Курс: «Практикум з розв'язування олімпіадних та конкурсних задач» **ст. викл. Рего В. Л.**
Навчальний матеріал до Теми 8:

Принцип Діріхле. Задачі на застосування принципу Діріхле

ПРИНЦИП ДІРІХЛЕ
PIGEONHOLE PRINCIPLE
SKATULYAELV
ZASADA SZUFLADKOWA
ПРИНЦИП НА ЧЕКМЕДЖЕТАТА

1. ЗАДАЧІ НА ПРИНЦИП ДІРІХЛЕ

Мотивація вивчення нових знань.
«...Помиляються ті, хто запевняє, ніби математичні науки нічого не кажуть про прекрасне або добре.
...найголовніші форми прекрасного – порядок (у просторі), співрозмірність і визначеність – математичні науки якраз і найвиразніше показують їх.»

Арістотель

Осмислення нових знань.
Дуже часто буває так, що при розв'язуванні складних математичних задач використовують різний інструментарій, уже відомі методи, прийоми, принципи, теорії тощо. Завдяки цьому деякі класи задач стають алгоритмічними, а їхні розв'язки – доступними широкому загалу.
На цьому занятті ми познайомимося з принципом, що формулюється надзвичайно просто і доступно навіть для наймолодших школярів, із його допомогою ми навчимося розв'язувати досить складні задачі. Жартома цей принцип формулюється так: «Якщо п'ятьох зайців розсадити в чотири клітки, то принаймні в одній із них опиняться два зайці».
В україномовній математичній літературі цей принцип називають ***принципом Діріхле*** на честь відомого німецького математика Петера Лежена Діріхле (1805-1859), який перший за допомогою такого простого твердження отримав глибокі результати про наближення ірраціональних чисел раціональними (в англомовній літературі цей принцип більше відомий як ***pigeonhole principle*** – «принцип голубника»). Зауважимо, що задачі цього розділу не претендують на оригінальність, більшість із них уже стала математичним «фольклором», і вже зараз складно встановити їх авторів.
Розглянемо кілька елементарних задач.

1. У мішку лежать кульки двох різних кольорів – чорного і білого. Яку найменшу кількість кульок потрібно вийняти з мішка, щоб серед них точно дві кульки виявились одного кольору?
Розв'язання. Зрозуміло: узявши три кульки, ми виявимо, що дві з них одного кольору. У даному випадку роль зайців відіграють кульки, а роль кліток – чорний та білий кольори.

2. У лісі росте мільйон ялинок. Відомо, що на кожній із них не більше ніж 800 тисяч голок. Доведіть, що в лісі знайдуться дві ялинки з однаковою кількістю голок.
Доведення. Припустімо, що в лісі всі ялинки мають різну кількість голок (на деякій ялинці голок могло не бути зовсім). Тоді в лісі не більше ніж 800 001 ялинка, що суперечить умові. Тут у ролі зайців були ялинки, а в ролі кліток – усі можливі варіанти кількості голок на них.

3. На 5 поличках книжкової шафи 160 книг, причому на одній із них – 3 книги. Доведіть, що знайдеться поличка, на якій не менше ніж 40 книг.
Доведення. Припустімо, що на кожній із решти 4 поличок не більше ніж 39 книг. Тоді на всіх 5 поличках не більше ніж $3+4\cdot39=159$ книг, що суперечить умові. Отже, на одній із поличок не менше ніж 40 книг.

Проте найчастіше принцип Діріхле використовують в узагальненому формулюванні.

Узагальнений принцип Діріхле. ***Якщо nk+1 предмет розкладено в n ящиків, то принаймні в одному з ящиків знаходиться не менше ніж k+1 предмет.***
Доведення. Нехай x_i (i=1,...,n) — кількість предметів, що знаходяться в i-му ящику.
За умовою $x_1+x_2+... +x_n=nk+1$. Припустімо, що для кожного i виконується $x_i<k$. Тоді $x_1+x_2+... +x_n<nk$, що суперечить умові. Отже, наше припущення було хибним, тобто в одному з ящиків є принаймні k+1 предмет.
Цей спосіб доведення надалі спрощено також називатимемо ***принципом Діріхле.***

4. У місті більше ніж 8 мільйонів жителів. Науковці вважають, що в кожної людини менш ніж 200 000 волосин на голові. Доведіть, що є принаймні 41 житель з однаковою кількістю волосин на голові.
Доведення. Оскільки 40–200000=8000000 (кількість волосин у людини коливається від 0 до 199 999, всього 200 000 варіантів), то згідно з принципом Діріхле знайдеться принаймні 41 житель, котрий має однакову кількість волосин на голові. Тут роль предметів відіграють жителі, а роль ящиків – усі можливі варіанти кількості волосин на голові.

