Курс: «Рівняння в частинних похідних та їх застосування» **ст. викл. Рего В. Л.**
До Модуля 2
Цикл лекцій по темах розділу:

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ МІШАНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НАПІВОБМЕЖЕНОЇ СТРУНИ

1. Постановка мішаних задач для напівобмеженої струни

При дослідженні фізичних процесів різної природи, які відбуваються в об'єктах обмежених або напівобмежених розмірів, необхідно враховувати відповідні режими на границі заданих об'єктів, оскільки вони суттєво впливають на розглядуваний процес. Отже, при складанні математичних моделей, наприклад, хвильових процесів, які відбуваються у таких об'єктах, окрім хвильового рівняння та початкових умов, слід задати також умови (***коливні режими***) на межі об'єкта (***крайові умови***), що призводить до ***мішаних задач*** (тобто задач, які містять і початкові, і крайові умови) для ДРЧП.

Означення 1. Струна називається ***напівобмеженою***, якщо один із її кінців розміщений у початку координат $x=0$, а інший знаходиться на такій відстані від початку координат, яка значно перевищує величину at (t – час, a – стала, що фігурує в рівнянні коливань струни).

Розглянемо задачу: вивчити процес коливань однорідної напівобмеженої струни з кінцем у початку координат $x=0$ під дією рівномірно розподіленої уздовж струни зовнішньої сили інтенсивності $f(t,x)$, якщо початкове відхилення точок струни рівне $\varphi(x)$, їх початкова швидкість рівна $\psi(x)$, а на кінці струни заданий один із наступних коливних режимів:

1) кінець струни рухається згідно з заданим законом $\mu(t)$;

2) на кінець струни діє сила $\nu(t)$;

3) кінець струни пружно закріплений.

Зауважимо: у випадку $\mu(t)\equiv 0$ кажуть, що кінець струни ***нерухомо (жорстко) закріплений***; якщо ж $\nu(t)\equiv 0$, то кінець називають ***вільним***.

Відповідна математична модель: в області $\Omega=\{(t,x)\,|\,t>0, x>0\}$ знайти розв'язок рівняння коливань струни

$$U_{tt}=a^2U_{xx}+f(t,x), \tag{1.1}$$

який справджує початкові умови

$$U(0,x)=\varphi(x), \quad U_t(0,x)=\psi(x), \quad x\ge 0, \tag{1.2}$$

та одну з відповідних крайових умов:

$$U(t,0)=\mu(t), \quad t\ge 0, \tag{1.3}$$

$$-\mathrm{T}U_x(t,0)=\nu(t), \quad t\ge 0, \tag{1.4}$$

де T – величина сили натягу, або

$$U_x(t,0)-h[U(t,0)-\gamma(t)]=0, \quad t\ge 0, \tag{1.5}$$

де $h = \alpha T^{-1}$, $\alpha = const > 0$ – коефіцієнт жорсткості пружини, $\gamma(t)$ – закон руху вільного кінця пружини.
Задачі (1.1)-(1.2)-(1.3), (1.1)-(1.2)-(1.4), (1.1)-(1.2)-(1.5) називаються відповідно першою, другою та третьою мішаними задачами для напівобмеженої струни.
Якщо початкові та крайові умови не суперечні, тобто, наприклад, у випадку першої крайової умови (1.3)

$$\mu(0) = \varphi(0), \quad \mu'(0) = \psi(0),$$

то кажуть, що початкові та крайові умови є ***узгодженими***, тобто мішана задача поставлена коректно.

2. Метод характеристик інтегрування мішаних задач для напівобмеженої струни

Для ілюстрації застосування методу характеристик до інтегрування мішаних задач для напівобмеженої струни розглянемо наступну задачу: вивчити процес вільних коливань однорідної напівобмеженої струни, якщо початкове відхилення точок струни та їх початкова швидкість відповідно рівні $\varphi(x)$ та $\psi(x)$, а кінець струни $x = 0$ рухається згідно з заданим законом $\mu(t)$.
Відповідна математична модель: в області $\Omega = \{(t,x) \,|\, t > 0, x > 0\}$ знайти розв'язок ДРЧП

