

**Курс: «Практикум з розв'язування  
олімпіадних та конкурсних задач»  
Навчальний матеріал до Теми 10:**

**ст. викл. Рего В. Л.**

## **Задачі на розфарбування та упакування**

# 1. ЗАДАЧІ НА РОЗФАРБУВАННЯ ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ

«Не той розумний, хто вміє відрізнити добро від зла, а той, хто вміє із двох напастей вибрати найменшу.»

*Арабська мудрість*

## Приклади розв'язання задач

### Група 1. Задачі на розфарбування прямої

**Задача 1.** Прямую зафарбували у чорний та білий кольори. Довести, що на цій прямій існують три однокольорові точки  $A_1, A_2, A_3$ , для яких виконується умова:  $A_1A_2 = A_3A_2$ .

**Доведення.** На прямій візьмемо дві однокольорові точки  $C_1$  та  $C_2$ , це завжди можна зробити. Точка  $C_1$  розташована ліворуч точки  $C_2$ . На однаковій відстані  $C_1C_2$  відкладемо від цих двох точок вліво та вправо такі відповідні точки  $B_1$  та  $B_2$ , а третю точку  $B_3$  відкладемо в середині відрізка  $C_1C_2$ . Можливі випадки:

**a)**  $B_3$  одного кольору з однокольоровими точками  $C_1$  та  $C_2$ ;

**б)**  $B_3$  неоднакового кольору з однокольоровими точками  $C_1$  та  $C_2$ .

У випадку **a)** достатньо перейменувати точки  $B_3, C_1$  та  $C_2$  на  $A_1, A_2, A_3$ .

У випадку **б)** достатньо розглянути такі випадки:

**б1)**  $B_3$  та  $B_1$  однокольорові, але відмінні від кольору точки  $B_2$ ;

**б2)**  $B_1$  та  $B_2$  однокольорові, але відмінні від кольору точки  $B_3$ ;

**б3)**  $B_3$  та  $B_2, B_1$  однокольорові.

У випадку **б1)** достатньо перейменувати точки  $B_2, C_1$  та  $C_2$  на  $A_1, A_2, A_3$ .

У випадку **б2)** достатньо перейменувати точки  $B_2, C_1$  та  $C_2$  на  $A_1, A_2, A_3$ .

У випадку **б3)** достатньо перейменувати точки  $B_2, B_3$  та  $B_1$  на  $A_1, A_2, A_3$ .

**Задача 2.** Прямую зафарбували у чорний, білий та жовтий кольори. На прямій існують три точки  $A_1, A_2, A_3$ , які відрізняються одна від одної трьома кольорами, для яких виконується умова:  $A_1A_2 = A_3A_2$ . Чи можна на цій прямій узяти ще таких три точки  $X, Y, Z$ , які відрізняються одна від одної трьома кольорами, для яких виконується умова:  $XY = XZ$ ?

**Розв'язання.** Не завжди. Адже прямую можна пофарбувати дискретно. Лише одну точку в чорний колір, а всі інші в білий та жовтий.

**Задача 3.** Усі точки прямої зафарбовані у чотири кольори. Чи можна серед 11 одиничних відрізків знайти два відрізки, у яких при накладанні співпадають кольори кінців?

**Розв'язання.** На зафарбованій у чотири кольори прямій можна задати щонайбільше десять одиничних відрізків, у яких кольори кінців не співпадають. Наприклад, якщо кольори кінців позначити числами 1, 2, 3, 4, то можливі такі кольори кінців одиничних відрізків: (1;1), (2;2), (3;3), (4;4), (1;2), (1;3), (1;4), (2;3), (2;4), (3;4). За принципом Діріхле серед 11 одиничних відрізків знайдуться щонайменше 2 одиничних відрізки, у яких при накладанні співпадають кольори кінців.

**Задача 4.** Усі точки прямої зафарбовані у два, чорний та білий кольори. Чи можна підібрати розфарбування так, щоб не існувало для будь-яких двох однокольорових точок відмінного за кольором центру симетрії?

**Розв'язання.** Нехай усі невід'ємні числа координатної прямої зафарбували у чорний колір, а усі від'ємні числа – у білий. Припустимо, що існують три точки, які задовольняють умову. Проте будь-яка чорна точка знаходиться правіше від будь-якої білої точки, а значить, для будь-яких двох однокольорових кінців відрізка точка середини відрізка не буде відрізнятися кольором від кінців.

## Група 2. Задачі на розфарбування площини

**Задача 5.** У кожній вершині правильного 100-кутника розташовані фішки: 76 червоних та 24 синіх. Довести, що знайдуться 4 червоні фішки, що утворюють квадрат.

**Розв'язання.** Зрозуміло, що 100 фішок можуть утворити  $100:4=25$  квадратів, тому (по одній синій фішці у кожного квадрата) сині вершини будуть мати не більше 24 квадратів, отже, один квадрат буде мати червоні вершини.

**Задача 6.** У кожній вершині правильного 2005-кутника розташовані фішки: 1605 червоних та 400 синіх. Довести, що знайдуться 5 червоних фішок, що утворюють правильний п'ятикутник.