5. Дано два многочлени від однієї змінної, кожен із яких – сума 9 членів парного степеня, не більшого за 36. Доведіть, що в добутку обов'язково знайдуться три подібних члени.
Доведення. Якщо ми перемножимо два даних многочлени, то отримаємо новий многочлен степеня, не більшого за 72, кожний із 81 одночлена якого має парний степінь. Оскільки парних чисел від 0 до 72 є 37, то, згідно з принципом Діріхле, знайдуться принаймні три подібних члени.

6. Доведіть, що серед 82 кубиків, кожен із яких помальовано певним кольором, існує 10 кубиків різного кольору або 10 кубиків одного кольору.
Доведення. Якщо для розмалювання 82 кубиків використано не менше ніж 10 кольорів, то зрозуміло, що знайдеться 10 кубиків різного кольору. Якщо ж для розмалювання 82 кубиків використано не більше ніж 9 різних кольорів, то, згідно з принципом Діріхле, знайдеться принаймні 10 кубиків одного кольору. Тут у ролі предметів виступають кубики, а в ролі ящиків – кольори.

7. Цифри 1, 2, ..., 9 розбили на три групи. Довести, що добуток цифр в одній із груп не менший за 72.
Доведення. Оскільки $9!=1\cdot2\cdot...\cdot9=(8\cdot9)\cdot(3\cdot4\cdot6)\cdot(7\cdot5\cdot2)=70\cdot72^2=(71^2-1)(71+1)=$
$=71^3+71^2-71-1>71^3$, то, згідно з принципом Діріхле, добуток цифр в одній із груп не менший за 72.

8. 15 хлопчиків зібрали 100 грибів. Доведіть, що принаймні двоє з них зібрали однакову кількість.
Доведення. Припустімо, що твердження задачі неправильне. Тоді 15 хлопчиків зібрали щонайменше $0+1+2+...+14=14\cdot15:2=105$ грибів. Це суперечить умові.

2. УЗАГАЛЬНЕНИЙ ПРИНЦИП ДІРІХЛЕ

Запитання від математичного «духа» нашого математичного гуртка: *У конверті лежать вирізані з паперу квадрати, круги, трикутники – всього сім штук. Квадратів у три рази більше, ніж трикутників. Скільки в конверті кружків та інших фігур?*
Відповідь: три квадрати, три круги, один трикутник.

Мотивація вивчення нових знань.
«Що почуття часто заводять нас в оману — це, звичайно, правда, але такий закид може бути адресований математикам менше, ніж будь-кому. Адже саме математика передусім захищає нас від оманливості почуттів і навчає, що одна річ – як насправді влаштовані ті предмети, які сприймаються почуттями, а інша річ – якими вони здаються; ця наука дає найнадійніші правила, хто керується ними, того почуття не заведуть в оману.»

Л. Ейлер

Осмислення нових знань.
Інколи буває корисним ще таке переформулювання принципу Діріхле:
Якщо одне з кількох чисел більше від їх середнього арифметичного, то серед цих чисел знайдеться інше, що є меншим від їх середнього арифметичного.

9. У бригаді 7 чоловік і їх сумарний вік складає 322 роки. Доведіть, що з них можна вибрати трьох осіб, сумарний вік яких не менший за 138 років.
Доведення. Оскільки середній вік членів бригади складає 46 років, то сумарний вік трьох найстарших людей не менший за $3\cdot46=138$ років.

Принцип Діріхле можна також сформулювати зовсім «по-науковому», не використовуючи кліток і зайців.
Нехай A і B – скінчені множини, причому m – кількість елементів множини A, а n – кількість елементів множини B (m>n). Тоді при будь-якому

відображенні множини А в множину В знайдуться два елементи множини А, що мають той самий образ.

Принцип Діріхле допускає також інші переформулювання та узагальнення. Але нас надалі більше цікавитимуть різні способи його застосування. Розглянемо кілька задач про знайомства, зустрічі тощо.

10. Кілька футбольних команд проводять турнір в одне коло. Доведіть, що в будь-який момент турніру знайдуться дві команди, що зіграли до цього моменту однакову кількість матчів.

