

# **Задачі на переливання та зважування**

## Зміст.

1. Суть задач на зважування та переливання.
2. Розв'язування задач на переливання.
3. Розв'язування задач на зважування.
4. Завдання для самоконтролю.

## Цілі та завдання вивчення розділу.

Щоб навчитися правильно міркувати, потрібно вирішувати завдання на кмітливість. Одним із класів завдань такого типу є завдання на зважування та переливання. У математичній науці завдання на зважування та переливання допомагали людям використовувати науку в повсякденному житті, розвивати логіку і мислення. У результаті опрацювання запропонованого матеріалу учні познайомляться з новими для них задачами на переливання та зважування, навчаться їх розв'язувати. Успішне вивчення розділу дозволяє: розв'язувати логічні задачі на зважування та переливання, розвивати логічне мислення. Мати уяву про графічний спосіб. Знати ідею розв'язування задач на зважування та переливання. Володіти ключовими поняттями: логічні задачі, переливання, зважування, схема, табличний спосіб.

## 1. ЗАДАЧІ НА ПЕРЕЛИВАННЯ

### Методичні рекомендації щодо вивчення розділу.

У загальному вигляді **задачі на переливання** можна сформулювати так:

Є дві порожні посудини  $A$  і  $B$  місткістю відповідно  $a$  і  $b$  одиниць об'єму (можна вважати, що  $a < b$ ), і наповнена посудина  $C$  місткістю  $c$  одиниць ( $c > a + b$ ). Переливаючи послідовно рідину з однієї посудини в іншу, треба досягти того, щоб у посудині  $B$  залишилося рівно  $d$  ( $d < b$ ) одиниць об'єму даної рідини. При цьому передбачається, що правомірними (доступними) є лише наступні чотири типи переливань:

- 1) із посудини  $C$  в посудину  $A$  або  $B$  можна лити рідину доти, поки вона не наповниться вщерть;
- 2) із посудини  $B$  можна лити рідину в посудину  $A$  доти, поки або  $A$  не стане повною, або  $B$  не стане порожньою;
- 3) з посудини  $A$  можна лити рідину в посудину  $B$  доти, доки  $B$  не стане повною або не спорожніє  $A$ ;
- 4) усю рідину з посудини  $A$  або  $B$  можна вилити в  $C$ .

Задачу на переливання називають **задачею Пуассона**. Симеон Дені Пуассон (1781-1840) – відомий знаменитий французький математик, механік та фізик. Коли він був ще молодим і вагався у виборі життєвого шляху, приятель показав йому кілька задач, із якими сам не зміг упоратися. Пуассон швидко розв'язав усі. Але особливо йому сподобалася задача про дві посудини: «Дехто має 12 пінт виноградного соку (пінта – це 0,568 л) і хоче подарувати половину другу, але у нього лише дві порожні посудини: одна – на 8, друга – на 5 пінт. Яким чином налити в більшу посудину 6 пінт?» «Ця задача визначила мою долю, – казав Пуассон. – Я вирішив, що обов'язково стану математиком».

Задачі на переливання допомагають розвивати логічне мислення, просторову уяву, витримку, наполегливість у знаходженні оптимального розв'язку. Традиційно в задачах на переливання посудини не мають поділок, тобто переливати можна лише

доти, поки посудина, в яку наливаємо, не заповниться до кінця, або поки зовсім не спорожніє посудина, з якої переливаємо. Просто так зупинитися на середині або розлити вміст посудини на дві рівні частини теж не вийде.

Задачі на переливання рідин можна розв'язувати різними способами: з початку, з кінця, добором варіантів. Але найбільш поширений метод проб.

Для ілюстрації розглянемо наступну задачу. Як за допомогою двох посудин, що вміщують 5 л і 7 л, налити з крану 6 л?

**Розв'язання.** Позначимо посудину, в якій 5 л – (5), а посудину, в якій 7 л – (7).

Наповнимо (7), переливаємо з неї 5 л в (5) та ці 5 л виливаємо, а 2 л, що залишилися в (7), переливаємо в (5). Наповнимо (7), переливаємо 3 л в (5) та виливаємо з (5) усю воду, а 4 л з (7) переливаємо в (5). Наповнимо (7), переливаємо 1 л в (5). У (7) залишилося 6 л, які необхідно було виміряти.

Саме такого типу задачі й називають задачами на переливання. Їх розв'язання краще записувати у вигляді таблиці, де видно, яка кількість рідини знаходиться в посудинах на даний момент часу.

Запис таких задач продемонстровано в розглянутих нижче прикладах.