**Розв'язання.** У правильному 2005-кутнику можна утворювати правильні п'ятикутники так: між будь-якими двома вершинами п'ятикутника повинні знаходитися рівно 400 вершин даної фігури. Зрозуміло, що 2005 фішок можуть утворити  $2005:5=401$  правильних п'ятикутників, тому (по одній синій фішці у кожного правильного п'ятикутника) сині вершини будуть мати не більше 400 п'ятикутників, отже, один п'ятикутник буде мати червоні вершини.

**Задача 7.** Площина пофарбована у два кольори. Довести, що знайдуться дві точки на відстані 1 м: **а)** одного кольору; **б)** різних кольорів.

**Розв'язання. а)** Якщо на зафарбованій у два кольори площині побудувати правильний трикутник зі стороною 1 м, то із трьох його вершин у крайньому разі дві будуть одного кольору (за принципом Діріхле, адже вершин 3, а кольорів всього 2). Вершини одного кольору і утворюють шукані точки.

**б)** На відстані не менше одного метра візьмемо дві точки  $A$  та  $B$ . Нехай ці точки різного кольору. Їх завжди можна вибрати різного кольору. Побудуємо рівнобедрений трикутник  $ABC$ ,  $AC=CB=1$  м. Колір точки  $C$  відмінний від кольору однієї із точок  $A$ ,  $B$ .

**Задача 8.** Вершини трикутника зафарбували жовтими та синіми кольорами. У середині цього трикутника зафарбували ще три точки жовтими та синіми кольорами. Чи можна на цих вершинах утворити: **а)** 3 трикутники з синіми вершинами; **б)** два трикутники з однокольоровими вершинами; **в)** чотирикутник із однокольоровими вершинами; **г)** чотирикутник із вершинами одного кольору?

**Розв'язання.** Складемо таблицю можливих варіантів.

Кількість жовтих вершин	Кількість синіх вершин	а)	б)	в)	г)
2	4	так	так	так	так
3	3	ні	так	ні	так
4	2	ні	так	так	так
<i>Відповідь:</i>		<i>ні</i>	<i>так</i>	<i>ні</i>	<i>так</i>

*Відповідь:* а) не завжди; б) так; в) не завжди; г) так.

### **Група 3. Задачі на розфарбування в шаховому порядку**

#### **Одною з цікавих математичних проблем є проблема чотирьох фарб.**

Скільки фарб потрібно, щоб розфарбувати географічну мапу так, щоб ніякі дві суміжні держави не були зафарбовані в один колір? Неважко накреслити мапу, для якої досить чотирьох фарб. Математики цілком обґрунтували, що для будь-якої мапи достатньо п'яти фарб. А от чи можна стверджувати, що необхідно й достатньо чотирьох фарб? Відповідь на це запитання залишається відкритою. Відсутність доведення для проблеми чотирьох фарб на площині дивує багатьох математиків, адже ця проблема вже розв'язана для складних поверхонь, для листка Мебіуса, пляшки Клейна необхідно й достатньо шести фарб, а для розфарбування тора (бублика) потрібно сім фарб.

**Задача 9.** На трикутній політичній карті розміром 7 м, 7 м, 7 м є 49 однакових за площею трикутних держав. За домовленістю будь-яка держава континенту кожного року направляє делегацію тільки в одну з держав, із якою має суцільну ділянку кордону. Чи всі держави такої політичної карти приймають делегацію кожного року?

**Розв'язання.** Розфарбуємо 49 рівносторонніх трикутників політичної карти у два, білий та чорний кольори так, щоб по обидві сторони будь-якого трикутника лежали різні кольори. Нехай чорних кольорів більше, якщо це не так, то перефарбуємо у протилежні кольори. Отже, чорних держав більше, ніж білих. Оскільки кожна держава надсилає делегацію у протилежну за кольором державу, то хоча б одній чорній державі не вистачить делегації з білої держави.

*Відповідь:* не всі.

**Задача 10.** Уявімо шахівницю, яка розфарбована в два кольори. Довести: якщо на шахівниці провести будь-яку пряму, котра розділила дошку на дві частини, тобто утворилася нова конфігурація шахової дошки, то для розфарбування нової конфігурації на шахівниці досить два кольори.

**Доведення.** Для того, щоб відновити правильне розфарбування після проведеної на шахівниці прямої досить перефарбувати одну з карт половинок, змінивши фарбу кожної області на протилежну. Таким чином отримаємо правильне розфарбування.

**Задача 11.** Мапа на площині утворена всілякими прямими. Довести, що для правильного розфарбування такої мапи треба два кольори.

**Доведення.** Розглянемо площину, яка розділена однією прямою на дві частини. Зрозуміло, що для правильного розфарбування цієї мапи потрібно два кольори. Проведемо другу пряму та розфарбуємо нову мапу, змінивши всі кольори з одного боку від нової прямої на протилежні. Потім проведемо третю пряму і так далі. Зрозуміло, що запропонований спосіб можна застосувати для довільної кількості прямих. Отже, методом математичної індукції ми довели, що можна розфарбувати у два кольори всі мапи, що утворені прямими.

