

КОЛИВАННЯ ПРЯМОКУТНОЇ МЕМБРАНИ. МЕТОД ВІДОКРЕМЛЕННЯ ЗМІННИХ

Нагадаємо, що **мембраною** називається натягнута пружна плівка, яка вільно прогинається.

Розглянемо задачу: знайти закон коливань однорідної прямокутної мембрани $\bar{D} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq b, 0 \leq y \leq c\}$, якщо коливання здійснюються за рахунок початкового відхилення $\varphi(x, y)$ та початкової швидкості $\psi(x, y)$ точок мембрани, а край мембрани нерухомо закріплений.

Відповідна математична модель: в області $\Omega = \{(t, x, y) \mid t > 0, (x, y) \in \bar{D}\}$, де

$D = \{(x, y) \mid 0 < x < b, 0 < y < c\}$, знайти розв'язок рівняння вільних коливань мембрани

$$U_{tt} = a^2(U_{xx} + U_{yy}), \quad (1)$$

який справджує початкові умови

$$U(0, x, y) = \varphi(x, y), \quad U_t(0, x, y) = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \bar{D}, \quad (2)$$

та крайові умови

$$U(t, 0, y) = 0, \quad U(t, b, y) = 0, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq y \leq c, \quad (3)$$

$$U(t, x, 0) = 0, \quad U(t, x, c) = 0, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq b, \quad (4)$$

де $\bar{\Omega} = \{(t, x, y) \mid t \geq 0, (x, y) \in \bar{D}\}$.

Будемо вважати, що задача (1) – (4) поставлена коректно, тобто виконуються умови узгодженості у вигляді

$$\varphi(0, y) = \varphi(b, y) = \varphi(x, 0) = \varphi(x, c) = 0, \quad \psi(0, y) = \psi(b, y) = \psi(x, 0) = \psi(x, c) = 0. \quad (5)$$

Для побудови розв'язку мішаної задачі (1) – (4) застосуємо метод відокремлення змінних (метод Фур'є) аналогічно до мішаної задачі для рівняння вільних коливань струни. Зауважимо при цьому, що оскільки для мембрани шуканий розв'язок $U(t, x, y)$ є функцією трьох змінних, то відокремлення змінних здійснюється у два етапи. Отже, на першому етапі розв'язок шукаємо у вигляді добутку двох функцій

$$U(t, x, y) = T(t) \cdot V(x, y) \neq 0, \quad (6)$$

кожна з яких визначається на підставі рівняння (1) та умов (2), (3)-(4).

Підставивши (6) у рівняння (1), одержимо:

$$T''(t) \cdot V(x, y) = a^2 T(t) \cdot (V_{xx} + V_{yy}).$$

Відокремивши змінні шляхом ділення лівої та правої частин останньої рівності на величину $a^2 T(t) \cdot V(x, y) \neq 0$, маємо

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{V_{xx} + V_{yy}}{V(x, y)}.$$

Отримана рівність виконується для всіх $(t, x, y) \in \Omega$ тільки тоді, коли

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{V_{xx} + V_{yy}}{V(x, y)} = \lambda = const,$$

звідки маємо

$$T''(t) - \lambda a^2 T(t) = 0, \quad T(t) \neq 0; \quad (7)$$

$$V_{xx} + V_{yy} - \lambda V(x, y) = 0, \quad V(x, y) \neq 0. \quad (8)$$

Підставивши (6) у крайові умови (3)-(4), одержимо

$$T(t) \cdot V(0, y) = T(t) \cdot V(b, y) = 0, \quad T(t) \cdot V(x, 0) = T(t) \cdot V(x, c) = 0,$$

звідки, враховуючи, що $T(t) \neq 0$, маємо

$$V(0, y) = V(b, y) = 0, \quad V(x, 0) = V(x, c) = 0. \quad (9)$$

На другому етапі відокремлення змінних знаходимо нетривіальні розв'язки $V(x, y)$ двовимірної спектральної задачі (8)-(9) у вигляді добутку двох функцій від однієї змінної:

$$V(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \neq 0, \quad (10)$$

кожна з яких визначається на підставі рівняння (8) та крайових умов (9).

