

**Курс: «Практикум з розв'язування
олімпіадних та конкурсних задач»
Навчальний матеріал до Теми 12:**

ст. викл. Рого В. Л.

Інваріанти. Принцип крайнього

1. МЕТОД ІНВАРІАНТІВ

У деяких олімпіадних задачах із математики зустрічається така ситуація. Деяка динамічна система послідовно переходить із одного стану в другий. І треба з'ясувати певну властивість цієї системи в кінцевому стані. Однак повністю прослідкувати за всіма переходами виявляється складно, проте відповісти на це питання допомагає обчислення деякої величини, яка характерна для всіх станів системи, тобто ця величина зберігається постійною (інваріантною). Зрозуміло, що набагато легше перевірити значення інваріанту в початковому стані системи і у кінцевому, аби дати відповідь на запитання задачі.

На практиці метод інваріантів зводиться до того, що деяка величина обчислюється двома способами: спочатку вона просто обраховується в початковому та кінцевому положенні, а потім треба прослідкувати її зміну при послідовних переходах системи.

Найчастіше вживаний інваріант – це парність числа. Проте інваріантом може бути також і остача від ділення не тільки на 2, а на довільне натуральне число.

У задачах, де потрібно з'ясувати, чи можна за допомогою заданих операцій перейти від одного об'єкта до другого, часто доцільно знайти *«інваріант» – числову характеристику об'єктів (або функцію з якимись іншими значеннями на множині об'єктів), – яка не змінюється при вказаних операціях.* Якщо при цьому значення інваріанту на двох об'єктах різні, то перетворити один в інший не можна. В цілочисельних та інших «дискретних»¹ задачах інваріантом часто може бути остача від ділення на 2 (парність) або на інший натуральний дільник.

Інваріант – це величина, яка не змінюється в результаті деяких операцій (наприклад, розрізання і перестановка частин фігур не міняє сумарної площі). Якщо інваріант розрізняє два положення, то від одного не можна перейти до іншого. Як інваріант може використовуватися парність або розфарбовування. У завданнях про суму цифр використовуються залишки від ділення на 3 або 9.

Напівінваріант – величина, що змінюється тільки в один бік (тобто яка може тільки збільшуватися або тільки зменшуватися). Поняття напівінваріанту часто використовується при доведеннях зупинки процесів.

Якщо всі задані операції оборотні, то вся множина об'єктів, над якими вони виконуються, розбивається на класи еквівалентності [два об'єкти еквівалентні, якщо один із них може бути отриманий із другого за допомогою даної операції (операцій)].

У задачах, де потрібно оцінити кількість операцій чи довести, що їх не можна виконувати безліч разів (наприклад, впевнитися у відсутності «циклу»), іноді буває корисно придумати функцію, яка після кожної дії (операції) монотонно зростає (чи спадає).

Приклади задач на знаходження інваріантних властивостей

Задача 1. Чи можна виплатити 25 гривень за допомогою десяти купюр вартістю 1 та 5 гривень?

Розв'язання цієї задачі ґрунтується на простому спостереженні: **сума парної кількості непарних чисел є парною**. Узагальнення цього факту виглядає так: **парність суми кількох чисел залежить лише від парності числа непарних доданків**: якщо кількість непарних доданків є (не)парною, то і сума також є (не)парною. *Відповідь*: не можна.

Задача 2. Чи можливо шахівницю розміру 8×8 обійти конем, почавши обхід із поля $h8$, і закінчивши його на полі $a1$ так, щоб на кожному полі побувати рівно один раз?

Розв'язання: За 63 ходи кінь опиниться на чорній клітинці $a1$, але непарні ходи коня завжди закінчуються на білій клітинці. Протиріччя доводить неможливість. *Відповідь*: не можна.

Задача 3. Дана шахова дошка. Дозволяється перефарбувати в другий колір одразу всі клітинки якої-небудь горизонталі чи вертикалі. Чи може при цьому утворитися дошка, у якої рівно одна чорна клітинка?