**Задача 12.** Чи можливо шахівницю розміру 8x8 обійти конем, почавши обхід із поля h8, і закінчивши його на полі a1 так, щоб на кожному полі побувати рівно один раз?

**Розв'язання.** За 63 ходи кінь опиниться на чорній клітинці  $a1$ , але непарні ходи коня завжди закінчуються на білій клітинці. Протиріччя доводить неможливість.

**Відповідь:** не можна.

### Задачі для самостійного опрацювання

1. Пряму зафарбували у чорний та білий кольори. На прямій існують три однокольорові точки  $A_1, A_2, A_3$ , для яких виконується умова:  $A_1A_2=A_3A_2$ . Чи можна на цій прямій узяти ще три точки  $X, Y, Z$  одного кольору, для яких виконується умова:  $XY=XZ$ ?
2. Пряма зафарбована у два кольори. Довести, що знайдуться дві точки на відстані 1 м різних кольорів або 2 точки одного кольору на відстані 2 м.
3. Усі точки прямої зафарбовані у жовтий, синій, білий кольори. Довести, що на такій прямій серед 2005 одиничних відрізків можна знайти 334 відрізки, у яких при накладанні можуть співпадати кольори кінців.
4. Яку найбільшу кількість різних відрізків із різнокольоровими кінцями у довільних чотирьох точках можна задати на прямій, усі точки якої зафарбовані у два кольори?
5. У кожній вершині правильного 2004-кутника розташовані фішки: 1838 червоних та 166 синіх. Довести, що знайдуться 12 червоних фішок, що утворюють правильний 12-кутник.
6. У кожній вершині правильного 24-кутника розташовані фішки: 21 червона та 3 синіх. Довести, що знайдуться 6 червоних фішок, що утворюють правильний 6-кутник.
7. Точки площини зафарбували жовтими та синіми кольорами. На цій площині взяли три точки  $A, B, C$ , що не лежать на одній прямій. У середині трикутника з вершинами в точках  $A, B, C$  взяли ще три точки  $X, Y, Z$ , що не лежать на одній прямій. Чи можна утворити на цих шести точках: а) 2 трикутники з жовтими вершинами; б) три трикутники з різнокольоровими вершинами; в) чотирикутник із вершинами одного кольору? Усі шість точок мають властивість: жодні три точки не лежать на одній прямій.
8. Площина пофарбована у три кольори. Довести, що знайдуться дві точки на відстані 1 м одного кольору.
9. Мапа на плоскому аркуші паперу утворена всілякими замкненими кривими без самоперетинів та кривими, що перетинають весь аркуш від одного краю до іншого. Довести, що для правильного розфарбування такої мапи треба два кольори

## 2. ЗАДАЧІ НА РОЗФАРБУВАННЯ ОЛІМПІАДНОГО ТИПУ

При розв'язанні олімпіадних задач інколи клітинки, точки або інші фігури вважають розфарбованими в різні кольори в деякому порядку. Фактично це означає розбиття множини всіх заданих фігур на підмножини. Розфарбування робить розв'язання більш наочним, та й міркувати за таким малюнком легше. У попередньому розділі ми частково познайомилися з тим, як розфарбування дозволяє знаходити важливі для нас закономірності. Розглянемо ще декілька прикладів.

**Задача 1.** На кожній клітині дошки розміру  $2005 \times 2005$  сидить жук. За свистком кожний жук переповзає на одну із сусідніх по діагоналі клітин. При цьому в деяких клітинах можуть виявитися по кілька жуків, а деякі клітини стануть незайнятими. Знайдіть найменше число незайнятих клітин.

**Розв'язання.** Пофарбуємо вертикалі дошки у білий та чорний кольори так, щоб сусідні вертикалі мали різний колір. Якщо перша зліва вертикаль – чорна, то у нас непарне число  $k$  чорних та парне число  $n$  білих клітин. Переповзаючи, кожний жук змінює колір клітини, на якій він сидить. На чорні клітини можуть переповзти лише жуки з білих клітин. Тому не менше  $k-n$  чорних клітин стануть вільними.

**Відповідь.**  $k-n$  клітин.

**Запитання 1.** На кожній клітинці дошки  $3 \times 3$  сидить жук. У певний момент усі жуки переповзають на сусідні (по горизонталі або вертикалі) клітинки. Чи обов'язково при цьому залишиться хоча б одна вільна клітинка?

**Вказівка.** Нехай клітини дошки пофарбовано у білий та чорний кольори у шаховому порядку так, що чорних клітин 13, а білих 12. Оскільки при переповзанні жук змінює колір клітини, на якій він розташовується, то одна чорна клітина обов'язково буде вільною.

**Задача 2.** Є квадратний лист паперу в клітинку  $100 \times 100$ . Проведено кілька ламаних без самоперетинів, що йдуть по сторонах клітинок та не мають спільних точок. Ці ламані лежать усередині квадрата, лише їх кінці лежать на межі. Довести, що крім вершин квадрата, знайдеться вузол (всередині або на межі), який не належить жодній ламаній.