Підставивши (10) у рівняння (9), одержимо:

$$X''(x) \cdot Y(y) + X(x) \cdot Y''(y) - \lambda X(x) \cdot Y(y) = 0.$$

Відокремивши змінні шляхом ділення доданків останньої рівності на величину $X(x) \cdot Y(y) \neq 0$, маємо

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda = \text{const}.$$

Отримана рівність виконується для всіх $0 < x < b$, $0 < y < c$ тільки тоді, коли

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \alpha = \text{const}, \quad \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \beta = \text{const}, \quad \alpha + \beta = \lambda, \quad (11)$$

звідки маємо

$$X''(x) - \alpha X(x) = 0, \quad X(x) \neq 0;$$

$$Y''(y) - \beta Y(y) = 0, \quad Y(y) \neq 0.$$

Підставивши (10) у крайові умови (9), одержимо

$$X(0) \cdot Y(y) = X(b) \cdot Y(y) = 0, \quad X(x) \cdot Y(0) = X(x) \cdot Y(c) = 0,$$

звідки з урахуванням (10) маємо

$$X(0) = X(b) = 0, \quad Y(0) = Y(c) = 0.$$

Отже, для визначення нетривіальних функцій $X(x)$ та $Y(y)$ отримуємо дві одновимірні задачі Штурма-Ліувілля (ЗШЛ)

$$X''(x) - \alpha X(x) = 0, \quad X(0) = X(b) = 0, \quad (12)$$

$$Y''(y) - \beta Y(y) = 0, \quad Y(0) = Y(c) = 0. \quad (13)$$

Задачі (12), (13) аналогічні до вже дослідженої при вивченні вільних коливань обмеженої струни ЗШЛ (див. Цикл лекцій №1 по темах розділу: «Мішані задачі для необмеженої струни. Метод відокремлення змінних»). Використовуючи результати того дослідження, можемо виписати системи власних значень і власних функцій ЗШЛ (12) і (13):

$$\alpha_n = -\left(\frac{\pi n}{b}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{b} x, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\beta_k = -\left(\frac{\pi k}{c}\right)^2, \quad Y_k(y) = \sin \frac{\pi k}{c} y, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тоді згідно з (10) і (11) система власних значень і власних функцій двовимірної спектральної задачі (8)-(9) запишеться у вигляді

$$\lambda_{n,k} = -\left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 - \left(\frac{\pi k}{c}\right)^2, \quad V_{n,k}(x,y) = \sin \frac{\pi n}{b} x \sin \frac{\pi k}{c} y, \quad n,k \in \mathbb{N}. \quad (14)$$

Підставивши знайдені власні значення у (7), отримаємо рівняння для визначення функцій $T(t)$

$$T_{n,k}''(t) - a^2 \lambda_{n,k} T_{n,k}(t) = 0, \quad n,k \in \mathbb{N},$$

загальний розв'язок якого має вигляд

$$T_{n,k}(t) = A_{n,k} \cos a\sqrt{-\lambda_{n,k}}t + B_{n,k} \sin a\sqrt{-\lambda_{n,k}}t, \quad n,k \in \mathbb{N},$$

де $A_{n,k}$, $B_{n,k}$ – довільні сталі.

Згідно з (6) функції

$$U_{n,k}(t,x,y) = (A_{n,k} \cos a\sqrt{-\lambda_{n,k}}t + B_{n,k} \sin a\sqrt{-\lambda_{n,k}}t) V_{n,k}(x,y), \quad n,k \in \mathbb{N}$$

є частинними розв'язками ДРЧП (1), що справджують крайові умови (3)-(4). Тоді з урахуванням лінійності й однорідності ДРЧП (1) та крайових умов (3)-(4) загальний розв'язок ДРЧП (1), що справджує крайові умови (3)-(4), запишеться у вигляді лінійної комбінації частинних розв'язків

$$U(t,x,y) = \sum_{n,k=1}^{\infty} (A_{n,k} \cos a\sqrt{-\lambda_{n,k}}t + B_{n,k} \sin a\sqrt{-\lambda_{n,k}}t) V_{n,k}(x,y). \quad (15)$$

Визначимо коефіцієнти ряду (15) таким чином, щоб він справджував початкові умови (2). Підстановка (15) у (2) дає

$$U(0,x,y) \equiv \sum_{n,k=1}^{\infty} A_{n,k} V_{n,k}(x,y) = \varphi(x,y), \quad (16)$$

$$U_t(0,x,y) \equiv \sum_{n,k=1}^{\infty} a\sqrt{-\lambda_{n,k}} B_{n,k} V_{n,k}(x,y) = \psi(x).$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів із системи (16) розкладемо функції $\varphi(x,y)$ і $\psi(x,y)$ у ряди Фур'є (вважаючи це можливим) по системі власних функцій (14) в області $0 \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq c$:

$$\varphi(x,y) = \sum_{n,k=1}^{\infty} \varphi_{n,k} V_{n,k}(x,y), \quad \psi(x,y) = \sum_{n,k=1}^{\infty} \psi_{n,k} V_{n,k}(x,y), \quad (17)$$