Розв'язання. При перефарбуванні горизонталі чи вертикалі, яка містить k чорних та $8-k$ білих клітинок, отримаємо $8-k$ чорних та k білих клітинок. При цьому кількість чорних клітинок зміниться на парне число, тобто $(8-k)-k=8-2k=2(4-k)$. Оскільки парність чорних клітинок зберігається, із початкових 32 чорних клітинок ми не можемо отримати одну чорну клітинку. *Відповідь*: не можна.

Задача 4. 1989 людей вишикувані в шеренгу. Чи завжди їх можна вишикувати по зросту, якщо дозволяється міняти місцями двох людей, котрі стоять через одного?

Розв'язання. При перестановках зберігається парність номера місця. Тому, коли найвищий на зріст стоїть на парному місці, він ніколи не стане першим. *Відповідь*: не завжди.

Задача 5. На прямій розташовані дві фішки: ліворуч червона, праворуч синя. Дозволяється проводити будь-яку з двох операцій: вставку двох фішок одного кольору підряд (між фішками або з краю) і видалення пари сусідніх одноколірних фішок (між якими немає інших фішок). Чи можна за допомогою таких операцій залишити на прямій рівно дві фішки: ліворуч синю, а праворуч червону?

Розв'язання. Розглянемо число різноколірних пар (не тільки сусідніх), де ліва фішка червона, і відмітимо, що парність цього показника не змінюється. Але в початковій ситуації наш показник рівний 1, а в бажаній ситуації – нулю. Тому перейти до бажаної ситуації неможливо.

Задача 6. На острові Сіробуромалін живуть хамелеони: 13 сірих, 15 бурих і 17 малинових. Якщо два хамелеони різних кольорів зустрічаються, то вони обидва змінюють свій колір на третій. Чи може трапитися, що в деякий момент усі хамелеони на острові стануть одного кольору?

Розв'язання. Позначимо кількості хамелеонів кожного кольору C , B і M відповідно. Доведіть, що залишки від ділення на 3 різниць $B-C$, $C-M$ і $M-B$ не змінюються.

Задача 7. Чи можна круг розрізати на такі частини, щоб із них скласти квадрат? (Розрізи – це ділянки прямих і дуги кіл.)

Розв'язання. Розглянемо інваріант: різниця сум довжин увігнутих і опуклих розрізаних дуг усіх частин. Ця величина не змінюється при розрізанні однієї частини на дві і при складанні однієї частини з двох. Для одиничного круга цей інваріант рівний 2π , а для квадрата – нулю (немає опуклих і вгнутих частин). Тому квадратура круга неможлива.

Задача 8. Квадратне поле розбите на 100 однакових квадратних ділянок, з яких дев'ять заросли бур'яном. За рік бур'ян може розповсюдитися ще лише на ті ділянки, для яких не менше двох сусідніх вже заросли бур'яном (ділянки називаються сусідніми, якщо вони мають спільну сторону). Довести, що повністю все поле ніколи бур'яном не заросте.

Розв'язання. Неважко перевірити, що довжина границі області, яка поросла бур'яном, не може зростати. Спочатку ця довжина не перевищувала 36 (вважаємо, що сторона кожної ділянки дорівнює 1), тому вона ніколи не зможе дорівнювати 40 – периметру поля.

Зауваження. Відзначимо, що тут ми використовуємо не інваріант у його стандартному розумінні. Довжина границі області з бур'яном може змінюватися. Для нас важливо, що вона не може зростати. *Відповідь:* не може.

Задача 9. Чи існують чотири натуральні числа, що йдуть підряд, кожне з яких можна подати у вигляді суми двох квадратів?

Розв'язання. Ні, не існують. Розглянемо остачі при діленні на 4. Квадрат може дати остачу 0 або 1, сума двох квадратів – 0, 1 або 2. Серед чотирьох підряд чисел знайдеться таке, що має остачу 3. Воно на суму двох квадратів не розкладається.

Зауваження. Варто мати на увазі, що квадрати цілих чисел при діленні на 3 або 4 можуть давати остачі лише 0 та 1, куби при діленні на 9 – лише 0, 1 та 8. (Перевірте це самостійно). Подібні факти в поєднанні зі вдалим вибором числа, остачі при діленні на яке ми розглядаємо, часто допомагають розв'язуванню. З допомогою такого вдалого вибору можна доводити, що число не є простим, можна розв'язувати рівняння в цілих числах.