**Приклад 1.** Поряд із лабораторією протікає бурхлива річка. Як за допомогою двох посудин об'єму 3 і 5 літрів відміряти рівно 4 л річкової води?

**Розв'язання.** 4 літри можуть поміститися лише в 5-літровій посудині. Вони можуть бути отримані після доливання 1 літра до 3, 2 літрів до 2, 3 літрів до 1, або шляхом відливання від 5 літрів 1 літра. Щоб можна було відлити рівно 1 літр, потрібно, щоб у посудині призначення було вільне місце рівно для 1 літра, тобто щоб у 3-літровій посудині перед цим було 2 літри. Різницю об'ємів посудин легко отримати: 2 літра виходять, якщо набрати повну 5-літрову посудину і відлити з неї в порожню 3-літрову посудину. Після цього їх треба перелити в 3-літрову посудину, заздалегідь випорожнивши її назад у річку.

Розв'язання цієї задачі можна подати у вигляді схеми, яку можна зобразити таблицею, де вказується кожен крок процесу переливань:

Крок	1	2	3	4	5	6	7
3 л	0	0	3	0	2	2	3
5 л	0	5	2	2	0	5	4
річка			+3				

**Приклад 2.** Як, використовуючи банки 3 л і 5 л, набрати води рівно 1 л?

Подамо розв'язання задачі у вигляді таблиці:

Банки	Переливання			
5 л	—	3	3	5
3 л	3	—	3	1

**Приклад 3.** Яким чином із річки можна принести рівно 6 л води, якщо є тільки два відра – 4 л і 9 л?

Подамо розв'язання задачі вигляді таблиці:

Відра	Переливання							
9 л	9	5	5	1	1	—	9	6
4 л	—	4	—	4	—	1	1	4

**Приклад 4.** Бідон місткістю 10 л наповнений молоком. Треба перелити з цього бідона 5 л у семилітровий бідон, використовуючи вільний трилітровий бідон.

Бідони	Переливання							
10 л	3	3	6	6	9	9	2	2
7 л	7	4	4	1	1	—	7	5
3 л	—	3	—	3	—	1	1	3

**Приклад 5.** Маємо три посудини місткістю відповідно 8 л, 5 л і 3 л, найбільша з них наповнена молоком. Як поділити молоко на дві рівні частини, використовуючи ці посудини?

Пос.\№	1	2	3	4	5	6	7	8
8 л	8	3	3	6	6	1	1	4
5 л	0	5	2	2	0	5	4	4
3 л	0	0	3	0	2	2	3	0

### Завдання для самостійного опрацювання.

1. Як за допомогою двох бідонів ємністю а) 5 л і 8 л відлити з молочної цистерни 7 л молока; б) 10 л і 7 л відлити 8 л?
2. Відміряйте 2 літри води, використовуючи: а) 4- і 5-літрові ємності; б) 4- і 3-літрові ємності.
3. Як розділити 18 л меду порівну між двома бджолярами, використовуючи порожні ємності 13 і 8 літрів?
4. Перша посудина вміщує 9 л, друга 5 л, а третя – 3 л. Перша посудина заповнена водою, а інші дві порожні. Як за допомогою цих посудин відміряти 1 л води? Як відміряти 4 л?
5. Маємо кран, із якого можна набрати досить багато води, і раковину, щоб зливати зайву воду. Чи можна набрати з крана рівно 2 л води за допомогою 7-літрової та 11-літрової банок?
6. Із повної посудини ємністю 13 літрів треба відлити 7 л гасу, користуючись двома порожніми відрами: 4 л і 9 л. Як це зробити?
7. Маємо два піщаних годинники на 7 хв і на 11 хв. Каша повинна варитися 15 хв. Як зварити цю кашу, перевертаючи годинники мінімальну кількість разів?
8. Як відміряти 10 л молока, користуючись глечиками ємністю 50 і 30 л?
9. Є 3-літрово банка соку й дві порожні (літрово і 2-літрово). Як розлити сік так, щоб у всіх банках було по 1 л соку?
10. Як за допомогою 5-літрової і 9-літрової відер набрати з річки 3 літри води?
11. У трьох бочках 11, 6 і 7 літрів води. Треба за три рази перелити воду так, щоб у кожній бочці було по 8 літрів води. Доливати у бочку треба стільки літрів, скільки у ній уже є.