**Розв'язання.** Пофарбуємо всі вузли в шаховому порядку в чорний та білий кольори. Тоді кожна ламана проходить через чорний та білий вузол по черзі. Нехай всі некутові вузли межі (серед них порівну чорних та білих) – кінці ламаних. Тоді маємо однакову кількість ламаних із двома білими та двома чорними кінцями. Тому загальні кількості чорних та білих вузлів на ламаних усередині квадрата рівні (на ламаних із білими кінцями на один чорний вузол більше, на ламаних із чорними кінцями – на один білий). Але у нас усередині квадрата 99 і дві десятіх вузлів – непарна кількість.

**Запитання 2.** Чи можна дві ламані, проведені по пофарбованих вузлах (див. задачу 2), перетнути у трьох точках одного кольору?

**Запитання 3.** У турнірі грають  $2m$  команд. У першому турнірі зустрілися між собою  $m$  пар команд, і в другому турнірі зіграли між собою  $m$  пар (не обов'язково інші). Як довести, що тепер можна вибрати  $m$  команд, серед яких жодні дві не грали між собою?

**Вказівка.** Позначимо команди точками на площині. Команди, що зіграли між собою в першому турі, з'єднаємо червоними відрізками, а ті, що зіграли у другому – синіми. З кожної точки виходить два різнокольорові відрізки. Тому всі відрізки можна розбити на цикли, в яких кольори відрізків чергуються. Різні цикли не з'єднанні між собою і не перетинаються. З кожного циклу візьмемо половину команд, що йдуть через одну.

**Запитання 4.** Опуклий  $n$ -кутник розбитий на трикутники своїми діагоналями, що не перетинаються, причому в кожній його вершині сходиться непарна кількість трикутників. Чому  $n$  кратне 3?

**Обґрунтування.** Якщо многокутник розбитий на частини діагоналями, що не перетинаються, то ці частини можна розфарбувати у білий та чорний кольори так, щоб частини зі спільною стороною мали різний колір. Щоб обґрунтувати це, можемо спочатку вважати весь многокутник білим, а далі при проведенні кожної діагоналі по один бік від неї змінювати кольори всіх частин, а по другий бік – зберігати розфарбування. Оскільки в кожній вершині сходиться непарна кількість трикутників, то

всі сторони многокутника будуть належати трикутникам одного кольору, наприклад, чорного. А кожна проведена діагональ є одночасно стороною і чорного, і білого трикутника. Тому  $n$  дорівнює кількості сторін чорних трикутників мінус кількість сторін білих. Обидві ці кількості, очевидно, діляться на 3, тому і  $n$  кратне 3.

**Запитання 5.** Площина розбита на однакові шестикутні кімнати. У деяких стінах зроблені двері так, що для будь-якої вершини, в якій сходяться три стіни (сторони шести кутників) двері є точно в двох. Чому будь-який замкнений шлях цим лабіринтом завжди проходить через парну кількість дверей?

*Вказівка.* Усі кімнати можна пофарбувати у два кольори так, що з'єднанні дверима кімнати мають різні кольори. Для доведення спочатку якимось пофарбуємо одну кімнату, потім за нашим правилом шість її сусідніх, потім – сусідні з уже пофарбованими і т. д. Оскільки людина не повертається в початкову кімнату, вона парну кількість разів змінює колір кімнати.

Тепер наведемо завдання, розв'язанню якого допомагає розфарбування не в два, а в чотири кольори.

**Запитання 6.** Чому не можна шашкову дошку  $10 \times 10$  закласти плитками  $1 \times 4$ ?

*Вказівка.* Використаємо діагональне розфарбування в 4 кольори, плитка  $1 \times 4$  покриває по одній клітинці кожного кольору. Але на дошці  $10 \times 10$  неоднакова кількість клітин різних кольорів