Задача 10. До 17-цифрового числа додали число, яке записане тими ж цифрами, але у зворотному порядку. Доведіть, що хоча б одна цифра отриманої суми є парною.

Вказівка. Розгляньте два випадки: сума першої і останньої цифр числа менша за 10, і сума першої й останньої цифр числа не менша за 10. Якщо припустити, що всі цифри суми непарні, то в першому випадку не може бути жодного переносу в розрядах (що, очевидно, приводить до суперечності), а в другому випадку наявність переносу при русі справа наліво або зліва направо чергується з відсутністю переносу, внаслідок чого ми одержимо, що цифра суми в дев'ятому розряді обов'язково парна.

Задача 11. План міста має схему, зображену на малюнку. На всіх вулицях введено односторонній рух: можна їхати (див. план) тільки вправо, або тільки вгору. Скільки є різних маршрутів, які ведуть із т. А (лівого нижнього кута схеми) в т. В (правий верхній кут)?

						В
А						

Розв'язання. Назвемо вулицею відрізок зображеної сітки, який з'єднує два сусідні вузли. Для того, щоб потрапити в т. В, очевидно, необхідно проїхати 5 «вертикальних» та 7 «горизонтальних» вулиць. Отже, кожний такий маршрут складається із 12 (інваріант!) вулиць. Оскільки при цьому 5 із них (ще один інваріант!) потрібно обов'язково проїхати вгору, то кількість усіх можливих маршрутів визначається тим, скількома способами можна вибрати 5 етапів із 12 етапів для руху в цьому напрямку. Отже, всього дістаємо сполуку 5 із 12 різних маршрутів, тобто $8 \cdot 9 \cdot 11 = 792$.

Задача 12. Для участі в розіграші кубка країни з футболу подали заявки 1997 команд. Як скласти календар зустрічей між ними, щоб для визначення володаря кубка провести найменшу кількість ігор? (Між собою команди зустрічаються по одному разу. Нічиїх не буває. Команда, що програла, вибуває зі змагань).

Розв'язання. Для визначення володаря кубка необхідно, щоб із розіграшу вибули 1996 команд. Тому, як не складай календар зустрічей, для виявлення переможця доведеться провести 1996 (інваріант!) ігор.

2. ЗАДАЧІ НА МЕТОД ІНВАРІАНТІВ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

- Петро купив загальний зошит на 96 аркушів і пронумерував усі його сторінки по порядку числами від 1 до 192. Василь вирвав із цього зошита 25 аркушів і додав всі 50 чисел, що на них були написані. Чи міг він дістати 1990?
- У ряд записані числа від 1 до 10. Чи можна розставити між ними знаки «+» та «-» так, щоб значення отриманого виразу дорівнювало нулю?

Зауваження. Врахуйте, що від'ємні числа також бувають парними та непарними.