12. У бочці 20 літрів води. Як за допомогою двох порожніх відер на 7 і 13 л за найменше число переливань набрати 5 л води?
13. Як із повного бідона ємністю 12 л відлити половину води, користуючись 8 і 5-літровими бідонами?
14. Є три бідони ємністю 14, 9 і 5 літрів. У великому 14 літрів молока, інші – порожні. Як за допомогою цих посудин розлити 14 л навпіл за 14 операцій?
15. Відро місткістю 10 л вщерть наповнене молоком. Є два менші відерця на 5 і 7 літрів. Як за їх допомогою відміряти рівно 6 літрів молока?
16. Дано 3 ємності: ємність *A* (8-літрова з 5 літрами води); ємність *B* (5-літрова з 3 літрами води); і ємність *C* (3-літрова з 2 літрами води). Відміряйте 1 літр, переливши воду лише двічі.
17. У каністрі не менше 10 л дизельного пального. Як відлити з неї 6 літрів, маючи дев'ятилітрове відро і п'ятилітрову банку?
18. У великого алхіміка є нерозчинна колба, в якій міститься 12 мілілітрів сірчаної кислоти, а також дві нерозчинні мензурки об'єму 5 і 7 мілілітрів. Як йому отримати дві порції по 6 мілілітрів сірчаної кислоти, необхідні для досліду? (Кислота розчинить будь-який інший посуд у лабораторії.)
19. Дядько Федір зібрався поїхати до батьків у гості і попросив у кота Матроскіна 4 л простоквашинського молока. А у Матроскіна лише два порожніх бідони: трилітровий і п'ятилітровий. І восьмилітрове відро, наповнене молоком. Як Матроскіну відлити 4 л молока за допомогою наявних ємностей?
20. У Карлсона є відро варення, воно вміщає 7 літрів. У нього є також 2 порожні відерця – 4-літрове і 3-літрове. Допоможіть Карлсону відлити 1 літр варення до чаю в менше (3-літрове) відерце, залишивши 6 літрів у великому (7-літровому) відрі.
21. Тому Соєру потрібно пофарбувати паркан. Він має 12 л фарби і хоче відлити з цієї кількості половину, але у нього немає посудини місткістю 6 л. У нього дві ємності: одна – місткістю 8 л, а інша – місткістю 5 л. Яким чином налити 6 л фарби в посудину на 8 л? Яке найменше число переливань для цього необхідно зробити?
22. Губці Бобу терміново потрібно налити з крана 6 л води. Але він має лише дві посудини: 7-літрову і 5-літрову. Як йому це зробити?
23. Улітку Віні-Пух зробив запас меду на зиму і вирішив розділити його навпіл, щоб з'їсти половину до Нового року, а іншу половину – після Нового року. Увесь мед знаходиться у відрі, яке вміщає 6 літрів, у нього є 2 порожні банки – 5-літрова і 1-літрова. Чи може він розділити мед так, як задумав?
24. Тетянка стоїть на березі річки. У неї є 2 глиняні глечики: один на 5 л, а про другий Таня пам'ятає тільки те, що він вміщує чи то 3, чи то 4 л. Допоможіть Тетянці визначити ємність другого глечика. (Заглядаючи у глечик, не можна зрозуміти, скільки у ньому води.)
25. Є 4 циліндричні ємності місткістю 200 мл, 400 мл, 600 мл і 800 мл. Ємність місткістю 400 мл наповнена молоком, інші – порожні. Користуючись тільки цими ємностями, розлийте молоко так, щоби в кожній ємності було рівно 100 мл молока.
26. Розділіть порівну між двома родинами 12 л квасу, що знаходиться в 12-літровому барилі, скориставшись для цього порожніми а) 8-літровим відром і трилітровою каструлею; б) 8-відерною й 5-відерною бочками.
27. Є два відра ємністю 5 і 9 літрів води. Вам необхідно принести з колодязя рівно 3 л води. Як це зробити двома способами?
28. У бочці знаходиться не менш ніж 13 відер бензину. Як відлити з неї 8 відер за допомогою 9-відерної й 5-відерної бочок?

29. Маємо посудини ємністю 12 л, 9 л і 5 л. Перша з них заповнена рідиною, а дві інші – порожні. Скільки літрів можна відлити з першої посудини, користуючись другою й третьою? Відлийте 6 л рідини.
30. На базі є 5 діжок, наповнених бензином, 11 напівпорожніх діжок і 8 порожніх. Як розділити ці діжки, не змінюючи їх вмісту, між трьома підприємцями так, щоб вони отримали порівну діжок і бензину?
31. 10-літровий бідон наповнений водою. Як за допомогою порожніх 7-літрового й 3-літрового бідонів відміряти 5 літрів води?
32. Є 7-літрово ємність, заповнена водою, і дві порожні – об'єму 4 і 3 літри. Поділіть воду на 2, 2 і 3 літри, використовуючи мінімальну кількість переливань.
33. Є глечик, що містить 4 л вина. Треба розділити ці 4 л порівну між двома приятелями, маючи додатково лише 2 порожні глечики місткістю 2,5 і 1,5 л.

