ІЛЮСТРАТИВНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ВАРІАНТУ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ЗАВДАННЯ №1 ДО РОЗДІЛУ: КАНОНІЧНІ ФОРМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ (ДРЧП) ДРУГОГО ПОРЯДКУ. ІНТЕГРОВНІ ТИПИ ДРЧП ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Завдання 1. Визначити тип та звести до канонічного вигляду ДРЧП другого порядку:

а) $u_{xx} + 2xu_{xy} + (x^2+1)u_{yy} = 4y\cos^2 u(x,y)$. (1.1)

Розв'язання. Рівняння (1.1) є квазілінійним ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними. Визначаємо тип:
$a_{11} = 1$, $a_{12} = x$, $a_{22} = x^2+1$, тоді $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = x^2 - 1\cdot(x^2+1) = -1 < 0$.
Отже, (1.1) є рівнянням еліптичного типу на всій дійсній площині. Знайдемо його комплексно спряжену сім'ю характеристик шляхом інтегрування характеристичного рівняння

$$dy^2 - 2xdxdy + (x^2+1)dx^2 = 0,$$

яке після ділення на dx^2 можна записати у вигляді квадратного рівняння відносно похідної dy/dx:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2x\frac{dy}{dx} + x^2 + 1 = 0.$$

Звідси

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4(x^2+1)}}{2} = x \pm i.$$

Після відокремлення змінних маємо

$$dy = (x \pm i)dx \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x^2}{2} \pm ix + C_{1,2} \quad \Rightarrow \quad C_{1,2} = y - \frac{x^2}{2} \pm ix.$$

Введемо підстановку незалежних змінних згідно з правилами зведення до канонічного вигляду ДРЧП еліптичного типу: покладемо $\xi = y - \dfrac{x^2}{2}$ (дійсна частина) і $\eta = x$ (уявна частина інтеграла характеристичного рівняння).

Обчислимо похідні, що входять у ДРЧП (1.1), вважаючи $u(x,y) = U[\xi(x,y), \eta(x,y)]$. Маємо:

$$u_x = -xU_\xi + U_\eta, \quad u_y = U_\xi, \quad u_{yy} = U_{\xi\xi},$$
$$u_{xx} = x^2U_{\xi\xi} - 2xU_{\xi\eta} + U_{\eta\eta} - U_\xi, \quad u_{xy} = -xU_{\xi\xi} + U_{\xi\eta}.$$

Підклавши отримані вирази для похідних у ДРЧП (1.1), маємо

$$x^2U_{\xi\xi} - 2xU_{\xi\eta} + U_{\eta\eta} - U_\xi + 2x(-xU_{\xi\xi} + U_{\xi\eta}) + (x^2+1)U_{\xi\xi} = 4y\cos^2 U,$$

звідки після зведення подібних доданків і вираження старих незалежних змінних через нові дістанемо канонічну форму ДРЧП (1.1) у вигляді

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = U_\xi + 4\left(\xi + \frac{\eta^2}{2}\right)\cos^2 U,$$

де $\xi = y - \dfrac{x^2}{2}$, $\eta = x$.

б) $9u_{xx} - 12u_{xy} + 4u_{yy} - 8u_x + 24u_y - u(x,y) = xy.$ (1.2)

Розв'язання. Рівняння (1.2) є лінійним неоднорідним ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними зі сталими коефіцієнтами. Визначаємо тип: $a_{11} = 9$, $a_{12} = -6$, $a_{22} = 4$, тоді $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = (-6)^2 - 9\cdot 4 = 0$.
Отже, (1.2) є рівнянням параболічного типу на всій дійсній площині. Знайдемо його єдину сім'ю характеристик шляхом інтегрування характеристичного рівняння

$$9dy^2 + 12dxdy + 4dx^2 = 0.$$

Останню рівність можна записати у вигляді повного квадрата

$$(3dy + 2dx)^2 = 0,$$

звідки

$$3dy = -2dx, \quad \Rightarrow \quad 3y = -2x + C \quad \Rightarrow \quad 2x + 3y = C.$$

Введемо підстановку незалежних змінних згідно з правилами зведення до канонічного вигляду ДРЧП параболічного типу: покладемо $\xi = 2x + 3y$, а за другу змінну візьмемо, наприклад, $\eta = x$. Очевидно, що якобіан такого перетворення

$$\Im = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,$$

тобто введена підстановка є незалежною.

