не може закінчуватися одиницею; у випадку, коли «И = 3» – «О + И = 9», а тому

сума десятків при будь-яких цифрах у розряді одиниць не може закінчуватися одиницею;

64) якщо припустити, що «О = 8», то «И = 6» або ж «И = 7», чого бути не може, бо: у випадку, коли «И = 6» – «О + И = 14», а тому сума десятків при будь-яких цифрах у розряді одиниць не може закінчуватися одиницею; у випадку, коли «И = 7» – «О + И = 16», а тому сума десятків при будь-яких цифрах у розряді одиниць не може закінчуватися одиницею;

Таким чином, «О» може бути лише цифрою 7. І тому результат додавання на підставі (2.2) набуває вигляду

$$\begin{array}{r} 9707К \\ + \\ 7ДИН \\ \hline 10И91А \end{array} \quad (2.3)$$

3) Співставляючи «сотні» доданків і суми із (2.3), неважко переконатися, що «Д» може бути лише цифрою 8. Але ж тоді «И» може бути тільки цифрою 4. Тому результат додавання набуває вигляду

$$\begin{array}{r} 9707К \\ + \\ 784Н \\ \hline 10491А \end{array} \quad (4)$$

4) Очевидно, що незадіяними залишилися тільки цифри 2, 3, 5 та 6.

Співставляючи розряди «одиниць» доданків і суми з (4), неважко переконатися, що можуть бути лише два випадки:

або «К = 2», «Н = 3», «А = 5»;

або «К = 3», «Н = 2», «А = 5».

Таким чином, шуканими доданками (з відновленою однаковою сумою 104 915) є числа 97 073 і 7 842 або ж 97 072 і 7 843.

$$\begin{array}{r} 97073 \\ + \\ 7842 \\ \hline 104915 \end{array} \quad \text{або} \quad \begin{array}{r} 97072 \\ + \\ 7843 \\ \hline 104915 \end{array}$$

Відповідь.

Іноді числові ребуси записують за допомогою геометричних фігур або інших позначень.

**Ребус 3.** При множенні двох чисел деякі цифри замінили «\*» («зірочками») та одержали результат:

$$\begin{array}{r}
 * 1 * \\
 \times \\
 3 * 2 \\
 \hline
 * 3 * \\
 + 3 * 2 * \\
 * 2 * 5 \\
 \hline
 1 * 8 * 3 *
 \end{array}$$

Відновити цифри, які замінено «зірочками».

**Розв'язання.** Заради зручності та спрощення подальших пояснень замінимо зірочки в умові даного числового ребусу літерами латинської абетки, причому різним літерам можуть відповідати однакові цифри:

$$\begin{array}{r}
 a 1 b \\
 \times \\
 3 c 2 \\
 \hline
 d 3 e \\
 + 3 f 2 g \\
 h 2 k 5 \\
 \hline
 1 l 8 m 3 n
 \end{array}$$

1) Оскільки  $3 + 2 = 5$ , то  $l = 5$  або  $l = 6$ . Тому  $h$  може бути лише 1, тобто

$$\begin{array}{r}
 a 1 b \\
 \times \\
 3 c 2 \\
 \hline
 d 3 e \\
 + 3 f 2 g \\
 1 2 k 5 \\
 \hline
 1 l 8 m 3 n
 \end{array}$$

2) Оскільки число  $12k5$  є результатом множення числа  $a1b$  на цифру 3, то  $b$  може бути лише 5.

3) Оскільки число  $d3e$  є результатом множення числа  $a15$  на цифру 2, то  $e$  може бути лише 0, звідки  $n = 0$ .

- 4) Оскільки число  $12k5$  є результатом множення числа  $a15$  на цифру 3, то  $k$  може бути лише 4. На цьому етапі розв'язання отримуємо:

$$\begin{array}{r}
 a15 \\
 \times \\
 3c2 \\
 \hline
 d30 \\
 + 3f2g \\
 1245 \\
 \hline
 118m30
 \end{array}$$

- 5) Оскільки число  $1245$  є результатом множення числа  $a15$  на цифру 3, то  $a$  може бути лише 4.  
 6) Оскільки число  $d30$  є результатом множення числа  $415$  на цифру 2, то  $d$  може бути лише 8, тобто  
 7) Оскільки  $8 + 2 + 5 = 15$ , то  $m$  може бути лише 5, і на цьому етапі розв'язання отримуємо:

$$\begin{array}{r}
 415 \\
 \times \\
 3c2 \\
 \hline
 830 \\
 + 3f2g \\
 1245 \\
 \hline
 158530
 \end{array}$$

- 8) Оскільки  $f$  – цифра, то з урахуванням переносу при додаванні «сотень» у «тисячах» отримуємо  $f + 4 + 1 = 8$ , звідки  $f = 3$ .  
 9) Оскільки  $g$  – цифра, то додавання «десятків» дає  $3 + g = 3$ , звідки  $g = 0$ .  
 10) Оскільки число  $3320$  є результатом множення числа  $415$  на цифру  $c$ , то  $c$  може бути лише 8. Тим самим відновлено останню невідому цифру.