## 2. ЗАДАЧІ НА ЗВАЖУВАННЯ

### Методичні рекомендації щодо вивчення розділу.

**Задачі на зважування** – досить поширений вид математичних завдань. У цих задачах пропонується знайти спосіб, за яким за допомогою декількох зважувань на шалькових терезах без гир можна виявити предмет, що відрізняється від інших вагою.

Задачі на зважування різко відрізняються від звичайних шкільних задач, які ви звикли розв'язувати на уроці. Щоб розв'язати таку задачу, необхідно уявити відповідну ситуацію і проаналізувати всі можливі варіанти. Розв'язати таку задачу – означає описати певні дії і зроблені з них висновки.

У таких завданнях той, хто розв'язує задачу, повинен локалізувати предмет, що відрізняється від інших по вазі за обмежене число зважувань. Пошук розв'язування в цьому випадку здійснюється шляхом операцій порівняння, щоправда, не лише одиночних елементів, але і груп елементів між собою. Розв'язуючи такі задачі, не забувайте розібрати всі варіанти. Якщо шукаєте фальшиву монету, то корисно поділити всі монети на три купки, при цьому кількість зважувань зменшується.

У задачах на зважування часто йде мова про терези без гир. Ними можна порівнювати предмети (важчий, легший, однакові), але не можна виміряти точну їх вагу. Розглянемо кілька таких задач.

**Задача 1.** Серед трьох монет одна фальшива (легша від двох інших, однакових за вагою). За допомогою одного зважування на терезах без гир виділити фальшиву монету.

**Розв'язання.** Одну монету покладемо на одну шальку терезів, а другу – на іншу шальку. Якщо вони зрівноважаться, то третя монета – фальшива. Якщо не зрівноважаться, то фальшива монета лежить на тій шальці, яка піднялася догори.

**Задача 2.** Серед восьми монет одна фальшива (легша від інших, однакових за вагою). За допомогою трьох зважувань на терезах без гир виділити фальшиву монету.

**Розв'язання.** Ділимо монети на дві рівні купки – по 4 монети в кожній. Зважуємо купки. Ту купку, яка легша, знову ділимо на дві однакові купки – тепер по дві монети в кожній. Знову проводимо зважування. Визначаємо, яка з них легша. Одну монету покладемо на одну шальку терезів, а другу – на іншу шальку. Фальшива монета лежить на тій шальці, яка піднялася догори. Задача розв'язана.

**Задача 3.** Лиска Аліска та Кіт Базиліо – фальшивомонетники. Базиліо робить монети, важчі за справжні, а Аліска – легші. У Буратіно є 15 однакових на вигляд монет, але якась одна – фальшива. Як двома зважуваннями на шалькових терезах без гир Буратіно може визначити, хто зробив фальшиву монету – Кіт Базиліо або Лиска Аліска?

**Розв’язання.** Буратіно може розділити свої монети на три купки по 7, 4, 4, або по 5, 5, 5, або по 3, 6, 6, або по 1, 7, 7 монет. При першому зважуванні він покладе на ваги дві купки монет однакової величини. Якщо при цьому терези виявилися в рівновазі, значить, усі монети на терезах справжні, а бракована монета в купці, що залишилася. Тоді при другому зважуванні на одну шальку терезів Буратіно покладе купку з бракованою монетою, а на другу – стільки справжніх монет, скільки всього монет він поклав на першу шальку, і тоді він одразу визначить, легша фальшива монета за справжню чи важча. Якщо ж при першому зважуванні терези виявилися не в рівновазі, значить, усі монети в купці, що залишилася, справжні. Тоді Буратіно прибере з терезів легку купку, а монети з важкої купки розділить на дві рівні частини і покладе на терези (якщо в купці було 5 чи 7 монет, заздалегідь додасть до них одну справжню монету). Якщо при другому зважуванні терези виявилися в рівновазі, значить, фальшива монета легша за справжні; якщо ні, то важча.

**Задача 4.** У пакеті є 9 кг манної крупи. За допомогою трьох зважувань, маючи гирю вагою 250 г, розділити крупу у два пакети: в один – 2 кг, у другий – 7 кг.