Обчислимо похідні, що входять у ДРЧП (1.2), вважаючи $u(x,y) = U[\xi(x,y),\eta(x,y)]$. Маємо:

$$u_x = 2U_\xi + U_\eta, \quad u_y = 3U_\xi, \quad u_{yy} = 9U_{\xi\xi},$$
$$u_{xx} = 4U_{\xi\xi} + 4U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}, \quad u_{xy} = 6U_{\xi\xi} + 3U_{\xi\eta}.$$

Підклавши отримані вирази для похідних у ДРЧП (1.2), маємо

$$9(4U_{\xi\xi}+4U_{\xi\eta}+U_{\eta\eta})-12(6U_{\xi\xi}+3U_{\xi\eta})+4\cdot 9U_{\xi\xi}-$$
$$-8(2U_{\xi}+U_{\eta})+24\cdot 3U_{\xi}-U(\xi,\eta)=xy,$$

або після зведення подібних доданків і вираження старих незалежних змінних через нові

$$9U_{\eta\eta}+64U_{\xi}-8U_{\eta}-U=\frac{\eta(\xi-2\eta)}{3}. \qquad (1.3)$$

Для спрощення рівняння зі сталими коефіцієнтами (1.3) вводимо нову невідому функцію $V(\xi,\eta)$ згідно з формулою

$$U(\xi,\eta)=\mathrm{e}^{\lambda\xi+\mu\eta}\cdot V(\xi,\eta),$$

де λ і μ – довільні сталі. Тоді похідні, що входять у ДРЧП (1.3), визначаються формулами

$$U_{\xi}=\mathrm{e}^{\lambda\xi+\mu\eta}(V_{\xi}+\lambda V),\quad U_{\eta}=\mathrm{e}^{\lambda\xi+\mu\eta}(V_{\eta}+\mu V),\quad U_{\eta\eta}=\mathrm{e}^{\lambda\xi+\mu\eta}(V_{\eta\eta}+2\mu V_{\eta}+\mu^2 V).$$

Після підстановки отриманих виразів для похідних у рівняння (1.3) маємо

$$9\mathrm{e}^{\lambda\xi+\mu\eta}(V_{\eta\eta}+2\mu V_{\eta}+\mu^2 V)+64\mathrm{e}^{\lambda\xi+\mu\eta}(V_{\xi}+\lambda V)-$$
$$-8\mathrm{e}^{\lambda\xi+\mu\eta}(V_{\eta}+\mu V)-\mathrm{e}^{\lambda\xi+\mu\eta}\cdot V=\frac{\eta(\xi-2\eta)}{3},$$

звідки після зведення подібних доданків і ділення на $\mathrm{e}^{\lambda\xi+\mu\eta}\neq 0$ дістанемо

$$9V_{\eta\eta}+64V_{\xi}+(18\mu-8)V_{\eta}+(9\mu^2+64\lambda-8\mu-1)V=\mathrm{e}^{-\lambda\xi-\mu\eta}\cdot\frac{\eta(\xi-2\eta)}{3}. \qquad (1.4)$$

Згідно з правилами зведення до канонічного вигляду лінійних ДРЧП зі сталими коефіцієнтами вибираємо сталі λ і μ таким чином, щоб

$$18\mu-8=0,\quad 9\mu^2+64\lambda-16\mu-1=0,$$

звідки знаходимо значення $\mu=\dfrac{4}{9}$, $\lambda=\dfrac{25}{576}$.

Після підкладання отриманих значень у рівність (1.4) і ділення на коефіцієнт при старшій похідній дістанемо канонічну форму ДРЧП (1.2) у вигляді

$$V_{\eta\eta}+\frac{64}{9}V_{\xi}=\mathrm{e}^{-\frac{25}{576}\xi-\frac{4}{9}\eta}\cdot\frac{\eta(\xi-2\eta)}{27},$$

де $\xi=2x+3y$, $\eta=x$, $U=\mathrm{e}^{\frac{25}{576}\xi+\frac{4}{9}\eta}\cdot V$.

Завдання 2. Зінтегрувати ДРЧП

$$u_{xy}-2u_x-3u_y+6u(x,y)=2\mathrm{e}^{x+y}. \qquad (2.1)$$

Розв'язання. ДРЧП (2.1) є рівнянням гіперболічного типу зі сталими коефіцієнтами у першому канонічному вигляді, тому зводити його до канонічної форми немає потреби. Проілюструємо два способи інтегрування цього рівняння.