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}, \tag{2.1}$$

який справджує початкові умови (1.2) та крайову умову (1.3).
Для побудови розв'язку мішаної задачі (2.1)-(1.2)-(1.3) застосуємо метод характеристик. Як було показано при вивченні вільних коливань необмеженої струни, загальний розв'язок рівняння (2.1) подається у вигляді суперпозиції прямої та зворотної хвиль

$$U(t,x) = f_1(x - at) + f_2(x + at), \tag{2.2}$$

де f_1 і f_2 – довільні функції, визначені за всіх дійсних значень своїх аргументів.
Оскільки в нашому випадку функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ визначені тільки за $x \ge 0$, то згідно з початковими умовами (1.2) в області $x - at > 0$ маємо:

$$f_1(x - at) = \frac{1}{2}\varphi(x - at) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{0}\psi(z)dz - C, \tag{2.3}$$

$$f_2(x + at) = \frac{1}{2}\varphi(x + at) + \frac{1}{2a}\int_{0}^{x+at}\psi(z)dz + C, \tag{2.4}$$

тобто

$$U(t,x) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz, \quad x - at > 0. \tag{2.5}$$

Визначимо розв'язок мішаної задачі (2.1)-(1.2)-(1.3) в області $x - at < 0$. При цьому зауважимо, що функція $f_2(x + at)$ визначена формулою (2.4) для всіх $x \ge 0$, $t \ge 0$.
Знайдемо функцію $f_1(x - at)$ при $x - at < 0$. Для цього використаємо крайову умову (1.3). Підставивши (2.2) в (1.3), дістанемо

$$f_1(-at) + f_2(at) = \mu(t), \quad t \ge 0. \tag{2.6}$$

Покладемо $-at = z.$ Тоді на підставі (2.6)

$$f_1(z) = -f_2(-z) + \mu\left(-\frac{z}{a}\right), \quad z < 0.$$

Застосувавши формулу (2.4), визначаємо $f_1(x-at)$ в області $x - at < 0$:

$$f_1(x-at) = -f_2(at-x) = -\frac{1}{2}\varphi(at-x) - \frac{1}{2a}\int_0^{at-x}\psi(z)dz + \mu\left(t - \frac{x}{a}\right) - C. \qquad (2.7)$$

Підставивши (2.7) і (2.4) у (2.2), знаходимо розв'язок задачі (2.1)-(1.2)-(1.3) для значень $x - at < 0$:

$$U(t,x) = \frac{\varphi(x+at) - \varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(z)dz + \mu\left(t - \frac{x}{a}\right), \quad x - at < 0. \qquad (2.8)$$

Таким чином, розв'язок мішаної задачі (2.1)-(1.2)-(1.3) дається формулою Д'Аламбера (2.5) при $x - at > 0$ і формулою (2.8) при $x - at < 0$. У зв'язку з цим уздовж головної характеристики $x - at = 0$ отриманий розв'язок загалом може бути розривним. Знайдемо ***умову неперервності*** розв'язку мішаної задачі (2.1)-(1.2)-(1.3) уздовж прямої $x - at = 0.$ Для цього зазначимо, що розрив довільного розв'язку рівняння (2.1) уздовж головної характеристики є сталою величиною. Дійсно, хвиля $f_2(x+at)$ неперервна при переході через головну характеристику, оскільки її лінії рівня $x + at = const$ перетинають пряму $x = at,$ а хвиля $f_1(x-at)$ під і над головною характеристикою $x - at = 0$ має границі, рівні відповідно $f_1(0+)$ та $f_1(0-)$. Таким чином,

$$U\big|_{x-at=0+} - U\big|_{x-at=0-} = f_1(0+) - f_1(0-),$$

а отже, умова неперервності розв'язку мішаної задачі (2.1)-(1.2)-(1.3) на головній характеристиці має вигляд

$$f_1(0+) = f_1(0-),$$

або, беручи до уваги (2.3), (2.7), одержуємо:

$$f_1(0+) = 0{,}5\varphi(0) - C, \quad f_1(0-) = -0{,}5\varphi(0) + \mu(0) + C,$$

тобто $0{,}5\varphi(0) = -0{,}5\varphi(0) + \mu(0),$ звідки

$$\varphi(0) = \mu(0). \qquad (2.9)$$

Умова (2.9) є умовою узгодженості початкових (1.2) та крайової (1.3) умов (умовою неперервності граничних значень розв'язку $U(t,x)$ в початку координат $x = 0$, $t = 0$).

Висновок. Умова (2.9) узгодженості початкових та крайової умов мішаної задачі (2.1)-(1.2)-(1.3) є необхідною й достатньою умовою неперервності розв'язку на всій головній характеристиці $x - at = 0$.