3. Коник-стрибунець стрибає вздовж прямої, причому першого разу він стрибує на 1 см в якийсь бік, другого – на 2 см і так далі. Доведіть, що після 1985 стрибків він не може зупинитися там, де починав.
4. На дошці виписано числа 1, 2, 3, ..., 1984, 1985. Дозволяється стерти з дошки будь-які два числа і замість них записати модуль їх різниці. Врешті-решт на дошці залишається одне число. Чи може воно дорівнювати нулю?
5. Було 5 аркушів паперу. Деякі з них розрізали на 5 шматків кожний. Потім деякі з одержаних шматків знову розрізали на 5 шматків і так зробили кілька разів. Чи можна в результаті виконання таких дій отримати 1975 шматків паперу?
6. В одній вершині куба написали число 1, в інших нулі. Можна додавати по 1 до чисел, які записані на кінцях довільного ребра. Чи можна домогтися того, щоб усі числа ділилися на 3?
7. У кутовій клітинці квадрата 3×3 стоїть знак мінус, в усіх інших – плюси. Можна змінити всі знаки в довільному рядку чи довільному стовпці на протилежні. Чи можна одержати таблицю лише з самих плюсів?
8. Круг поділили на 6 секторів, у кожному лежить по цукерці. За один хід одну цукерку можна перемістити в сусідній сектор. Чи можна зібрати всі цукерки в одному секторі рівно за а) 19; б) 20 ходів?
9. На чудо-дереві ростуть банани і ананаси. За один раз дозволяється зірвати з неї два плоди. Якщо зірвати два банани або два ананаси, то виросте ще один ананас, а якщо зірвати один банан і один ананас, то виросте один банан. У результаті залишився один плід. Який це плід, якщо відомо, скільки бананів і ананасів росло спочатку?
10. У одній клітці квадратної таблиці 4×4 стоїть знак мінус, а в інших стоять плюси. Дозволяється одночасно міняти знак у всіх клітках, розташованих в одному рядку або в одному стовпці. Доведіть, що, скільки б ми не проводили таких змін знаку, нам не вдасться отримати таблицю з одних плюсів.
11. На дошці написані числа 1, 2, 3, ..., 19, 20. Дозволяється стерти будь-які два числа a і b і замість них написати число а) $(a+b-1)$; б) $ab+a+b$. Яке число може залишитися на дошці після 19 таких операцій?
12. На дошці написані числа 1, 2, 3, ..., 23, 24. Дозволяється стерти будь-які два числа a і b і замість них написати число а) $(a+b-1)$; б) $ab+a+b$. Яке число може залишитися на дошці після 23 таких операцій?
13. На дошці написані числа 1, 2, 3, ..., 1989. Дозволяється стерти будь-які два числа і написати замість них їх різницю. Чи можна досягти того, щоб на дошці всі числа дорівнювали нулю?
14. На дошці записані цілі числа від 1 до 20. За один крок дозволяється пару чисел x , y замінити на число $x+y+5xy$. Чи можна наприкінці отримати число а) 20002002; б) 19901989?
15. Було 4 аркуші паперу. Деякі з них розрізали на 8 частин, потім деякі з цих частин розрізали знову на 8 частин і т. д. Коли підраховували загальну кількість аркушів, то виявилось, що їх усього 1986. Довести, що підрахунок був неправильним.

16. Матч між двома футбольними командами закінчився з рахунком 7:4. Довести, що був момент, коли перша команда забила стільки м'ячів, скільки другій залишалося забити.
17. Число x замінили на $x^2 - 210$, з одержаним числом зробили те саме і так 100 разів. Одержали знову число x . Знайти число x .
18. У трьох вершинах квадрата знаходяться три коники. Вони грають у довгу лозу («чехарду»). При цьому, коли коник A стрибає через коника B , то після стрибання від потрапляє в точку, симетричну точці A відносно точки B . Чи зможе після декількох стрибків один із коників потрапити вчетверту вершину даного квадрата?
19. Фігура ходить по діагоналі прямокутника $1 \times n$ (наприклад, для коня це 1×2). При якому n вона зможе потрапити у вихідну точку з будь-якої клітинки на необмеженій шаховій дошці?
20. У шести секторах круга лежить по «снікерсу». Можна одночасно пересунути два «снікерси» в сусідні сектори, рухаючи їх у протилежних напрямках. Чи можна одержати таке їх розташування: 5,1,0,0,0,0?
21. Обмінний автомат міняє одну монету на п'ять інших. Чи можна за його допомогою розмінати металеву гривню на 26 монет?
22. У вершинах куба розставлені такі числа: 7 нулів і одна одиниця. За один хід дозволяється додавати по одиниці до чисел на кінцях будь-якого ребра куба. Чи можна досягти того, щоб усі числа стали рівними між собою? А чи можна досягти того, щоб усі числа ділилися на 3?
23. У кожній клітинці таблиці 8×8 записано по одиниці. Дозволяється за один хід додати по одиниці до всіх чисел будь-якого квадрата 3×3 . Чи можна за допомогою скінченої кількості таких ходів отримати у вершинах деякого квадрата 4×4 суму чисел, що дорівнює 2001?
24. На столі лежить купа з 1001 камінців. Хід полягає в тому, що з якоїсь купи, що містить більше одного камінця, викидають камінець, а потім одну з цих куп ділять на дві. Чи можна через кілька ходів залишити на столі лише купки, що складаються з трьох камінців?
25. На дошці написані десять плюсів та п'ятнадцять мінусів. Дозволяється стерти будь-які два знаки та написати замість них плюс, якщо вони однакові, і мінус, якщо вони різні. Який знак залишиться на дошці після виконання двадцяти чотирьох таких операцій?
26. На дошці написані числа 1, 2, ..., 1991. Кожний раз стираються якісь два числа і замість них пишеться остача від ділення суми цих двох чисел на 13. Яке єдине число залишиться після виконання всіх цих операцій?
27. Газету розрізали на 7 шматків. Потім вибрали деякі шматки газети і їх теж розрізали на 7 шматків. І продовжили так розрізати ще кілька разів. Чи можна в результаті таких розрізань отримати 2017 шматків газети?
28. Добуток 22 цілих чисел дорівнює 1. Чи може статися так, що їх сума не дорівнює нулю?
29. Чи можна скласти магічний квадрат із перших 36 простих чисел? (У магічного квадрата суми чисел в усіх рядках, усіх стовпцях та на двох великих діагоналях рівні).