Доведення. Нехай n – кількість команд, що проводять турнір. Розгляньмо два випадки:

1) у даний момент турніру знайдеться команда, що не провела жодної гри;

2) протилежний.

Припустімо, що у випадку ***1)*** така команда одна. Якби їх було дві, то все доведено. Тому у випадку ***1)*** не буде жодної команди, що зіграла n–1 матч до даного моменту. Тоді, згідно з принципом Діріхле, серед n–1 команд (крім тієї, що не зіграла жодного матчу) можна вибрати дві, що зіграли однакову кількість матчів. Тут у ролі зайців виступають n–1 команд, а в ролі кліток – можливі кількості матчів від 1 до n–2, які вони зіграли. У випадку ***2)*** кількість матчів, що провели команди до даного моменту, змінюється від 1 до n–1. І тому знову, за принципом Діріхле, серед n команд знайдуться дві, що зіграли однакову кількість матчів.

11. 10 друзів відправили один одному святкові листівки. Кожний із них відправив 5 листівок. Доведіть, що якісь двоє друзів відправили листівки один одному.

Доведення. Обчислімо, скільки всього пар людей можна утворити з 10 друзів: 10·9:2=45. Оскільки всього було відправлено 10·5=50 листівок, то, згідно з принципом Діріхле, на якусь пару друзів припадає дві листівки.

12. У роботі деякого засідання брали участь 200 чоловік, причому кожен із них був знайомий не менше ніж зі 100 присутніми. Доведіть, що за круглий стіл для 4 осіб можна посадити 4 із присутніх так, щоб кожен із них сидів між своїми знайомими.

Доведення. Припустімо, що серед присутніх є двоє незнайомих A і B, інакше все доведено. Оскільки кожен із A і B знайомий не менше ніж зі 100 присутніми, то вони матимуть принаймні двох спільних знайомих (200>198). Тоді ці двоє спільних знайомих разом з A і B утворюватимуть шукану четвірку осіб.

13. У конгресі брали участь 2000 вчених, одні з них були раніше знайомі один з одним, інші – ні. При цьому виявилося: кожні двоє вчених, які мають однакову кількість знайомих, не мають спільних знайомих. Доведіть, що серед присутніх на конгресі вчених знайдеться вчений, знайомий лише з одним учасником конгресу.

Доведення. Нехай A — це вчений, який має найбільшу кількість знайомих серед присутніх (або одного з них, якщо їх кілька). Усіх знайомих A позначимо $A_1, A_2, ..., A_k$. Згідно з умовою задачі, усі A_i (i=1,...,k) мають різну кількість знайомих, що змінюється від 1 до k. Тоді знайдеться такий учений, котрий має рівно одного знайомого.

14. Уздовж круглого столу рівномірно розміщено таблички з прізвищами дипломатів, які беруть участь у перемовинах. Після початку перемовин виявилося, що жоден із дипломатів не сидить напроти свої таблички. Чи можна повернути стіл так, щоб принаймні двоє дипломатів сиділи напроти своїх табличок?
Розв'язання. Зауважмо, що серед усіх можливих n положень столу завжди можна вибрати одне, коли якийсь дипломат сидить напроти своєї таблички. Тоді за умови, що при такому положенні столу такого дипломата немає, згідно з принципом Діріхле, можна повернути стіл так, щоб принаймні двоє дипломатів сиділи напроти своїх табличок.

Часто при розв'язуванні задач, де застосовують принцип Діріхле, потрібно не лише показати, що чисел, які задовольняють певну властивість, є не більше від деякого k, але й конструктивно вказати множину з k елементів, що таку властивість має.

15. Картки пронумеровані послідовно цілими числами від 1 до $2n+1$. Яку найбільшу кількість карток можна вибрати так, щоб жоден із номерів не дорівнював сумі якихось двох інших номерів карток?
Розв'язання. Припустімо, що таких карток існує не менше ніж $n+2$. Розташувавши вибрані картки в порядку зростання їх номерів, віднімемо від усіх номерів найменший номер картки. Отримаємо $n+1$ різних чисел, відмінних від 0. Тоді, згідно з принципом Діріхле, отримана множина має принаймні один спільний із початковою номер (без картки з найменшим номером), тобто умови задачі не виконуються.
Легко перевірити, що для $n+1$ картки з непарними номерами $\{1,3,5,..., 2n+1\}$ умови задачі вже виконуються.

3. ГЕОМЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ НА ПРИНЦИП ДІРІХЛЕ

Запитання від математичного «духа» нашого математичного гуртка: *У колесі десять спиць, а скільки між ними проміжків?*
Відповідь: десять.

Мотивація вивчення нових знань.
«Математик не бере до уваги ані свідчень, ані здогадів, бо він робить висновок відповідними міркуваннями зі своїх означень та аксіом. І справді, те, що

ґрунтується на здогадах, безпідставно називають наукою; здогади можуть породити думку про щось, але не знання.»

Т. Рід

Осмислення нових знань.

Принцип Діріхле в геометрії. Принцип Діріхле для площ можна сформулювати у вигляді такої теореми:

Нехай $A_1, A_2, ..., A_n$ – многокутники або інші фігури, для яких визначене поняття площі (див.: кн. «Кенгуру-99», «Площі елементарних фігур»), причому $A_i \subset A$ (фігура A_i міститься в A) для i=1,...,n.

Відомо, що $S(A)<S(A_1)+S(A_2)+S(A_3)+\ldots+S(A_n)$ (тут $S(A_s)$ –площа фігури A_s). Тоді принаймні дві з фігур $A_1, \ldots, A_k$ мають спільні внутрішні точки. Нагадаємо, що точка X фігури A тоді називається внутрішньою, якщо існує такий кружечок із центром у точці X, який цілком належить фігурі A.

Принцип Діріхле для площ допускає також таке узагальнення:

Нехай $A, A_1, A_2, ..., A_n$ – фігури, для яких визначене поняття площі, причому $A_i \subset A$ для всіх i=1,...,n.

Якщо $kS(A)<S(A_1)+S(A_2)+S(A_3)+\ldots+S(A_n)$, то принаймні k+1 фігура з фігур $A_1, A_2, ..., A_n$ має спільну внутрішню точку.

Ми сподіваємося, що вчитель зможе легко переформулювати принцип Діріхле для площ для довжин та об’ємів.

Розпочнемо розгляд із кількох елементарних задач, у яких застосовується принцип Діріхле.

16. Доведіть, що рівносторонній трикутник не можна покрити двома меншими за нього рівносторонніми трикутниками.

Доведення. Зрозуміло, що менший рівносторонній трикутник може покривати щонайбільше одну вершину даного рівностороннього трикутника. А тому даний рівносторонній трикутник можна покрити принаймні трьома меншими.

17. На газоні у формі правильного трикутника зі стороною 3 м ростуть 10 гвоздик. Доведіть, що знайдуться дві гвоздики, які знаходяться одна від одної на відстані, що не перевищує 1 м.

Доведення. Розділимо газон на 9 рівносторонніх трикутників зі стороною 1 м. Тоді, згідно з принципом Діріхле, принаймні дві точки містяться в одному з них. А тому відстань між цими точками не перевищує 1 м. Зауважмо, що після розміщення 10 гвоздик у вершинах розбиття усі відстані між ними дорівнюватимуть 1 м.

18. Доведіть, що в кожного многогранника знайдуться дві грані з однаковою кількістю сторін.

Доведення. Нехай $Г$ — грань, що містить найбільшу кількість сторін. Тоді даний многогранник має принаймні n+1 грань, причому кількість сторін на кожній із них змінюється від 3 до n. Тоді, згідно із принципом Діріхле, знайдуться дві грані з однаковою кількістю сторін.

19. П'ять точок A_1, A_2, ..., A_5 лежать в одній площині, і їхні координати – цілі числа. Доведіть, що серед усіх трикутників із вершинами в даних точках є принаймні три, площі яких виражаються цілими числами.
Доведення. Нехай $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ – вершини деякого трикутника з цілими координатами. Зауважмо, що якщо одну із координат змінити на парне число, то площа відповідного трикутника зміниться на ціле число. Таким чином, замінивши координати точок A_1, A_2, ..., A_5 числами 0 чи 1 залежно від їх парності, згідно з принципом Діріхле, деяким двом точкам відповідатимуть однакові координати. Нехай це будуть точки A_1 і A_2. Тоді площі трикутників $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_2A_5$ виражаються цілими числами.