Означення 2. В області $0 < x < at$ функція $f_2(x+at)$ називається хвилею, ***падучою*** на кінець струни $x = 0,$ а $f_1(x-at)$ – ***відображеною (відбитою)*** хвилею від цього кінця. У зв'язку з цим означенням розглянутий метод побудови розв'язків мішаних задач називають також ***методом падучої та відбитої хвиль***.

Аналогічно будуються розв'язки мішаних задач для напівобмеженої струни і у випадку крайових умов вигляду (1.4) та (1.5) (див., наприклад, [2], с. 63-66).

Приклад 1.1. Поширюючи збурення кінця за допомогою прямої хвилі, розв’язати мішану задачу та дати фізичну інтерпретацію:

$$U_{tt}=a^2U_{xx},\quad t>0,\quad x>0;$$
$$U(0,x)=U_t(0,x)=0,\quad x\ge 0;$$
$$U_x(t,0)=6a^{-1}\sin t\cos^2 t,\quad t\ge 0.$$

Розв’язання. Фізична інтерпретація задачі: дослідити вільні коливання однорідної напівобмеженої струни, які відбуваються тільки за рахунок сили, що діє на кінець струни.

Для побудови розв’язку заданої мішаної задачі застосуємо метод характеристик аналогічно до задачі (2.1)-(1.2)-(1.3). Загальний розв’язок рівняння вільних коливань струни подається у вигляді (2.2), де f_1 і f_2 – довільні функції, визначені за всіх дійсних значень своїх аргументів. Згідно з початковими умовами $\varphi(x)=\psi(x)=0$ в області $x-at>0$ маємо:

$$f_1(x-at)=\frac{1}{2}\varphi(x-at)+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{0}\psi(z)dz-C=-C, \tag{2.10}$$

$$f_2(x+at)=\frac{1}{2}\varphi(x+at)+\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{x+at}\psi(z)dz+C=C, \tag{2.11}$$

де $C=const$, тобто на підставі (2.2)

$$U(t,x)=0,\quad x-at>0. \tag{2.12}$$

Визначимо розв’язок заданої мішаної задачі в області $x-at<0$. При цьому зауважимо, що функція $f_2(x+at)$ визначена формулою (2.11) для всіх $x\ge 0$, $t\ge 0$.

Знайдемо функцію $f_1(x-at)$ при $x-at<0$. Для цього використаємо крайову умову на кінці $x=0$. Після підстановки (2.2) в задану крайову умову дістанемо

$$U_x(t,0)\equiv f_1'(-at)+f_2'(at)=6a^{-1}\sin t\cos^2 t,\quad t\ge 0. \tag{2.13}$$

Покладемо $-at=z$. Тоді на підставі (2.13)

$$f_1'(z)=-f_2'(-z)-\frac{6}{a}\sin\frac{z}{a}\cos^2\frac{z}{a},\quad z<0.$$

Згідно з (2.11) $f_2'(-z)=0$, тоді

$$f_1'(z)=-\frac{6}{a}\sin\frac{z}{a}\cos^2\frac{z}{a}\quad\Rightarrow\quad f_1(z)=2\cos^3\frac{z}{a}+C_1\quad z<0.$$

Звідси визначаємо $f_1(x-at)$ в області $x-at<0$:

$$f_1(x-at)=2\cos^3\left(\frac{x}{a}-t\right)+C_1. \tag{2.14}$$

Знайдемо значення сталої C_1 із умови неперервності розв’язку заданої мішаної задачі уздовж головної характеристики $x-at=0$

$$f_1(0+)=f_1(0-).$$

Беручи до уваги (2.10), (2.14), одержуємо:

$$f_1(0+)=-C,\quad f_1(0-)=2+C_1,$$

тобто $-C=2+C_1$, звідки $C_1=-2-C$. Тоді на підставі (2.14) маємо

$$f_1(x-at)=2\cos^3\left(\frac{x}{a}-t\right)-2-C,\quad x-at<0. \tag{2.15}$$

Підставивши (2.15) і (2.11) у (2.2), знаходимо розв'язок заданої мішаної задачі для значень $x-at<0$:

$$U(t,x)=2\cos^3\left(\frac{x}{a}-t\right)-2,\quad x-at<0.$$

Відповідь. Для всіх $t\geq 0$, $x\geq 0$ $U(t,x)=\begin{cases}0, & x-at>0,\\ 2\cos^3\left(\frac{x}{a}-t\right)-2, & x-at<0.\end{cases}$

Приклад 1.2. Дослідити процес вільних коливань однорідної ($a=2$) напівобмеженої струни з пружно закріпленим ($h=1$) кінцем, причому вільний кінець пружини рухається згідно з законом $\gamma(t)=(t-1)^2$, якщо початкове відхилення точок струни рівне $\varphi(x)=1$, а їх початкова швидкість рівна $\psi(x)=2x$.

