

**КАНОНІЧНІ ФОРМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ
ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ (ДРЧП) ДРУГОГО ПОРЯДКУ.
ІНТЕГРОВНІ ТИПИ ДРЧП ДРУГОГО ПОРЯДКУ**

Варіант 1

1. Визначити тип та звести до канонічного вигляду ДРЧП другого порядку:

а) $\operatorname{tg}^2 u_{xx} + 2 \operatorname{tg} u_{xy} + u_{yy} + \sec^2 u_x(x, y) = 0$;

б) $4u_{xy} + u_{yy} + u_x - u_y + 3u(x, y) = 0$.

2. Зінтегрувати ДРЧП: $u_{xy} + 2u_{yy} + u_x + 2u_y(x, y) = 0$.

3. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$y^2 u_{yy} - x^2 u_{xx} = 0,$$

$$u(x, 1) = 8\sqrt{x}, \quad u_y(x, 1) = 0.$$

Варіант 2

1. Визначити тип та звести до канонічного вигляду ДРЧП другого порядку:

а) $u_{xx} + y^2 u_{yy} + 0,5u_y(x, y) = 8x, \quad y \neq 0$;

б) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} - 2u_x(x, y) = 0$.

2. Зінтегрувати ДРЧП: $2u_{xx} - 5u_{xy} + 3u_{yy}(x, y) = 0$.

3. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$4y^2 u_{xx} + 2(1 - y^2)u_{xy} - u_{yy} - 2y(1 + y^2)^{-1}(2u_x - u_y) = 0,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_y(x, 0) = \psi(x).$$

Варіант 3

1. Визначити тип та звести до канонічного вигляду ДРЧП другого порядку:

а) $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} + \sin^2 x u_{yy} - \operatorname{ctg} x u_x(x, y) = 0$;

б) $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} - 6u_y + u(x, y) = 0$.

2. Зінтегрувати ДРЧП: $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + 6u_y(x, y) = 0$.

3. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$x^2 u_{xx} - 4x u_{xy} + 3y^2 u_{yy} + 4x u_x = 0,$$

$$u(x, 1) = x^2, \quad u_y(x, 1) = 1.$$

Варіант 4

1. Визначити тип та звести до канонічного вигляду ДРЧП другого порядку:

а) $u_{xx} + 2 \cos x u_{xy} + \cos^2 x u_{yy} - \sin x u_y(x, y) = 3 \operatorname{tg} x$;

б) $u_{xy} + 2u_{yy} - u_x + u_y + 2u(x, y) = 0$.

2. Зінтегрувати ДРЧП: $2u_{xx} + 6u_{xy} + 4u_{yy} + u_x + u_y(x, y) = 0$.

3. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$u_{xx} - 2u_{xy} + 4e^y = 0,$$

$$u(0, y) = \varphi(y), \quad u_x(0, y) = \psi(y).$$

Варіант 5

1. Визначити тип та звести до канонічного вигляду ДРЧП другого порядку:

а) $u_{xx} + (1 + x^2)^2 u_{yy} - 2x(1 + x^2)^{-1} u_x(x, y) = 0$;

б) $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} - 4u_x + 5u_y(x, y) = 0$.

2. Зінтегрувати ДРЧП: $(x^2 + \cos y)u_{xy} + 2xu_y - \sin y u_x(x, y) = 0$.

3. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$u_{xx} + 4u_{xy} - 5u_{yy} + u_x - u_y = 0,$$

$$u(x, 0) = x, \quad u_y(x, 0) = 2.$$

Варіант 6

1. Визначити тип та звести до канонічного вигляду ДРЧП другого порядку:

а) $x^2 u_{xx} + 2x u_{xy} + u_{yy} + \ln|u_x(x, y)| = 0$;

б) $5u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} + 3u_x(x, y) = 0$.

2. Зінтегрувати ДРЧП: $3u_{xx} - 10u_{xy} + 3u_{yy} = 2u_x - 4u_y - \frac{5}{16}u(x, y)$.

3. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$u_{xx} + 2 \cos x u_{xy} - \sin^2 x u_{yy} - \sin x u_y = 0,$$

$$u(x, \sin x) = x + \cos x, \quad u_y(x, \sin x) = \sin x.$$

Варіант 7

1. Визначити тип та звести до канонічного вигляду ДРЧП другого порядку:

а) $u_{xx} + 2u_{xy} + (1 + y^2)u_{yy}(x, y) = 9x$;

б) $u_{yy} + u_{xy} + 3u_y - 4u_x(x, y) = 0$.

2. Зінтегрувати ДРЧП: $e^y u_{xy} + u_{yy} + e^{2y} u_x + (e^y - 1)u_y(x, y) = 0$.

3. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0,$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_y(x,0) = 2x.$$

Варіант 8

1. Визначити тип та звести до канонічного вигляду ДРЧП другого порядку:

а) $u_{xx} - \cos x u_{xy} - 0,25 \sin^2 x u_{yy}(x, y) = 5xy;$

б) $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} - 5u_y + u_x(x, y) = 0.$

2. Зінтегрувати ДРЧП: $u_{xx} - (2x+1)u_{yy} - 2xu_{xy} = (x+1)^{-1}(u_x + u_y(x, y)), \quad x \neq 1.$

3. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$u_{xy} + u_{yy} = 0,$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_y(x,0) = 3x.$$