Розв’язання задачі подамо у вигляді схеми:

$$\begin{aligned} & 9 \text{ кг} \\ & 4,5 \text{ кг} - 4,5 \text{ кг} \\ & 2,250 \text{ кг} - 2,250 \text{ кг} \\ & 2,250 - 0,250 \text{ (відміряні за допомогою гирі третім зважуванням)} = 2 \text{ кг} \\ & 0,250 + 2,250 + 4,5 = 7 \text{ кг} \end{aligned}$$

### Завдання для самостійного опрацювання.

1. Є 10 монет. Одна з них фальшива і легша за справжню. Як за допомогою шалькових терезів без гир визначити, яка з монет фальшива?
2. Із дев’яти однакових на вигляд монет виділити одну фальшиву (важчу за справжні) за два зважування.
3. У Буратіно є 27 золотих монет. Але відомо, що Кіт Базиліо замінив одну з монет на фальшиву, і вона за вагою важча за справжні. Як за три зважування на шалькових терезах без гир Буратіно знайти фальшиву монету?
4. Із 61 монети за 4 зважування відокремити фальшиву (вона важча за інші).
5. Серед 101 однакових за виглядом монет одна фальшива, така, що відрізняється за вагою. Як за допомогою шалькових терезів без гир за два зважування визначити, легшою або важчою є фальшива монета? Знаходити її не потрібно.
6. Є 12 однакових монет, серед яких 1 монета фальшива (легша або важча, але це не відомо!) Є ваги, що показують значення «більше», «менше» чи «рівно». Треба знайти фальшиву монету за 3 зважування.
7. Є 13 монет, із них тільки 1 фальшива (невідомо, легша чи важча за справжні). Треба знайти цю монету за 3 зважування. Терези – стандартні: дві шальки без гир.
8. Є 5 монет, серед яких 1 фальшива (невідомо, легша чи важча за справжню). Вага справжньої монети 5 г. Як за допомогою 2 зважувань на терезах можна знайти фальшиву монету, маючи одну гирю вагою 5 г?

9. Є стандартні терези з шальками та дві гири: 10 і 2 кг. Як за їх допомогою зважити 3 кг слив?
10. Є 68 монет, усі вони різні за вагою. Як за 100 зважувань знайти найлегшу і найважчу?
11. У вас 10 мішків з монетами, по 1000 монет у кожному. В одному з мішків усі монети фальшиві. Справжня монета важить 1 г, фальшива – 1,1 г. Маючи точні ваги, як визначити мішок із фальшивими монетами за допомогою лише одного зважування? А якщо невідомо, скільки мішків було з фальшивими монетами?
12. На різдвяній ялинці висять три пари кульок: дві білі, дві блакитні і дві червоні. Зовні кульки однакового розміру. Проте в кожній парі є одна легша і одна важча кульки. Всі легші кульки важать між собою однаково, як і всі важчі кульки. За допомогою двох зважувань на шалькових терезах визначте всі легші і всі важчі кульки.
13. Є дев'ять мішків: вісім із піском і один – із золотом. Мішок із золотом лише ледь важчий. Вам дається два зважування на шалькових терезах, щоб знайти мішок із золотом.
14. Є 10 мішків, у кожному з яких міститься по 10 золотих монет. Кожна монета важить 10 г. Є один мішок, у якому всі монети фальшиві і важать по 9 г. Як за 1 зважування взнати, у якому мішку фальшиві монети, маючи ваги зі шкалою в грамах, які можуть зважувати не більше ніж 750 г.
15. Є 27 тенісних кульок. 26 важать однаково, а 27-а важча. Яка мінімальна кількість зважувань на шалькових терезах гарантує знаходження важчої кульки?
16. У пакеті 7 кг крупів. За допомогою терезів із гирями 50 г і 200 г треба розкласти ці крупи у два пакети: в один – 2 кг, у другий – 5 кг. Спробуйте це зробити за три зважування. Знайдіть два способи розв'язання цієї задачі.
17. У пакеті 3 кг 600 г крупів. Є шалькові терези і гиря 200 г. Як поділити крупи на три пакети: 800 г, 800 г і 2 кг – за допомогою трьох зважувань?
18. Маємо різні предмети – келихи (К), чашки (Ч), пляшки (П) і глечики (Г), урівноважені на шальках настільних рівноплічних терезів у співвідношеннях:  $2К+Ч=2Г$ ,  $5Ч=2П+Г$ ,  $2П+3Г=5К$ . Скільки келихів, чашок і пляшок знадобиться, аби врівноважити 3 глечики?

#### Джерела:

<https://sites.google.com/site/pidgotovkaolimpiadi/>

<http://olimpmath.blogspot.com/2014/08/>

<https://pandia.ru/text/>

[zadachki.in.ua/](http://zadachki.in.ua/)

[zagadki.org.ua/ua/riddles/](http://zagadki.org.ua/ua/riddles/)