20. У колі радіуса 1 проведено кілька хорд, сумарна довжина яких більша за 7. Доведіть, що знайдеться діаметр, який перетинає не менше ніж 8 хорд.
Доведення. Оскільки довжина хорди менша за довжину відповідної дуги, то сума цих дуг також більша за 7. Розглянемо довільний діаметр кола і відобразимо симетрично відносно центра O одне з півкіл. Отже, друге півколо буде покрите дугами, які матимуть сумарну довжину, більшу за 7. Тоді, згідно з принципом Діріхле, одна з точок півкола покривається принаймні 8 разів. А тому відображений діаметр, що проходить через цю точку, перетинає 8 хорд.

21. На площині дано 25 точок, причому серед довільних 3 із них знайдуться 2 точки, відстань між якими менша від 1. Доведіть, що існує круг, радіусом 1, що містить не менше ніж 13 із цих точок.
Доведення. Припустімо, що деякі дві з цих точок розміщені на відстані, не меншій від 1. Провівши навколо цих точок як центрів два кола, радіусом 1, згідно з принципом Діріхле, отримаємо всередині одного з них принаймні 12 точок.

4. ДОДАТКОВІ ЗАДАЧІ НА ПРИНЦИП ДІРІХЛЕ

1. У мішку лежать 5 чорних і 5 білих кульок. Яку найменшу кількість кульок потрібно взяти з мішка, щоб серед них точно виявилося 3 кульки одного кольору?
2. Учені дослідили, що кількість голок у їжака не перевищує 200 тисяч. Доведіть, що із 250 тисяч їжаків можна вибрати принаймні двох, що мають однакову кількість голок.
3. У Верховну Раду обрано 336 народних депутатів, причому серед них 123 жінки, і 245 особи – представники правих сил. Доведіть, що серед правих є не менше ніж 32 жінки.
4. У школі 30 класів і 1000 учнів. Доведіть, що у школі є клас, у якому не менше ніж 34 учнів.

5. На Землі більше ніж 4 мільярди людей, вік яких не перевищує 100 років. Доведіть, що на Землі є двоє людей, що народилися тієї самої секунди.
6. Яку найменшу кількість карток спортлото «6 із 49» потрібно купити, щоб на одній із них обов'язково було вгадано хоча б один номер?
7. У магазин завезли 25 ящиків із трьома різними сортами яблук (у кож-ному ящику яблука лише одного сорту). Доведіть, що серед них є принаймні 9 ящиків одного сорту яблук.
8. У школі навчається 962 учні. Доведіть, що принаймні у двох учнів збігаються ініціали.
9. У темній коморі лежать черевики одного розміру: 10 пар чорних і 10 пар коричневих. Яку найменшу кількість черевиків потрібно взяти з комори, щоб серед них точно можна було вибрати одну пару одного кольору (у темряві не можна відрізнити не тільки колір черевика, але й лівий від правого)?
10. Із повного набору доміно викинули всі кісточки з шістками. Чи можна викласти в ланцюг усі кісточки, що залишилися?
11. У похід пішли 12 туристів. Наймолодшому з них – 20 років, а найстаршому – 30. Чи є серед них однолітки?
12. У школі навчаються 400 учнів. Доведіть, що принаймні двоє з них народилися в один день.
13. Хлопчик мав 100 табличок із числами 1, 2, ..., 100, але загубив 79 із них. Чи обов'язково серед решти табличок знайдуться чотири такі, що сума чисел на двох із них дорівнюватиме сумі чисел на двох інших?
14. Доведіть, що серед будь-яких шести цілих чисел знайдуться два числа, різниця яких буде кратною 5.
15. У сьомому класі навчаються 30 учнів. У диктанті один учень припустився 12 помилок, а решта – менше. Довести, що принаймні троє учнів припустилися однакової кількості помилок.
16. Дано 12 довільних двоцифрових чисел. Доведіть, що серед них є два, різниця яких дорівнює двоцифровому числу, записаному однаковими цифрами.
17. У квадраті зі стороною 1 взяли 51 точку. Довести, що деякі три з цих точок можна накрити квадратом зі стороною 0,2.
18. Доведіть, що в будь-якій компанії з 5 чоловік знайдуться двоє, котрі мають однакову кількість знайомих у цій компанії.
19. У середину квадрата зі стороною 10 см «кинули» 101 точку (жодні три з них не лежать на одній прямій). Доведіть, що серед них є три, які утворюють трикутник, площа якого не перевищує 1 см ^{2}.
20. Доведіть, що в кожному дев'ятикутнику існує пара діагоналей, кут між якими менший за 7°.
21. Шість школярів з'їли 7 цукерок. Доведіть, що хоча б один із них з'їв 2 цукерки.
22. Усі точки площини пофарбовані у два кольори. Довести, що на площині є дві точки однакового кольору, відстань між якими дорівнює 1 см.