Перший спосіб. Подамо (2.1) в інтегровному вигляді шляхом групування доданків у лівій частині рівності:

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_y - 2u) - 3(u_y - 2u) = 2\,\mathrm{e}^{x+y}.$$

Введемо підстановку $z = u_y - 2u$, тоді відносно нової невідомої функції $z(x, y)$ одержимо ДРЧП першого порядку

$$z_x - 3z = 2\,\mathrm{e}^{x+y}.$$

Для інтегрування останнього рівняння застосуємо формулу загального розв'язку лінійного рівняння першого порядку:

$$y' + p(x)y = q(x) \quad \Rightarrow \quad y = \mathrm{e}^{-\int p(x)dx} \cdot \left[C + \int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)dx}\, dx \right]. \qquad (2.2)$$

Тоді згідно з цією формулою

$$z = \mathrm{e}^{3\int dx} \cdot \left[C(y) + 2\int \mathrm{e}^{x+y} \cdot \mathrm{e}^{-3\int dx}\, dx \right] = C(y)\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{x+y}.$$

Підставивши в останню рівність $z = u_y - 2u$, отримаємо лінійне ДРЧП першого порядку відносно шуканої функції $u(x, y)$

$$u_y - 2u = C(y)\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{x+y},$$

звідки із застосуванням тієї ж формули (2.2) маємо

$$u = \mathrm{e}^{2\int dy} \cdot \left[C_1(x) + \int \left\{ C(y)\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{x+y} \right\} \cdot \mathrm{e}^{-2\int dy}\, dy \right] =$$

$$= \mathrm{e}^{2y} \cdot \left[C_1(x) + \int \left\{ C(y)\mathrm{e}^{3x-2y} - \mathrm{e}^{x-y} \right\} dy \right] = \mathrm{e}^{2y} \cdot \left[C_1(x) + \int C(y)\mathrm{e}^{3x-2y}\, dy + \mathrm{e}^{x-y} \right] =$$

$$= C_1(x)\mathrm{e}^{2y} + \mathrm{e}^{3x+2y} \cdot \int C(y)\mathrm{e}^{-2y}\, dy + \mathrm{e}^{x+y}.$$

Ввівши позначення $C_1(x) = \mathrm{e}^{3x} \cdot f_1(x)$, $\int C(y)\mathrm{e}^{-2y}\, dy = f_2(y)$, одержимо шуканий загальний розв'язок ДРЧП (2.1) у вигляді

$$u = \mathrm{e}^{3x+2y} \cdot [f_1(x) + f_2(y)] + \mathrm{e}^{x+y}.$$

Другий спосіб. Оскільки ДРЧП (2.1) є лінійним зі сталими коефіцієнтами, то його можна (аналогічно до Завдання 1б) далі спростити шляхом введення нової невідомої функції $v(x, y)$ згідно з формулою

$$u(x, y) = \mathrm{e}^{\lambda x + \mu y} \cdot v(x, y),$$

де λ і μ – довільні сталі. Тоді похідні, що входять у ДРЧП (2.1), визначаються формулами

$$u_x = \mathrm{e}^{\lambda x + \mu y}(v_x + \lambda v), \quad u_y = \mathrm{e}^{\lambda x + \mu y}(v_y + \mu v), \quad u_{xy} = \mathrm{e}^{\lambda x + \mu y}(v_{xy} + \lambda v_y + \mu v_x + \lambda\mu v).$$

Після підстановки отриманих виразів для похідних у рівняння (2.1) маємо

$$\mathrm{e}^{\lambda x + \mu y}(v_{xy} + \lambda v_y + \mu v_x + \lambda\mu v) - 2\,\mathrm{e}^{\lambda x + \mu y}(v_x + \lambda v) -$$

$$- 3\,\mathrm{e}^{\lambda x + \mu y}(v_y + \mu v) + 6\,\mathrm{e}^{\lambda x + \mu y}\, v = 2\,\mathrm{e}^{x+y},$$

звідки після зведення подібних доданків і ділення на $\mathrm{e}^{\lambda x + \mu y} \neq 0$ дістанемо

$$v_{xy} + (\lambda - 3)v_y + (\mu - 2)v_x + (\lambda\mu - 2\lambda - 3\mu + 6)v = 2\,\mathrm{e}^{(1-\lambda)x + (1-\mu)y}. \qquad (2.3)$$

Згідно з правилами зведення до канонічного вигляду лінійних ДРЧП зі сталими коефіцієнтами вибираємо сталі λ і μ таким чином, щоб

$$\lambda - 3 = 0,\ \ \mu - 2 = 0,$$

звідки знаходимо $\lambda = 3$, $\mu = 2$.