### Вправи для самостійного розв'язання

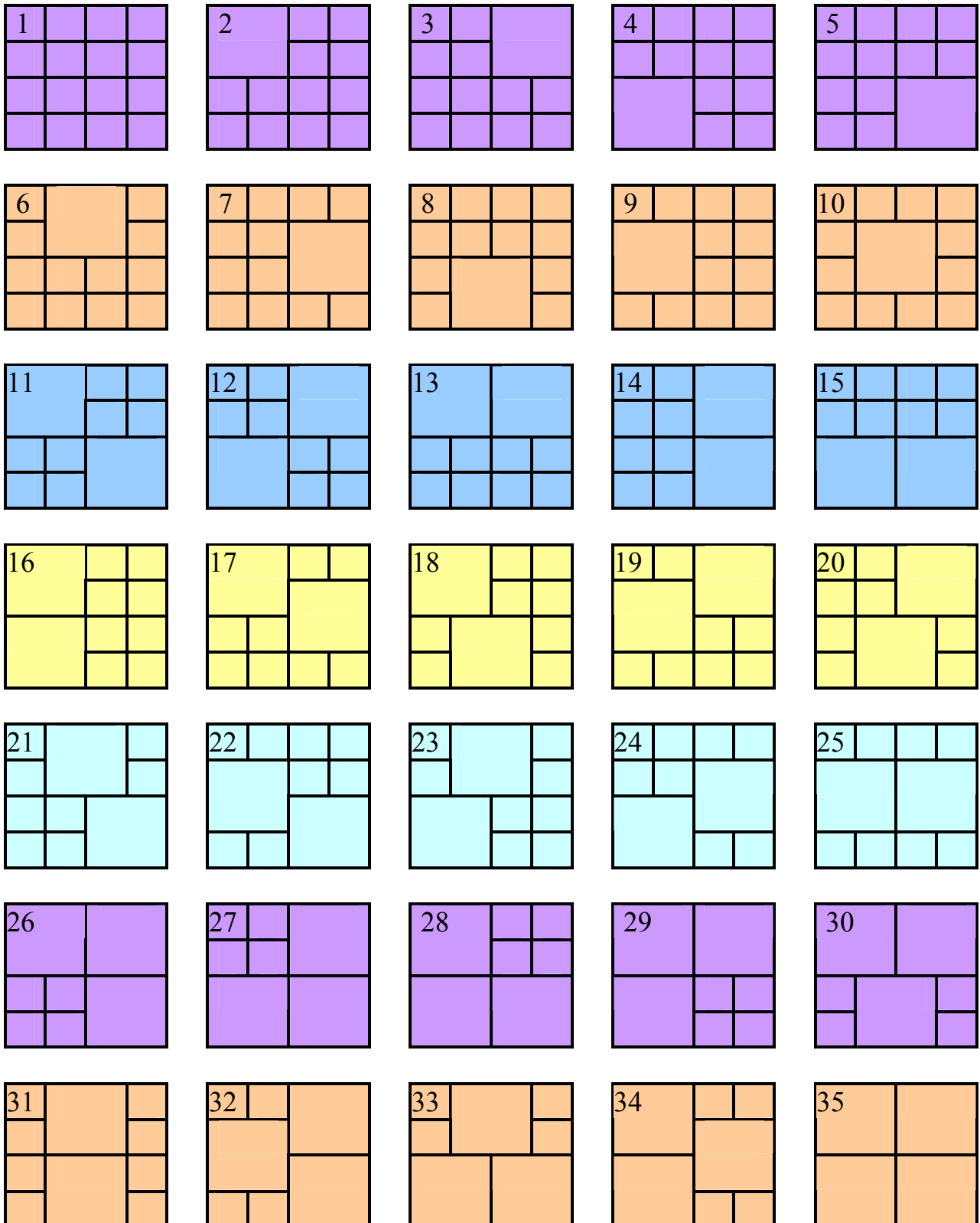
1. Куб розбито на 27 однакових кубиків. У початковий момент жук знаходиться в центральному кубіку. Із кожного кубика жук може переходити до сусіднього, що має з ним спільну грань. Чи зможе жук обійти всі кубики, побувавши в кожному по одному разу?
2. Дно прямокутної коробки викладено плитками розміру  $2 \times 2$  та  $1 \times 4$ . Плитки висипали з коробки і загубили одну плитку  $2 \times 2$ . Замість неї дістали плитку  $1 \times 4$ . Доведіть, що викласти дно коробки плитками тепер не вдасться.
3. Шаховий король обійшов дошку  $9 \times 9$ , побувавши точно один раз на кожному полі. Маршрут короля не замкнений і, можливо, самоперетинається. Яка найбільша можлива довжина такого маршруту, якщо довжина ходу по діагоналі дорівнює  $\sqrt{2}$ , а по вертикалі або горизонталі – 1?
4. Правильний трикутник зі стороною  $n$  розбито прямими, паралельними сторонам трикутника, на  $n$  квадратних правильних трикутників зі стороною 1. По сторонах отриманих трикутників проведена незамкнена ламана, що проходить через всі вершини трикутників точно по одному разу. Доведіть, що не менше  $n$  пар сусідніх ланок ламаної утворюють між собою гострий кут.

## 3. ЗАДАЧІ НА УПАКУВАННЯ

**Задача 1.** (7-8 клас). **1)** Скільки є способів укладання ящиків у фургон, що має форму прямокутного паралелепіпеда розміру  $4 \times 4 \times 2$ , якщо ящики – двох видів:  $1 \times 1 \times 1$  та  $2 \times 2 \times 2$ ? Звертаємо увагу на те, що у кожному способі укладання сума об'ємів усіх ящиків двох

видів рівна об'єму фургона. (5-6 класи). 2) Скільки є способів мощення дитячого майданчика прямокутної форми, розміру  $4 \times 4$ , за допомогою квадратних плиток двох видів:  $1 \times 1$  та  $2 \times 2$ ? Звертаємо увагу на те, що у кожному способі мощення сума площ усіх плиток двох видів рівна площі дитячого майданчика.

**Розв'язання.** Для задач 1) та 2) запропонуємо одну схему розв'язування. Достатньо зафіксувати в основу прямокутного паралелепіпеда, тобто прямокутник  $4 \times 4$ , і одну його вершину, щоб перерахувати всі способи такого укладання. Наводимо всі способи укладання ящиків (плиток) за допомогою малюнків.