23. На площині дано 7 прямих. Доведіть, що якісь дві з них утворюють кут, менший за 27°.

24. У квадраті зі стороною 12 позначені довільним чином 13 точок. Довести,що серед них обов'язково є дві точки, відстань між якими не більша 5.

25. 34 пасажири їдуть автобусом. Автобус робить 9 зупинок, причому на кожній із них нові пасажири не заходять. Доведіть, що знайдуться дві зупинки, на яких вийшла однакова кількість пасажирів.

26. Дано два многочлени від однієї змінної, кожний із них є сумою 4 членів непарних степенів, менших за 25. Чи обов'язково в добутку будуть два подібні члени?

27. Чи можна пронумерувати вершини куба натуральними числами від 1 до 8 так, щоб суми номерів на кінцях кожного ребра були різними?

28. 45 школярів на олімпіаді розв'язали 175 задач, причому відомо, що серед них є школярі, котрі розв'язали лише одну, дві і три задачі. Доведіть, що серед них є школяр, котрий розв'язав не менше ніж 5 задач.

29. У класі 30 учнів. Кожному подобаються рівно k учнів цього класу. При якому найменшому k обов'язково знайдуться двоє учнів, котрі подобаються один одному?

30. До ліфта вантажопідйомністю 320 кг підійшли 12 осіб, загальною масою 960 кг. Доведіть, що з них можна підібрати 4 людей, котрі разом зможуть піднятися ліфтом.

31. Чи можна вивезти з каменеломні 50 кам'яних брил, маси яких відповідно дорівнюють 372, 374, 376, ..., 468 кг, на 7 тритонних машинах?

32. На площині дано скінчену кількість точок. Доведіть: якщо деякі з них з'єднати відрізками, то завжди знайдуться дві точки, із яких виходить однакова кількість відрізків.

33. Дано n+1 різних натуральних чисел, менших за $2n$. Доведіть, що серед них можна вибрати три таких числа, що одне з них дорівнює сумі двох інших.

34. Деякі з 9 мушкетерів викликали один одного на дуель. Доведіть, що серед них є 3, котрі викликали на дуель один одного, або 4, між котрими дуель не відбулася.

35. У класі 25 учнів. Відомо, що серед довільних трьох учнів є двоє друзів. Доведіть, що є учень, у якого не менше ніж 12 друзів.

36. Доведіть, що серед 25 чотирицифрових чисел, записаних за допомогою цифр 1; 2; 3; 4, обов'язково знайдуться два однакових.

37. Доведіть, що з довільних 100 натуральних чисел, які не перевищують 100, а їх сума дорівнює 200, можна вибрати кілька чисел так, щоб їх сума дорівнювала 100.

38. Дано 2000 різних натуральних чисел, які не перевищують 4000. Доведіть, що серед їх попарних додатних різниць є принаймні 500 однакових.

39. У країні Дитляндії M футбольних команд по 11 гравців у кожній. Всі футболісти зібралися в аеропорті для поїздки в іншу країну на відповідальний турнір. Літак зробив 10 рейсів у іншу країну, перевозячи при цьому по M футболістів кожним рейсом. Ще один футболіст добрався сам. Доведіть, що хоча б одна команда зібралася в іншій країні в повному складі.

40. У класі навчаються 35 учнів. Доведіть, що серед них є принаймні двоє, у яких день народження одного числа (можливо, різних місяців).

41. На співбесіду прийшли 65 школярів. Їм запропонували 3 тестові завдання. За кожне завдання ставилася одна з оцінок: 2, 3, 4 або 5. Чи вірно, що знайдуться два школярі, котрі отримали однакові оцінки з усіх тестових завдань?

42. Кіт Базиліо пообіцяв Буратіно відкрити велику таємницю, якщо той складе чарівний квадрат 6×6 із чисел +1, -1, 0 таким чином, щоб усі суми по рядках, по стовпцях і по великих діагоналях були різними. Чи може Буратіно скласти такий квадрат?

43. На Землі океан займає більше половини площі поверхні. Довести, що у Світовому океані можна вказати дві діаметрально протилежні точки.

Джерела:

http://olimpmath.blogspot.com/2014/
http://olimpmath.blogspot.com/2015/
https://naurok.com.ua/
https://sites.google.com/site/pidgotovkaolimpiadi/
https://vseosvita.ua/library/