де коефіцієнти Фур'є обчислюються за формулами

$$\varphi_{n,k} = \frac{\int_0^b \int_0^c \varphi(\xi,\eta) V_{n,k}(\xi,\eta) d\eta d\xi}{\int_0^b \int_0^c V_{n,k}^2(\xi,\eta) d\eta d\xi} = \frac{4}{bc} \int_0^b \int_0^c \varphi(\xi,\eta) V_{n,k}(\xi,\eta) d\eta d\xi,$$

$$\psi_{n,k} = \frac{4}{bc} \int_0^b \int_0^c \psi(\xi,\eta) V_{n,k}(\xi,\eta) d\eta d\xi.$$

Порівнюючи ряди (16) і (17), маємо

$$A_{n,k} = \varphi_{n,k} = \frac{4}{bc} \int_0^b \int_0^c \varphi(\xi, \eta) V_{n,k}(\xi, \eta) d\eta d\xi,$$

$$B_{n,k} = \frac{\psi_{n,k}}{a\sqrt{-\lambda_{n,k}}} = \frac{4}{abc\sqrt{-\lambda_{n,k}}} \int_0^b \int_0^c \psi(\xi, \eta) V_{n,k}(\xi, \eta) d\eta d\xi.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти у (15), одержимо розв'язок мішаної задачі (1) – (4) у вигляді

$$U(t, x, y) = \frac{4}{bc} \sum_{n,k=1}^{\infty} \left[\int_0^b \int_0^c \varphi(\xi, \eta) V_{n,k}(\xi, \eta) d\eta d\xi \cdot \cos a\sqrt{-\lambda_{n,k}}t + \frac{1}{a\sqrt{-\lambda_{n,k}}} \int_0^b \int_0^c \psi(\xi, \eta) V_{n,k}(\xi, \eta) d\eta d\xi \cdot \sin a\sqrt{-\lambda_{n,k}}t \right] V_{n,k}(x, y), \quad (18)$$

де $\lambda_{n,k}$ і $V_{n,k}(x, y)$ визначаються формулами (14).

Справедлива наступна

Теорема (обґрунтування методу Фур'є для рівняння коливань мембрани). Якщо в початкових умовах (2) функції $\varphi(x, y)$ та $\psi(x, y)$ неперервні разом із похідними до четвертого порядку включно в прямокутнику \bar{D} і справджують умови узгодженості (5), то ряд (18), де $\lambda_{n,k}$ і $V_{n,k}(x, y)$ визначаються формулами (14), збігається рівномірно в області $\bar{\Omega}$, і його можна почленно диференціювати двічі за t , x і y в області Ω .

Зауваження 1. У випадку мішаної задачі для рівняння **вимушених коливань мембрани**

$$U_{tt} = a^2(U_{xx} + U_{yy}) + f(t, x, y) \quad (19)$$

із початковими умовами (2) та однорідними крайовими умовами (3)-(4) розв'язок шукають у вигляді

$$U(t, x, y) = \sum_{n,k=1}^{\infty} T_n(t) V_{n,k}(x, y), \quad (20)$$

де $V_{n,k}(x, y)$ – власні функції двовимірної спектральної задачі для відповідної однорідної задачі (1) – (4), які за крайових умов (3)-(4) визначаються формулами (14), а коефіцієнти $T_n(t)$ знаходяться шляхом безпосередньої підстановки ряду (20) у неоднорідне рівняння (19) та початкові умови (2).

Зауваження 2. У випадку неоднорідних крайових умов (3)-(4) (**загальна мішана задача**) для застосування методу відокремлення змінних вихідну задачу спершу необхідно звести до мішаної задачі з однорідними крайовими умовами підстановкою

$$U(t, x, y) = Z(t, x, y) + \omega(t, x, y),$$

де $Z(t, x, y)$ – нова невідома функція, а допоміжну функцію $\omega(t, x, y)$ підбираємо таким чином, щоб вона справджувала всі чотири крайові умови вихідної задачі. Якщо таку

функцію вдалося підібрати, тоді для функції $Z(t, x, y)$ одержимо мішану задачу з однорідними крайовими умовами для рівняння вільних або вимушених коливань мембрани, до якої за умови її коректної постановки можна застосувати метод Фур'є.

За аналогічними схемами інтегруються мішані задачі для рівняння коливань мембрани і у випадках крайових умов іншого вигляду, відмінного від (3)-(4).

Джерела:

- [1] *Перестюк М. О., Маринець В. В.* Теорія рівнянь математичної фізики. – К.: Либідь, 2001. – С. 108-120.
- [2] *Перестюк М.О., Маринець В.В., Рего В.Л.* Збірник задач з математичної фізики. – Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2012. – С. 78-90.