*Відповідь.*

$$\begin{array}{r}
 415 \\
 \times \\
 382 \\
 \hline
 830 \\
 + 3320 \\
 1245 \\
 \hline
 158530
 \end{array}$$

**Ребус 4.** Замінити фігурки цифрами таким чином, щоб виконувалися всі вказані в завданні дії. Однаковим фігуркам відповідають однакові цифри:

$$\begin{array}{r}
 \bigcirc \square \bullet - \blacksquare \blacktriangle = \square \bullet \bigcirc \\
 : \quad \quad \quad + \quad \quad \quad - \\
 \textcircled{S} \times \text{☺} = \boxtimes \bigcirc \\
 \hline
 \bigcirc \boxtimes + \bullet \triangle = \text{☺} \blacktriangle
 \end{array}$$

**Розв'язання.** Визначаємо поетапно:

- 1) із дії віднімання у третьому стовпці очевидно, що  $\blacktriangle = 0$ ;
- 2) із тієї ж дії визначаємо, що  $\square = 1$ , бо інакше різниця була б трицифровим числом, а не двоцифровим, як у ребусі;
- 3) із віднімання в першому рядку випливає, що  $\bigcirc = 2$ , адже сума тризначного числа з одиницею в розряді сотень і будь-якого двозначного числа не може перевищувати 298 (граничний випадок:  $199 + 99 = 298$ ). Отже, на цьому етапі розв'язання отримуємо:

$$\begin{array}{r}
 2 \ 1 \ \bullet - \blacksquare \ \blacktriangle = 1 \ \bullet \ 2 \\
 : \quad \quad \quad + \quad \quad \quad - \\
 \textcircled{S} \times \text{☺} = \boxtimes \ 2 \\
 \hline
 2 \ \boxtimes + \bullet \ \triangle = \text{☺} \ 0
 \end{array}$$

- 4) Із множення в середньому рядку випливає, що  $\boxtimes$  може дорівнювати лише 3, 4 або 7, оскільки можливі комбінації множників  $4 \times 8$ ,  $6 \times 7$  і  $9 \times 8$  (бо добуток закінчується на 2, але не рівний 12). Аналогічно з додавання в останньому рядку робимо висновок, що  $\triangle$  не може дорівнювати 5, 8 і 9, а  $\bullet$  не дорівнює 8 і 9; тоді з додавання в середньому стовпці випливає, що  $\blacksquare$  не дорівнює 7, 8 і 9, а також той факт, що  $\bullet$  не дорівнює 3, адже згідно з цією дією  $\bullet = \blacksquare + 1$ , а цифра «2» уже зайнята.

Випишемо таблицю для можливих значень невідомих фігурок:

Символ	3	4	5	6	7	8	9
●	—	?	?	?	?	—	—
■	?	?	?	?	—	—	—
▲	?	?	?	?	?	?	?
⊗	—	?	—	?	?	?	?
☺	—	?	—	?	?	?	?
⊠	?	?	—	—	?	—	—
△	?	?	—	?	?	—	—

5) Проаналізуємо тепер ділення в першому стовпці за можливих значень фігурок:

а) якщо  $\boxtimes = 3$ , то частка рівна 23, однак жодне з чисел вигляду  $21\bullet$  не ділиться на 23: отже, цей випадок неможливий;

б) якщо  $\boxtimes = 4$ , то частка рівна 24, і єдино можливий випадок  $216 : 9 = 24$ , тобто  $\bullet = 6$ ,  $\textcircled{9} = 9$ , що узгоджується з вписаною таблицею.

в) якщо  $\boxtimes = 7$ , то частка рівна 27, і єдино можливий випадок  $216 : 8 = 27$ , тобто  $\bullet = 6$ ,  $\textcircled{8} = 8$ , що також узгоджується з вписаною таблицею.