Після підкладання отриманих значень у рівність (2.3) дістанемо спрощену форму ДРЧП (2.1) у вигляді

$$v_{xy} = 2\mathrm{e}^{-2x-y}.$$

Звідси двократним інтегруванням знаходимо $v(x,y)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}(v_y) = 2\mathrm{e}^{-2x-y} \quad \Rightarrow \quad v_y = 2\int \mathrm{e}^{-2x-y}\,dx + C(y) = C(y) - \mathrm{e}^{-2x-y};$$

$$v = \int [C(y) - \mathrm{e}^{-2x-y}]dy + f_1(x) = f_1(x) + f_2(y) + \mathrm{e}^{-2x-y},$$

де $f_2(y) = \int C(y)dy$. Тоді загальний розв'язок ДРЧП (2.1) рівний

$$u(x,y) = \mathrm{e}^{\lambda x + \mu y} \cdot v(x,y) = \mathrm{e}^{3x+2y} \cdot [f_1(x) + f_2(y) + \mathrm{e}^{-2x-y}],$$

або після спрощення

$$u = \mathrm{e}^{3x+2y} \cdot [f_1(x) + f_2(y)] + \mathrm{e}^{x+y}.$$

Завдання 3. Знайти розв'язок задачі Коші

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} - 2yu_y = 0, \quad xy > 0, \tag{3.1}$$

$$u(x,1) = 4\sqrt{x^3}, \quad u_y(x,1) = 0. \tag{3.2}$$

Розв'язання. Рівняння (3.1) є лінійним ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними. У заданій області $xy > 0$

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0^2 - x^2 \cdot (-y^2) = (xy)^2 > 0,$$

а отже, (3.1) є рівнянням гіперболічного типу, очевидно не заданим у канонічному вигляді, а тому для знаходження загального розв'язку його спершу необхідно звести до канонічної форми.

Знайдемо дві дійсні сім'ї характеристик ДРЧП (3.1) шляхом інтегрування характеристичного рівняння

$$x^2 dy^2 - y^2 dx^2 = 0,$$

яке після розкладу на множники можна записати у вигляді

$$(xdy - ydx)(xdy + ydx) = 0.$$

Звідси шляхом відокремлення змінних отримуємо дві сім'ї характеристик

$$xdy - ydx = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{y}{x};$$

$$xdy + ydx = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad C_2 = xy.$$

Введемо підстановку незалежних змінних згідно з правилами зведення до канонічного вигляду ДРЧП гіперболічного типу: покладемо $\xi = \frac{y}{x}$, $\eta = xy$.

Обчислимо похідні, що входять у ДРЧП (3.1), вважаючи $u(x,y) = U[\xi(x,y), \eta(x,y)]$. Маємо:

$$u_x = -\frac{y}{x^2}U_\xi + yU_\eta, \quad u_y = \frac{1}{x}U_\xi + xU_\eta, \quad u_{yy} = \frac{1}{x^2}U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + x^2 U_{\eta\eta},$$

$$u_{xx} = \frac{y^2}{x^4}U_{\xi\xi} - \frac{2y^2}{x^2}U_{\xi\eta} + y^2 U_{\eta\eta} + \frac{2y}{x^3}U_\xi.$$

Підклавши отримані вирази для похідних у ДРЧП (3.1), маємо

$$x^2\left(\frac{y^2}{x^4}U_{\xi\xi} - \frac{2y^2}{x^2}U_{\xi\eta} + y^2 U_{\eta\eta} + \frac{2y}{x^3}U_\xi\right) - y^2\left(\frac{1}{x^2}U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + x^2 U_{\eta\eta}\right) -$$

$$-2y\left(\frac{1}{x}U_\xi + xU_\eta\right) = 0,$$

звідки після зведення подібних доданків дістанемо

$$-4y^2 U_{\xi\eta} - 2xyU_\eta = 0 \quad \Rightarrow \quad U_{\xi\eta} + \frac{x}{2y}U_\eta = 0.$$

Врахувавши, що за вираження через нові змінні $\frac{x}{y} = \frac{1}{\xi}$, отримаємо першу канонічну форму ДРЧП гіперболічного типу (3.1) у вигляді

$$U_{\xi\eta} + \frac{U_\eta}{2\xi} = 0, \tag{3.3}$$

де $\xi = \frac{y}{x}$, $\eta = xy$.

Знайдемо загальний розв'язок ДРЧП (3.3). Для цього подамо його в інтегровному вигляді

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(U_\xi + \frac{1}{2\xi}U\right) = 0,$$

звідки після інтегрування за змінною η маємо

$$U_\xi + \frac{1}{2\xi}U = f(\xi),$$

де $f(\xi)$ – довільна неперервна функція однієї змінної ξ. Для знаходження $U(\xi,\eta)$ знову застосуємо формулу (2.2):

$$U(\xi,\eta) = \mathrm{e}^{-0,5\int \xi^{-1}d\xi}\left[f_1(\eta) + \int \mathrm{e}^{0,5\int \xi^{-1}d\xi}\cdot f(\xi)d\xi\right] = \xi^{-1/2}\left[f_1(\eta) + f_2(\xi)\right].$$

Повертаючись в останній рівності до старих незалежних змінних, одержуємо загальний розв'язок рівняння (3.1)

$$u(x,y)=\sqrt{\frac{x}{y}}\left[f_1(xy)+f_2\left(\frac{y}{x}\right)\right]. \qquad (3.4)$$

Знайдемо розв'язок задачі Коші (3.1), (3.2). Для цього функції f_1 та f_2 слід вибрати таким чином, щоб вираз (3.4) справджував умови (3.2). Маємо:

$$u_y(x,y)=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y^3}}\left[f_1(xy)+f_2\left(\frac{y}{x}\right)\right]+\sqrt{\frac{x}{y}}\left[x\frac{df_1(xy)}{d(xy)}+\frac{1}{x}\frac{df_2(yx^{-1})}{d(yx^{-1})}\right].$$

Тоді на підставі початкових умов (3.2) дістанемо систему двох рівнянь для визначення f_1 та f_2:

$$\begin{cases} u(x,1)\equiv\sqrt{x}\left[f_1(x)+f_2(x^{-1})\right]=4x^{3/2}, \\ u_y(x,1)\equiv-0{,}5\sqrt{x}\left[f_1(x)+f_2(x^{-1})\right]+\sqrt{x}\left[x\dfrac{df_1(x)}{dx}+\dfrac{1}{x}\dfrac{df_2(x^{-1})}{d(x^{-1})}\right]=0, \end{cases}$$

яку після спрощення можна переписати у вигляді

$$\begin{cases} f_1(x)+f_2(x^{-1})=4x, \\ x\dfrac{df_1(x)}{dx}+\dfrac{1}{x}\dfrac{df_2(x^{-1})}{d(x^{-1})}=2x. \end{cases} \qquad (3.5)$$

Продиференціюємо перше з рівнянь системи (3.5) за змінною x і приєднаємо отриману рівність до другого рівняння системи (3.5), поділеного на x:

$$\begin{cases} \dfrac{df_1(x)}{dx}-\dfrac{1}{x^2}\dfrac{df_2(x^{-1})}{d(x^{-1})}=4, \\ \dfrac{df_1(x)}{dx}+\dfrac{1}{x^2}\dfrac{df_2(x^{-1})}{d(x^{-1})}=2. \end{cases}$$

Додавши два рівняння останньої системи, одержимо

$$2\frac{df_1(x)}{dx}=6 \quad \Rightarrow \quad f_1(x)=3x+C,$$

де C – довільна стала. Тоді з першого рівняння системи (3.5)

$$f_2(x^{-1})=4x-f_1(x)=4x-(3x+C)=x-C.$$

Покладемо в останній рівності $x^{-1}=\zeta,$ тоді

$$f_2(\zeta)=\zeta^{-1}-C.$$

Підклавши знайдені функції в (3.4), одержимо шуканий розв'язок задачі Коші (3.1),(3.2):

$$u(x,y)=\sqrt{\frac{x}{y}}\left[3xy+C+\frac{x}{y}-C\right]=\sqrt{x^3}\left(3\sqrt{y}+\sqrt{y^{-3}}\right)$$

Джерело:

Перестюк М.О., Маринець В.В., Рего В.Л. Збірник задач з математичної фізики. – Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2012. – С. 6-18, 30-41.