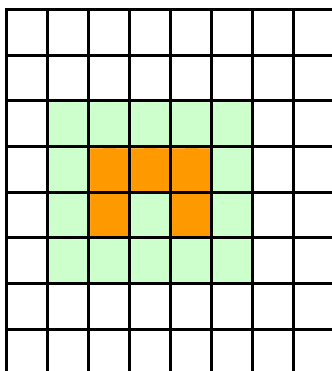


*Відповідь:* 35 способів.

**Задача 2.** (7-9 клас). Посередині білого паперу у клітинку, розміру  $8 \times 8$ , суцільно замалювали кілька сусідніх клітинок у помаранчевий колір так, що утворилася одна замкнена клітинкова область, яка не містить замальованих клітинок на краях паперу. (Будь-які дві клітинки назвемо сусідніми, якщо вони мають одну спільну сторону.) Потім перефарбували всі білі суміжні з помаранчевими клітинки у зелений колір. (Будь-які дві клітинки назвемо суміжними, якщо вони мають хоча б одну спільну точку). Яка найменша непарна кількість найкоротших ламаних може бути проведена на такому папері, якщо будь-яка ламана має один кінець усередині однієї з помаранчевих клітинок, а другий кінець ламаної – усередині зеленої клітинки, і при цьому кожна зелена клітинка містить лише один кінець ламаної?

**Розв'язання.**

1. Якщо помаранчева клітинка є суміжною до восьми зелених клітинок, то найменша кількість найкоротших ламаних рівна кількості суміжних кліток, отже, у цьому випадку  $m=8$  ламаних.
2. Якщо дві помаранчеві клітинки є суміжними до десяти зелених клітинок, то найменша кількість найкоротших ламаних рівна кількості суміжних кліток, отже, у цьому випадку  $m=10$  ламаних.
3. Якщо три помаранчеві клітинки є суміжними до дванадцяти зелених клітинок, то маємо два способи виділення помаранчевої області. А найменша кількість найкоротших ламаних в обох випадках рівна кількості суміжних кліток, отже, у цьому випадку  $m=12$  ламаних.



Мал. 1

4. Якщо чотири помаранчеві клітинки, то для випадків, коли суміжними є чотирнадцять зелених клітинок, найменша кількість найкоротших ламаних рівна кількості суміжних кліток. Отже, у цьому випадку  $m=14$  ламаних. У випадку, коли помаранчева область є квадратом  $2 \times 2$ , то найменша кількість найкоротших ламаних рівна 12.
5. Якщо п'ять помаранчевих клітинок, то у випадку, що зображений на малюнку 1, маємо 15 суміжних клітинок зеленого кольору. Ці 15 клітинок визначають 15 кінців найкоротших ламаних, що відповідають умові задачі.

Зрозуміло, що при збільшенні кількості клітинок, які суцільно фарбуються в помаранчевий колір, отримаємо більше, ніж 15 суміжних клітинок. Зазначимо, що у випадку, коли зафарбовано  $k$  помаранчевих клітинок, а суміжних клітинок зеленого кольору  $n$ , то найменша кількість найкоротших ламаних рівна сумі всіх суміжних зелених клітинок і всіх помаранчевих клітинок, сусідніх тільки з помаранчевими клітинками.

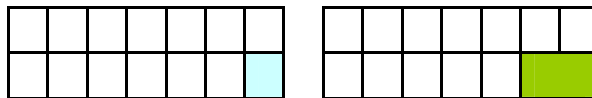
**Відповідь:** 15 ламаних.

## Задача на виведення рекурсивних формул

**Задача 3.** (9-11 клас). У проектувальників блочного будинку є можливість на одному поверсі закласти у проект різні квартири. У планшеті ці квартири мають форму квадрата, розмір за масштабом проекту якого  $1 \times 1$ , та форму прямокутника розміру  $1 \times 2$ . Скількома способами можна викласти проект першого поверху блочного будинку, якщо цей поверх має форму прямокутника  $2 \times 5$  за масштабом проекту? Блок квартири, що на планшеті позначений розміром  $1 \times 2$ , на заводі виготовляють так, що його можна поставити лише довгою панеллю вздовж довгої панелі будинку.

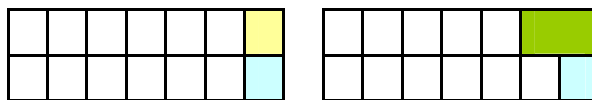
**Розв'язання.** Побудуємо рекурсивні співвідношення для знаходження кількості способів викладення поверху у випадку, якщо він має форму прямокутника  $2 \times n$ , де  $n$  – довільне натуральне число.

Розглянемо праву нижню кутову клітинку. Ця клітинка може бути покрита або блоком  $1 \times 1$ , або  $1 \times 2$ . Таким чином, усі покриття поверху можна розбити на дві підмножини – із блоком  $1 \times 1$  у правому нижньому куті та з блоком  $1 \times 2$ . Позначимо через  $f(n)$  шукану кількість покриттів поверху  $2 \times n$ . Тоді можна записати:  $f(n) = g(n) + h(n)$ , де  $g(n)$  – кількість покриттів із блоком  $1 \times 1$  у правому нижньому куті (тобто з вирізаною кутовою клітинкою),  $h(n)$  – із блоком  $1 \times 2$  (див. мал. 2).