30. Чи можна покрити шахову дошку доміношками розміру 1×2 так, щоб вільними залишились тільки клітинки a_1 і h_8 ?
31. У народній дружині є 100 осіб, і кожного вечора троє з них виходять на чергування. Чи може після деякого часу виявитися, що кожен чергував із кожним рівно один раз?
32. На прямій відмічені 45 точок, що лежать зовні відрізка АВ. Доведіть, що сума відстаней від цих точок до точки А не дорівнює сумі відстаней від цих точок до точки В.
33. По колу розставлені 9 чисел – 4 одиниці і 5 нулів. Кожну секунду над числами роблять таку операцію: між сусідніми числами ставлять нуль, якщо вони різні, та одиницю, якщо вони рівні. Чи можуть усі числа через деякий час стати рівними?
34. 25 хлопчиків і 25 дівчаток сидять за круглим столом. Доведіть, що у когось із сидячих обидва сусіди – хлопці.
35. Чи можна шахову дошку 8×8 покрити 11 прямокутниками 1×4 та 5 квадратами 2×2 так, щоб їхні сторони йшли по сторонах клітинок?
36. Доведіть, що прямокутниками 1×3 не можна покрити дошку 8×8 , в якій із лівого нижнього кута вирізаний прямокутник 1×4 .
37. На дошці розміру 10×10 розставлені 50 шашок: 25 у лівій нижній чверті дошки, 25 – у правій верхній чверті. За один хід будь-яка шашка може перестрибнути через шашку, сусідню з нею по горизонталі, вертикалі або діагоналі, на наступне поле, якщо воно вільне. Чи зможуть за кілька ходів усі шашки опинитися на одній половині дошки?
38. Довести, що шахову дошку, розміру 1989×1991 з вирізаною центральною клітинкою не можна обійти турою, побувавши на кожній клітинці точно один раз.
39. У Чорного Дракона 1000 голів. Козак Мамарига одним ударом меча може відрубати точно 1, 17, 21 або 33 голови, але при цьому у Дракона виростає відповідно 10, 14, 0 або 48 голів. Чи зможе козак перемогти Чорного Дракона?
40. Доведіть, що шахову дошку розміру 10×10 не можна розбити на фігурки у формі букви Т, що складається з чотирьох клітинок.
41. Якщо в нас є кілька многочленів, то дозволяється із них записати добуток, суму або різницю двох із них. Спочатку нам задано $f(x)$ та $g(x)$. Чи зможемо ми отримати x , якщо: а) $f(x)=x^2+x$, $g(x)=x^2+2$; б) $f(x)=x^2+x$; $g(x)=x^2-2$; в) $f(x)=2x^2+x$; $g(x)=2x$; г) $f(x)=2x^3+x$; $g(x)=x^2$.
42. Дано 77 однакових брусків розміру $3 \times 3 \times 1$. Чи можна їх усі укласти в коробку з кришкою розміру $7 \times 9 \times 11$?
43. «Дельфін» – фігура, що ходить на одне поле вгору, вправо або по діагоналі вліво вниз. Чи зможе «дельфін» обійти дошку 8×8 , починаючи з лівого нижнього кута і побувавши на кожній клітинці один раз?
44. Нескінченна послідовність цифр починається цифрами 1, 0, 1, 0, 1, 0. Далі кожна цифра – це остання цифра суми шістьох попередніх. Чи зустрінуться колись у цій послідовності підряд цифри 0, 1, 0, 1, 0, 1?

45. На площині задано правильний шестикутник. Кожна його сторона поділена на 1000 рівних частин, і точки поділу з'єднані відрізками, паралельними сторонам шестикутника. В утвореній сітці оберемо три вузли, що є вершинами правильного трикутника (будь-якого розміру та розташування), і пофарбуємо їх. Продовжуємо такий вибір та фарбування, поки це можливо. Доведіть, що якщо залишиться непофарбованим один вузол, то він не є вершиною початкового шестикутника.
46. Для числа 1997^{1997} підраховали суму його цифр. В одержаному числі знову підраховали суму цифр, і т. д., аж поки не одержали одноцифрове число. Визначити це останнє число.
47. Задано числа $2^{0,5}$, 2 , $1/2^{0,5}$. Дозволяється будь-які два з них замінити їх сумою та різницею, поділеною на $2^{0,5}$. Чи можна, провівши цю операцію декілька разів, дістати трійку $1, 2^{0,5}, 1+2^{0,5}$?
48. У першості країни бере участь 16 команд. Кожна команда має свій стадіон і повинна зіграти з усіма своїми суперниками, в кожному із 15 турів відбуваються одночасно всі 8 матчів. Чи можна скласти календар зустрічей так, щоб усі команди по чергово проводили ігри вдома та на виїзді?
49. Встановити, скінченною чи нескінченною є множина чисел, які є точними квадратами, мають суму цифр 9 і не закінчуються нулем.

3. ПРИНЦИП КРАЙНЬОГО

Принцип крайнього полягає в тому, що при доведенні деякого твердження доцільно розглянути найбільший чи найменший (крайній) об'єкт. Дуже часто такими об'єктами можуть бути числа (задачі 1, 3) або відстані (задачі 2, 4).

Задача 1. У вершинах 100-кутника розставлені числа так, що кожне дорівнює середньому арифметичному сусідніх із ним чисел. Доведіть, що всі числа рівні між собою.

Розв'язання. Розглянемо найбільше з чисел (якщо таких кілька, то обираємо будь-яке із них). Сусідні числа не можуть бути меншими за це число тому, що якщо одне із них менше – то друге має бути більшим за розглядуване число (але ж ми обрали найбільше). Отже, усі три числа рівні між собою. Розглянемо наступне за ними число. Воно дорівнює двом числам, що стоять перед ним (тому що ті рівні між собою). Далі розглядаємо наступне за цими числами число і т.д. Таким чином доводимо, що усі числа рівні між собою.

Задача 2. У космічному просторі літає 1001 астероїд, на кожному з яких сидить астроном. Усі відстані між астероїдами різні. Кожен астроном спостерігає за найближчим астероїдом. Доведіть, що за одним із астероїдів ніхто не спостерігає.

Розв'язання. Розглянемо два астероїди А та В, відстань між якими найменша. Астроном на астероїді А дивиться на астероїд В, а астроном на астероїді В дивиться на астероїд А. Якщо знайдеться астроном, який спостерігає за

астероїдом А чи В, то знайдеться і астероїд, за яким ніхто не спостерігає (адже скільки астероїдів – стільки і спостерігачів). Інакше виключимо із розгляду астероїди А та В. Отримаємо систему із $1001-2=999$ астероїдів, для яких виконується умова задачі. Продовжуючи таким чином далі, прийдемо до розгляду системи із трьох астероїдів. Астрономи на найближчих із них спостерігають за астероїдами один одного, тому за астероїдом, що залишився, ніхто не спостерігає.

Задача 3. Довести, що рівняння

$$x^2 + y^2 = 3(z^2 + t^2)$$

не має розв'язків у натуральних числах.

Розв'язання. Припустимо протилежне: що існують розв'язки x, y, z, t заданого рівняння у натуральних числах. Розглянемо розв'язок, для якого значення виразу $x^2 + y^2$ є мінімальним. Із заданого рівняння випливає, що вираз $(x^2 + y^2)$ ділиться на 3. Звідси отримуємо, що $x : 3$ і $y : 3$ (це випливає з того, що остача від ділення квадрата будь-якого цілого числа на 3 дорівнює 0 або 1). Таким чином, $x = 3x_1, y = 3y_1$, а відтак $z^2 + t^2 = 3(x_1^2 + y_1^2)$. При цьому з вихідного рівняння очевидно, що $z^2 + t^2 < x^2 + y^2$. Отримане протиріччя доводить справедливність твердження задачі.

Задача 4. Площина розділена $N > 2$ прямими загального положення, серед яких немає паралельних. Довести, що до кожної прямої прилягає трикутник, що не перетинається іншими прямими.

Розв'язання. Виберемо будь-яку з даних прямих і розглянемо точки перетину інших прямих між собою. Серед цих точок перетину виберемо найближчу до нашої прямої. Дві прямі, що проходять через цю точку, перетинають початкову пряму і утворюють із нею трикутник. Цей трикутник не перетинають інші прямі.

Задачі для самостійного розв'язування

1. По колу записано кілька натуральних чисел, кожне з яких не більше за одне із сусідніх чисел. Доведіть, що серед цих чисел є хоча б два рівних числа.
2. По колу записано кілька чисел, кожне з яких дорівнює середньому арифметичному сусідніх із ним чисел. Доведіть, що усі ці числа рівні.
3. На шаховій дошці стоять кілька тур. Чи обов'язково знайдеться тура, яка б'є не більше двох інших тур? (Перестрибувати через фігури тура не може.)
4. У 2019 замках живуть по принцу та принцесі. Усі відстані між замками різні. 14 лютого кожен принц вирушає до найближчого замку залицятися до тамтешньої принцеси. Доведіть, що знайдеться принцеса, яка залишилася без залицятьника.
5. У країні є кілька міст, усі відстані між якими різні. Божевільний мандрівник їде із міста А до найвіддаленішого від нього міста В. Потім їде до найвід-

даленішого від В міста С і т.д. Доведіть, що якщо місто С не співпадає з містом А, то мандрівник ніколи не повернеться до міста А.

6. Довести, що у будь-якому многограннику є дві грані з однаковим числом сторін.
7. Семеро грибників зібрали разом 100 грибів, причому ніякі двоє не зібрали однакової кількості грибів. Довести, що існують троє грибників, які зібрали разом не менше, ніж 50 грибів.
8. По колу вписані 10 чисел, кожне з яких рівне половині суми двох сусідніх. Скільки серед них може бути різних чисел?
9. Довести нескінченність множини простих чисел вигляду $4m + 3$.
10. Довести, що для будь-якого натурального числа n число $1+13+15+\dots+(12n+1)$ не є цілим.
11. На площині задано множину точок M таку, що кожна точка з M є серединою відрізка, що з'єднує деякі дві інші точки з M . Довести, що множина M нескінченна.
12. На площині розташовано n точок, причому площа будь-якого трикутника з вершинами в цих точках не перевершує 1. Довести, що всі ці точки можна помістити в трикутник, площа якого дорівнює 4.
13. Довести, що будь-який опуклий многокутник, площа якого дорівнює 1, можна помістити в прямокутник із площею 2.
14. У тридев'ятому королівстві кожні два міста з'єднані дорогою з одностороннім рухом. Довести, що існує місто, із якого в будь-яке інше місто можна проїхати не більше як двома дорогами.
15. Протягом дня в бібліотеці побувало 100 читачів. Кожен читач відвідав бібліотеку рівно один раз. Виявилось, що в цей день із будь-яких трьох читачів принаймні двоє зустрілися в бібліотеці. Довести, що працівник бібліотеки міг зробити повідомлення в такі два моменти часу, щоб усі 100 читачів його почули.
16. (теорема Сільвестра). На площині є скінченна кількість прямих. Відомо, що через будь-яку точку перетину двох прямих проходить ще одна пряма. Доведіть, що тоді всі прямі проходять через одну точку.

Джерела:

<http://olimpmath.blogspot.com/2015/03/>

<https://shahistua.wixsite.com/>

<https://njestandartn-zadach.webnode.com.ua/>