Розв'язання. Відповідна математична модель: в області $\Omega=\{(t,x)\,|\,t>0,x>0\}$ знайти розв'язок рівняння

$$U_{tt}=4U_{xx}, \tag{2.16}$$

який задовольняє початкові умови

$$U(0,x)=1,\quad U_t(0,x)=2x,\quad x\geq 0, \tag{2.17}$$

та крайову умову вигляду (1.5)

$$U_x(t,0)-[U(t,0)-(t-1)^2]=0,\quad t\geq 0. \tag{2.18}$$

Загальний розв'язок рівняння (2.16) подається у вигляді

$$U(t,x)=f_1(x-2t)+f_2(x+2t), \tag{2.19}$$

де f_1 і f_2 – довільні функції, визначені за всіх дійсних значень своїх аргументів. В області $x-2t>0$ маємо:

$$f_1(x-2t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\int_{x-2t}^{0}2zdz-C=\frac{1}{2}-\frac{(x-2t)^2}{4}-C, \tag{2.20}$$

$$f_2(x+2t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\int_{0}^{x+2t}2zdz+C=\frac{1}{2}+\frac{(x+2t)^2}{4}+C, \tag{2.21}$$

тобто

$$U(t,x)=1+2tx,\quad x-2t>0. \tag{2.22}$$

Визначимо розв'язок мішаної задачі (2.16)-(2.17)-(2.18) в області $x-2t<0$. При цьому зауважимо, що функція $f_2(x+2t)$ визначена формулою (2.21) для всіх $x\geq 0$, $t\geq 0$. Знайдемо функцію $f_1(x-2t)$ при $x-2t<0$. Для цього використаємо крайову умову (2.18). Підставивши (2.19) у (2.18), дістанемо

$$f_1'(-2t)+f_2'(2t)-f_1(-2t)-f_2(2t)+(t-1)^2=0,\quad t\geq 0. \tag{2.23}$$

Покладемо $-2t=z$. Тоді на підставі (2.23)

$$f_1'(z)-f_1(z)=f_2(-z)-f_2'(-z)-\left(\frac{z}{2}+1\right)^2,\quad z<0.$$

Згідно з (2.21) $f_2(-z)=\frac{1}{2}+\frac{z^2}{4}+C$, $f_2'(-z)=-\frac{z}{2}$, тоді

$$f_1'(z)-f_1(z)=\frac{1}{2}+\frac{z^2}{4}+C+\frac{z}{2}-\left(\frac{z}{2}+1\right)^2=-\frac{z}{2}-\frac{1}{2}+C,\quad z<0.$$

Застосувавши формулу загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння першого порядку, маємо

$$f_1(z)=\mathrm{e}^{z}\left[C_1+\int\left(C-\frac{z}{2}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-z}\,dz\right]=C_1\,\mathrm{e}^{z}+\frac{z}{2}+1-C\,.$$

Звідси визначаємо $f_1(x-2t)$ в області $x-2t<0$:

$$f_1(x-2t)=C_1\,\mathrm{e}^{x-2t}+\frac{x-2t}{2}+1-C\,. \tag{2.24}$$

Знайдемо значення сталої C_1 із умови неперервності розв'язку заданої мішаної задачі уздовж головної характеристики $x-2t=0$

$$f_1(0+)=f_1(0-)\,.$$

Беручи до уваги (2.20), (2.24), одержуємо:

$$f_1(0+)=\frac{1}{2}-C,\quad f_1(0-)=C_1+1-C,$$

тобто $\frac{1}{2}-C=C_1+1-C$, звідки $C_1=-\frac{1}{2}$. Тоді на підставі (2.24) маємо

$$f_1(x-2t)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x-2t}+\frac{x-2t}{2}+1-C\,. \tag{2.25}$$