Мал. 2

Розглянемо праву верхню клітинку покриття з блоком  $1 \times 1$  у нижньому куті. Ця клітинка також може бути покрита або блоком  $1 \times 1$ , або блоком  $1 \times 2$ . У першому випадку отримаємо покриття  $2 \times (n-1)$  без вирізаної кутової клітинки, а в другому – покриття  $2 \times (n-1)$  із вирізаною кутовою клітинкою. Маємо (мал. 3):



Мал. 3

Розглянемо праву верхню клітинку покриття з блоком  $1 \times 2$  в нижньому куті. Ця клітинка також може бути покрита або блоком  $1 \times 1$ , або блоком  $1 \times 2$ . В першому випадку отримаємо покриття  $2 \times (n-1)$  з вирізаною кутовою клітинкою, а в другому випадку – покриття  $2 \times (n-2)$  без вирізаної кутової клітинки. Маємо (див. мал. 4):



Мал. 4

Таким чином, отримали систему таких рекурентних співвідношень:

$$\begin{cases} f(n) = g(n) + h(n), \\ g(n) = g(n-1) + f(n-1), \\ h(n) = g(n-1) + f(n-2). \end{cases} \quad (1)$$

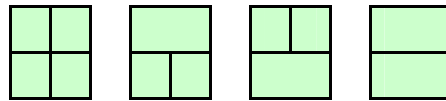
Зрозуміло, що з системи (1) можна вилучити змінну  $h(n)$ , якщо підставити третє рівняння в перше. Отримаємо нову систему рекурентних співвідношень:

$$\begin{cases} f(n) = f(n-2) + g(n-1) + g(n), \\ g(n) = g(n-1) + f(n-1). \end{cases} \quad (2)$$

За рекурентними співвідношеннями (2) можна знайти розв'язання задачі у випадку, якщо поверх має форму прямокутника  $2 \times n$ , де  $n$  – довільне натуральне число.

Але ще необхідно знайти:  $f(0)=0$ ,  $g(1)=1$ ,  $f(1)=1$ .

Зрозуміло, що легко перевірити для прямокутника  $2 \times 2$  (див. мал. 5):



Мал. 5. Усі покриття поверху розміру  $2 \times 2$

Створимо таблицю, в яку запишемо знайдені значення (для кожного  $n=1,2,\dots,10$ , обчислюємо спочатку  $g$ , потім  $f$ ).

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(n)$	1	4	9	25	64	169	441	1156	3025	7921
$g(n)$	1	2	6	15	40	104	273	714	1870	4895

Відповідь. 64 способи.

#### 4. КЛІТИНКОВІ ФІГУРИ

«Поки алгебра та геометрія розвивалися окремо одна від одної, їх прогрес був повільним, застосування обмеженим; коли ж ці дві науки стали об'єднаними, вони стали допомагати одна одній і швидко крокувати до вдосконалення.»

*Ж. Лагранж*

#### Зарядка для мозку:

Про користь ранкової зарядки сперечатися, здається не варто.

Десять-п'ятнадцять хвилин фізичних вправ, обливання холодною водою – і ви всі готові до труднощів цього дня.

Але ж удень працюють не тільки м'язи, а й мозок. Йому, як і м'язам, теж потрібний «розігрів», своєрідна гімнастика думки.