Із наведеного дослідження однозначно випливає, що  $\bullet = 6$ ; тоді згідно з 4) можемо також визначити  $\blacksquare = \bullet - 1 = 5$ . Крім того, дослідження показує, що  $\textcircled{9}$  може дорівнювати лише 8 або 9, а отже, комбінація множників  $6 \times 7 = 42$  у середньому рядку неможлива. Це у свою чергу визначає неможливість випадку б), оскільки за таких умов  $\boxtimes$  не може дорівнювати 4. Таким чином, маємо  $\boxtimes = 7$ ,  $\textcircled{9} = 8$ , а тоді з середнього рядка  $\textcircled{8} = 9$ . Відтак наша таблиця можливих значень набуває вигляду

Символ	3	4	5	6	7	8	9
$\bullet$	-	-	-	+	-	-	-
$\blacksquare$	-	-	+	-	-	-	-
$\blacktriangle$	?	?	-	-	-	-	-
$\textcircled{9}$	-	-	-	-	-	+	-
$\textcircled{8}$	-	-	-	-	-	-	+
$\boxtimes$	-	-	-	-	+	-	-
$\triangle$	?	?	-	-	-	-	-

Із додавання в середньому стовпці визначаємо останні цифри:  $5\blacktriangle + 9 = 6\triangle$ , звідки з урахуванням можливих значень із таблиці маємо  $\blacktriangle = 4$ ,  $\triangle = 3$ . Тим самим відновлені останні невідомі цифри.

Відповідь.

$$\begin{array}{r}
 216 - 54 = 162 \\
 : \quad + \quad - \\
 8 \times 9 = 72 \\
 \hline
 27 + 63 = 90
 \end{array}$$

## 2. ЧИСЛОВІ РЕБУСИ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Відновити цифри, замінені буквами, в числових ребусах на додавання (однаковим цифрам відповідають однакові букви):

$$\begin{array}{r}
 \text{а) } \quad \text{БАЗАР} \\
 + \quad \text{БАЗАР} \\
 \hline
 \text{КАВУНИ}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{б) } \quad \text{КНИГА} \\
 + \quad \text{КНИГА} \\
 \hline
 \text{НАУКА}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{в) } \quad \text{КОРОВА} \\
 + \quad \text{ТРАВА} \\
 \hline
 \text{ДОЯРКА} \\
 \hline
 \text{МОЛОКО}
 \end{array}$$

2. У заданій буквеній рівності ПЛЯЖ + ШЛЯХ = ХВИЛЯ треба замінити букви цифрами, але так, щоб зробити цю рівність правильною, при цьому однаковим буквам відповідають рівні цифри, а різним буквам відповідають нерівні цифри.
3. У заданій буквеній рівності БОРЩ + КОРЖ = ОБІД треба замінити букви цифрами, але так, щоб зробити цю рівність правильною і при цьому однаковим буквам відповідають рівні цифри, а різним буквам відповідають нерівні цифри.
4. У заданій буквеній рівності СИР + РИС = ЇЖА треба замінити букви цифрами, але так, щоб зробити цю рівність правильною, при цьому однаковим буквам відповідають рівні цифри, а різним буквам відповідають нерівні цифри.
5. При множенні двох чисел деякі цифри замінили «\*» («зірочками») та одержали результат:

$$\begin{array}{r}
 \quad \quad \quad 2 * * \\
 \quad \quad \quad \times \\
 \quad \quad \quad 3 * * \\
 \hline
 \quad \quad \quad 5 * * \\
 + \quad \quad * 4 * \\
 \quad \quad * * 3 \\
 \hline
 \quad \quad * * * * *
 \end{array}$$

Відновити цифри, які замінено «зірочками», якщо відомо, що в даний приклад не входила цифра «7».

6. У числовому ребусі з трьома прикладами на додавання відновити цифри, замінені літерами (однаковим цифрам відповідають однакові літери, різні літери відповідають різним цифрам):

$$\begin{array}{l}
 \text{DO} + \text{RE} = \text{MI}; \\
 \text{FA} + \text{SI} = \text{LA}; \\
 \text{RE} + \text{SI} + \text{LA} = \text{SOL}.
 \end{array}$$

7. Замінити фігурки цифрами таким чином, щоб виконувалися всі вказані в завданні дії. Однаковим фігуркам відповідають однакові цифри:

<p>a) <math>\square \square + 8 = 3 \blacktriangle</math></p> <p>- <math>\otimes \square + \blacktriangle = \otimes \blacktriangle</math></p> <hr/> <p><math>\otimes \square + 3 = \square \square</math></p>	<p>b) <math>\blacktriangle \square - \square \square = \otimes \blacktriangle</math></p> <p>+ <math>\square \blacktriangle - \blacktriangle = \square \square</math></p> <hr/> <p><math>\square \square + \square \square = \square \blacktriangle</math></p>
<p>c) <math>\triangle \triangle \blacktriangle - \square \triangle = \circ \circ</math></p> <p>: <math>\square \times \bullet = \square \bullet</math></p> <hr/> <p><math>\triangle \square + \square \ominus = \bullet \square</math></p>	<p>d) <math>\square \triangle \triangle - \square \blacktriangle = \triangle \triangle \blacktriangle</math></p> <p>: <math>\circ \times \blacktriangle \blacktriangle = \square \bullet</math></p> <hr/> <p><math>\blacktriangle \blacktriangle + \bullet \triangle = \blacktriangle \triangle \bullet</math></p>
<p>e) <math>\square \square \circ - \ominus \square \ominus = \triangle \square \blacktriangle</math></p> <p>: <math>\circ \ominus \times \circ \ominus = \bullet \bullet \circ</math></p> <hr/> <p><math>\triangle \ominus + \ominus \bullet \square = \ominus \ominus \ominus</math></p>	<p>f) <math>\circ \square \triangle - \otimes \square \square = \blacktriangle \triangle \square</math></p> <p>: <math>\bullet \times \otimes \triangle \ominus = \bullet \blacktriangle \square</math></p> <hr/> <p><math>\bullet \otimes \square + \ominus \triangle = \bullet \blacktriangle \ominus</math></p>
<p>g) <math>\square \square \triangle : \blacktriangle = \otimes \bullet \square</math></p> <p>- <math>\triangle \bullet \circ - \square \blacktriangle = \bullet \triangle \triangle</math></p> <hr/> <p><math>\otimes \triangle \square - \triangle \circ \circ = \square \blacktriangle \blacktriangle</math></p>	<p>h) <math>\square \square \square - \square \square \square = \otimes \otimes \otimes</math></p> <p>: <math>\square \times \square \square = \square \square \square</math></p> <hr/> <p><math>\square \square \otimes - \square \otimes \square = \otimes \square \square</math></p>
<p>i) <math>\blacktriangle \circ \triangle \square : \bullet \circ = \triangle \ominus</math></p> <p>- <math>\otimes \blacktriangle \otimes + \blacktriangle \square = \otimes \otimes \triangle</math></p> <hr/> <p><math>\blacktriangle \otimes \blacktriangle \blacktriangle - \ominus \bullet \triangle = \otimes \bullet \ominus</math></p>	<p>j) <math>\square \bullet \square \ominus : \square \ominus = \square \square</math></p> <p>- <math>\blacktriangle \triangle \square + \triangle \blacktriangle = \blacktriangle \ominus \ominus</math></p> <hr/> <p><math>\square \square \blacktriangle \square - \square \circ \square = \bullet \square \circ</math></p>

8. Ще один приклад на множення. Його відносно неважко розв'язати, бо в ньому залишено більше цифр, ніж безумовно необхідно для відновлення прикладу. Треба визначити, скільки подальших цифр можна замінити крапками без того, щоб задача втратила однозначність розв'язання. Задля полегшення зауважимо: є дві можливості для того, аби з семи наявних цифр

«приховати» одну так, щоб завдання залишилося розв’язним, а розв’язання – однозначним.

$$\begin{array}{r}
 .7. \\
 \times \\
 .6. \\
 \hline
 ..3. \\
 + ..6. \\
 3... \\
 \hline
 .1..1.
 \end{array}$$

9. У цьому прикладі на множення одна конкретна цифра всюди позначена «зірочками», замість інших цифр стоять крапки. Цифри, позначені крапками, не обов’язково однакові. Таким чином отримали результат:

$$\begin{array}{r}
 . * * . \\
 \times \\
 . . . \\
 \hline
 .. * . . \\
 + . . . * \\
 * . . . * \\
 \hline
 . . . . .
 \end{array}$$

Які два числа були перемножені?

10. Розшифрувати числовий ребус, у якому цифри замінені літерами (однаковим цифрам відповідають однакові літери, різні літери відповідають різним цифрам):

$$\begin{array}{r}
 \text{SRM} + \text{OSU} = \text{OORI} \\
 - \quad - \quad : \\
 \text{TIL} : \text{OAL} = \text{I} \\
 \hline
 \text{GSM} - \text{TU} = \text{GGS}
 \end{array}$$

11. У цьому прикладі на ділення усі непарні цифри замінили літерою **Н**, а всі парні – літерою **П**. Таким чином отримали результат:

