

## МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ КОШІ ТА МІШАНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ХВИЛЬОВИХ РІВНЯНЬ

### Варіант 1

1. По однорідній необмеженій струні поширюються хвилі відхилення, викликані локальним початковим відхиленням, яке має форму параболи

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & |x| > c, \\ h(1 - c^{-2}x^2), & |x| < c, \end{cases}$$

де  $c, h = \text{const} > 0$ .

Записати формули, які визначають а) профіль струни в момент часу  $t_0 = \frac{c}{3a}$ , де

$a$  – стала, що фігурує в рівнянні коливаний струни, і б) закон руху точки струни з абсцисою  $x_0 = -2c$ .

2. Зобразити графічно профіль однорідної ( $a = 1$ ) напівобмеженої струни з вільним кінцем в моменти часу  $t = 1, 2, 3, 4, 5$ , якщо струна коливається тільки за рахунок початкової швидкості її точок

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [2; 4], \\ 0, & x \in [0; 2) \cup (4; +\infty). \end{cases}$$

3. Дати фізичну інтерпретацію поставленої мішаної задачі та знайти її розв'язок:

$$U_{tt} = U_{xx} + 2tx(x-l)^2, \quad t > 0, \quad x \in (0; l),$$

$$U(0, x) = 0, \quad U_t(0, x) = 0, \quad x \in [0; l],$$

$$U(t, 0) = 0, \quad U_x(t, l) = 0, \quad t \geq 0.$$

### Варіант 2

1. По однорідній необмеженій струні поширюються хвилі імпульсу, викликані наданою струні початковою швидкістю

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 1, \\ 2, & -1 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Записати формули, які визначають а) профіль струни в момент часу  $t_0 = \frac{3}{a}$ , де  $a$

– стала, що фігурує в рівнянні коливаний струни, і б) закон руху точки струни з абсцисою  $x_0 = -\frac{1}{2}$ .

2. Напівобмежена однорідна ( $a = 1$ ) струна коливається тільки внаслідок дії на кінець  $x = 0$  сили, рівної  $\sin^2 \pi t$ . Визначити положення точок струни в довільний момент часу  $t$ .

3. Знайти закон вільних коливань однорідної струни довжини  $l$ , правий кінець  $x = l$  якої вільний, а лівий  $x = 0$  закріплений, якщо в початковий момент часу струні було надано форму кривої  $\varphi(x) = 0,01l \sin \frac{\pi}{2l} x$ , після чого струна була відпущена без початкової швидкості.

### Варіант 3

1. По однорідній ( $a = 1$ ) необмеженій струні поширюються хвилі імпульсу, викликані наданою струні початковою швидкістю, яка має сталі значення  $\psi_0$  на проміжку струни  $x \in [3;6]$ , і рівна нулеві зовні цього проміжку.

Записати формули, які визначають а) профіль струни в момент часу  $t_0 = 2$ , і б) закон руху точки струни з абсцисою  $x_0 = 0$ .

2. Зобразити графічно профіль однорідної ( $a = 1$ ) напівобмеженої струни з нерухомо закріпленим кінцем у моменти часу  $t = 1, 2, 3, 4, 5$ , якщо струна коливається тільки за рахунок початкового відхилення її точок, яке рівне

$$U(0, x) = \begin{cases} 0, & x \in [0;2) \cup (4; +\infty), \\ 2 - 2(x - 3)^2, & x \in [2;4]. \end{cases}$$

2. Знайти закон коливань однорідної струни довжини  $l$ , правий кінець  $x = l$  якої вільний, а лівий  $x = 0$  закріплений, якщо коливання відбуваються тільки внаслідок дії неперервно розподіленої вздовж струни зовнішньої сили інтенсивності  $f(t, x) = t \sin \frac{7\pi}{2l} x$ .

### Варіант 4

1. По однорідній необмеженій струні поширюються хвилі відхилення, викликані локальним початковим відхиленням

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & |x| > \frac{\pi}{2}, \\ 2 \cos x, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Записати формули, які визначають а) профіль струни в момент часу  $t_0 = \frac{\pi}{4a}$ , де  $a$  – стала, що фігурує в рівнянні коливань струни, і б) закон руху точки струни з абсцисою  $x_0 = 2\pi$ .

2. Дослідити процес вільних коливань однорідної напівобмеженої струни з пружно закріпленим кінцем, якщо точка закріплення пружини зміщується згідно з законом  $\gamma(t) = 3t^2$ , а початкові відхилення та швидкість точок струни відсутні.
3. Дати фізичну інтерпретацію поставленої мішаної задачі та знайти її розв'язок:

$$\begin{aligned} U_{tt} &= U_{xx} + (x^2 - l^2)t^2, & t > 0, & x \in (0; l), \\ U(0, x) &= 0, & U_t(0, x) &= 0, & x \in [0; l], \\ U_x(t, 0) &= 0, & U(t, l) &= 0, & t \geq 0. \end{aligned}$$

**Варіант 5**

1. По однорідній ( $a = 1$ ) необмеженій струні поширюються хвилі відхилення, викликані локальним початковим відхиленням, яке відмінне від нуля тільки на проміжку  $x \in [0; \pi]$ , де воно рівне  $2 \sin x$ .

Записати формули, які визначають а) профіль струни в момент часу  $t_0 = \frac{3\pi}{2}$ , і б)

закон руху точки струни з абсцисою  $x_0 = \frac{\pi}{4}$ .

2. Поширюючи збурення кінця за допомогою прямої хвилі, розв'язати мішану задачу:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0,$$

$$U(0, x) = 0, \quad U_t(0, x) = 0, \quad x \geq 0,$$

$$U_x(t, 0) = \sin t - t, \quad t \geq 0.$$

3. Дати фізичну інтерпретацію поставленої мішаної задачі та знайти її розв'язок:

$$U_{tt} = U_{xx} + lx(x-l), \quad t > 0, \quad x \in (0; l),$$

$$U(0, x) = 0, \quad U_t(0, x) = 0, \quad x \in [0; l],$$

$$U(t, 0) = 0, \quad U_x(t, l) = 0, \quad t \geq 0.$$

**Варіант 6**

1. По однорідній необмеженій струні поширюються хвилі імпульсу, викликані наданою струні початковою швидкістю, яка рівна

$$\psi(x) = \begin{cases} 0,01a, & 0 \leq x \leq l, \\ 0, & x \notin [0; l], \end{cases}$$

де  $a$  – стала, що фігурує в рівнянні коливань струни,  $l = \text{const} > 0$ .

Записати формули, які визначають а) профіль струни в момент часу  $t_0 = \frac{l}{6a}$ , і б)

закон руху точки струни з абсцисою  $x_0 = -l$ .

2. Дати фізичну інтерпретацію поставленої мішаної задачі:

$$U_{tt} = U_{xx}(t, x), \quad t > 0, \quad x > 0,$$

$$U(0, x) = \begin{cases} -2 \cos \frac{\pi}{2}(x-2), & x \in [1; 3], \\ 0, & x \in [0; 1] \cup (3; +\infty), \end{cases} \quad U_t(0, x) = 0, \quad x \geq 0,$$

$$U(t, 0) = 0, \quad t \geq 0,$$

і зобразити графічно її розв'язок у моменти часу  $t = 1, 2, 3, 4, 5$ .

3. Знайти закон вимушених коливань однорідної струни, закріпленої на кінцях  $x = 0$  і  $x = l$ , без початкових зміщень і швидкостей, якщо на струну діє рівномірно розподілена сила сталої інтенсивності  $P = \text{const}$ .

### Варіант 7

1. По однорідній ( $a = 2$ ) необмеженій струні поширюються хвилі імпульсу, викликані наданою струні початковою швидкістю, яка відмінна від нуля тільки на проміжку  $x \in [-2; 2]$ , де вона рівна 3.

Записати формули, які визначають а) профіль струни в момент часу  $t_0 = 4$ , і б) закон руху точки струни з абсцисою  $x_0 = 1$ .

2. Дати фізичну інтерпретацію поставленої мішаної задачі:

$$U_{tt} = U_{xx}(t, x), \quad t > 0, \quad x > 0,$$

$$U(0, x) = \begin{cases} 2 \sin \frac{\pi}{2}(x-1), & x \in [1; 3], \\ 0, & x \in [0; 1] \cup (3; +\infty), \end{cases} \quad U_t(0, x) = 0, \quad x \geq 0,$$

$$U_x(t, 0) = 0, \quad t \geq 0,$$

і зобразити графічно її розв'язок у моменти часу  $t = 1, 2, 3, 4, 5$ .

3. Знайти закон вільних коливань однорідної струни, закріпленої на кінцях  $x = 0$ ,  $x = 2$ , якщо початкова форма струни задається функцією  $\varphi(x) = A \sin \frac{\pi m}{2} x$ , де  $A = \text{const}$ ,  $m \in \mathbf{N}$ , а початкова швидкість її точок рівна нулеві.

### Варіант 8

1. По однорідній ( $a = 0,5$ ) необмеженій струні поширюються хвилі відхилення, викликані локальним початковим відхиленням, яке має форму параболи

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 2, \\ 4 - x^2, & -2 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Записати формули, які визначають а) профіль струни в момент часу  $t_0 = 3$ , і б) закон руху точки струни з абсцисою  $x_0 = -1,5$ .

2. Поширюючи збурення кінця за допомогою прямої хвилі, розв'язати мішану задачу:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}(t, x), \quad t > 0, \quad x > 0,$$

$$U(0, x) = 0, \quad U_t(0, x) = 0, \quad x \geq 0,$$

$$U(t, 0) = 0,5t^2, \quad t \geq 0.$$

3. Знайти закон вимушених коливань однорідної струни, закріпленої на кінці  $x = l$  і вільної на кінці  $x = 0$ , під дією рівномірно розподіленої уздовж струни зовнішньої сили сталої інтенсивності  $Q = \text{const}$ , якщо початкові відхилення та швидкість точок струни рівні нулеві.