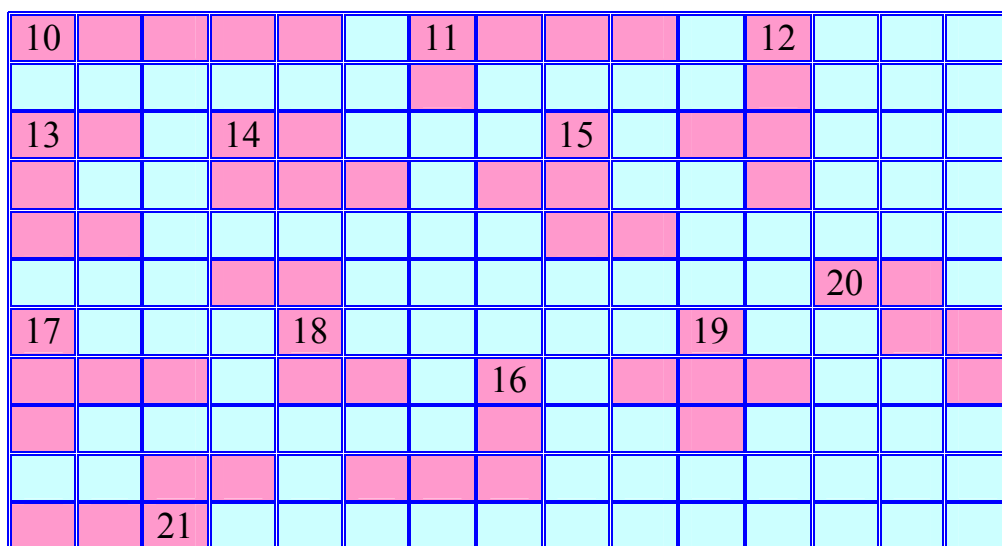
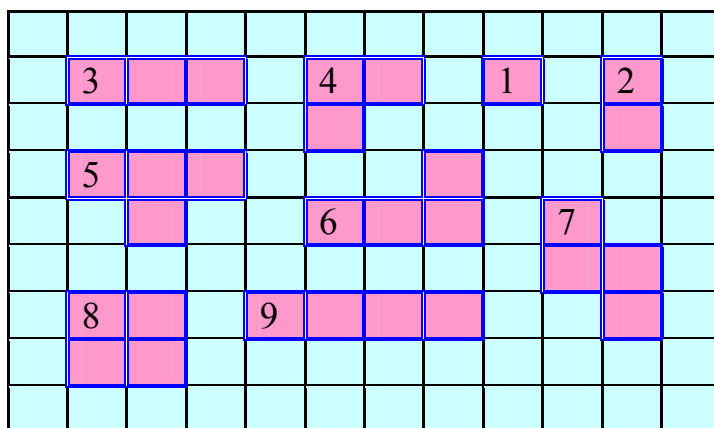
Ось яку «зарядку» для мозку, яка допоможе вам настроїтись на робочий лад, активізувати пам'ять, швидко і безпомилково мислити, пропонує відомий американський медик з Балтиморського університету професор Дж.-К. Редноуз.

Усього треба виконати за десять хвилин сім вправ. Усі їх вимовляйте вголос.

1. Якогомога швидше порахуйте у зворотному порядку від 100 до 1.
  2. Прокажіть алфавіт, придумуючи на кожну літеру слово, причому якнайшвидше. Якщо ви задумались над якоюсь літерою більш як на 30 секунд, то пропустіть її й думайте над наступною.
  3. Вимовіть 20 чоловічих імен, нумеруючи кожне з них.
  4. Вимовіть 20 жіночих імен, нумеруючи кожне з них.
  5. Вимовіть 20 назв їжі, нумеруючи кожне з них.
  6. Вимовіть 20 слів, нумеруючи кожне з них, що починаються з вашої улюбленої літери.
  7. Ваші очі могли бути заплющеними під час цих вправ. Тепер заплющіть їх. Порахуйте до 20 і назад. І розплющіть очі.
- Ось і все, ваш мозок «розігрівся», і ви готові до роботи.

### Осмислення нових знань:

**Означення клітинкової фігури.** Фігурка називається клітинковою, якщо вона складається з квадратиків розміром 1x1, причому кожен квадратик 1x1 має спільну сторону з не менш ніж одним квадратиком 1x1.



**Одноклітинковий квадратик 1x1** вважають клітинковою фігуркою.

**Зауваження.** Два квадратики 1x1 не будуть клітинковими фігурками, якщо вони мають тільки одну спільну вершину.

**Одноклітинкова** та **двоклітинкова** фігурки – це відповідно квадратик 1x1 (номер 1) та прямокутник 1x2 (номер 2).

**Триклітинкових** фігурок усього є два види. Це фігурки під номерами 3 та 4.

*Завдання:* Дослідити види 4-клітинкових та 5-клітинкових фігурок.

**Чотириклітинкових** фігурок є п'ять видів. Це фігурки під номерами 5, 6, 7, 8, 9.  
**П'ятиклітинкових** фігурок усього є 12 видів (номери 10-21).

### **Практична частина заняття**

**Завдання для вироблення умінь та навичок використовувати властивості:**

1. Чи можна розрізати клітинковий квадрат  $5 \times 5$  на різні 5 клітинкові фігурки?
2. Яку найбільшу кількість різних клітинкових фігурок можна помістити в квадрат  $5 \times 5$ ?
3. Яку найбільшу кількість різних клітинкових фігурок можна помістити в квадрат  $4 \times 4$ ?
4. Чи можна розрізати клітинковий квадрат  $4 \times 4$  на: **a)** усі різні; **б)** рівні 4-клітинкові фігурки?
5. Яку найбільшу кількість 5-клітинкових фігурок можна помістити в квадрат  $4 \times 4$ ?
6. Чи можна розрізати клітинковий квадрат  $100 \times 100$  на T-подібні 4-клітинкові фігурки?
7. Складіть таблицю 6-клітинкових фігурок. Скільки є видів таких фігурок?
8. Розмістіть найбільшу кількість 5-клітинкових кутиків у квадраті  $5 \times 5$ .
9. Чи можна розрізати клітинковий квадрат  $4 \times 4$  на: **a)** 5 різних клітинкових фігурок; **б)** 6 різних клітинкових фігурок?
10. Чи можна викласти квадрат розміру  $6 \times 6$  клітинок T-подібними 4-клітинковими фігурками?

**Джерело:**

<http://olimpmath.blogspot.com/2014/>