Підставивши (2.25) і (2.21) у (2.19), знаходимо розв'язок задачі (2.16)-(2.17)-(2.18) для значень $x-2t<0$:

$$U(t,x)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x-2t}+\frac{x-2t}{2}+\frac{3}{2}+\frac{(x+2t)^2}{4},\quad x-2t<0\,.$$

Відповідь. Для всіх $t\ge 0$, $x\ge 0$

$$U(t,x)=\begin{cases}1+2tx, & x-2t\ge 0;\\ -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x-2t}+\frac{x-2t}{2}+\frac{3}{2}+\frac{(x+2t)^2}{4}, & x-2t<0.\end{cases}$$

3. Геометричне зображення процесу вільних коливань напівобмеженої струни

Для геометричного зображення процесу вільних коливань напівобмеженої струни, окрім викладеного вище загального методу характеристик, іноді зручно застосувати також методи парного та непарного продовження, які в сукупності називають ***методом відображень***. Суть цих методів полягає у зведенні мішаної задачі для напівобмеженої струни до еквівалентної задачі Коші.

Метод непарного продовження. Розглянемо задачу: знайти закон вільних коливань однорідної напівобмеженої струни з кінцем, жорстко закріпленим у початку координат

$x=0$, якщо початкове відхилення точок струни рівне $\varphi(x)$, а їх початкова швидкість рівна $\psi(x)$.

Відповідна математична модель: в області $\Omega=\{(t,x)\,|\,t>0, x>0\}$ знайти розв'язок рівняння вільних коливань струни (2.1), який справджує початкові умови (1.2) та крайову умову

$$U(t,0)=0, \quad t\ge 0. \tag{3.1}$$

Для розв'язання поставленої задачі застосуємо метод непарного продовження: побудуємо відповідну до мішаної задачі (2.1)-(1.2)-(3.1) задачу Коші шляхом непарного продовження початкових функцій на від'ємну піввісь $x<0$. Маємо:

$$\begin{gathered} V_{tt}=a^2V_{xx}, \quad t>0, \quad x\in \mathrm{R}, \\ V(0,x)=\Phi(x)=\begin{cases} \varphi(x), & x\ge 0, \\ -\varphi(-x), & x<0, \end{cases} \quad V_t(0,x)=\Psi(x)=\begin{cases} \psi(x), & x\ge 0, \\ -\psi(-x), & x<0. \end{cases} \end{gathered} \tag{3.2}$$

Покажемо, що в області $x\ge 0$ задача Коші (3.2) еквівалентна мішаній задачі (2.1)-(1.2)-(3.1). Для цього достатньо показати, що розв'язок задачі Коші (3.2) $V(t,x)$ справджує крайову умову (3.1), адже рівняння й початкові умови в розглядуваній області співпадають.

Як відомо, розв'язок задачі Коші (3.2) дається формулою Д'Аламбера

$$V(t,x)=\frac{\Phi(x-at)+\Phi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(z)dz. \tag{3.3}$$

Підставивши в (3.3) значення $x=0$, одержимо

$$V(t,0)=\frac{\Phi(-at)+\Phi(at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{-at}^{at}\Psi(z)dz=0,$$

що випливає з непарності функцій $\Phi(x)$ та $\Psi(x)$. Отже, в області $x\ge 0$ задача Коші (3.2) еквівалентна мішаній задачі (2.1)-(1.2)-(3.1), а тому розв'язком останньої мішаної задачі буде функція

$$U(t,x)=V(t,x)\big|_{x\ge 0}.$$

Метод парного продовження. Розглянемо задачу: знайти закон вільних коливань однорідної напівобмеженої струни з вільним кінцем, що має абсцису $x=0$, якщо початкове відхилення точок струни рівне $\varphi(x)$, а їх початкова швидкість рівна $\psi(x)$.

Відповідна математична модель: в області $\Omega=\{(t,x)\,|\,t>0, x>0\}$ знайти розв'язок рівняння вільних коливань струни (2.1), який справджує початкові умови (1.2) та крайову умову

$$U_x(t,0)=0, \quad t\ge 0. \tag{3.4}$$

Для розв'язання поставленої задачі застосуємо метод парного продовження: побудуємо відповідну до мішаної задачі (2.1)-(1.2)-(3.4) задачу Коші шляхом парного продовження початкових функцій на від'ємну піввісь $x<0$. Маємо:

$$\begin{gathered} V_{tt}=a^2V_{xx}, \quad t>0, \quad x\in \mathrm{R}, \\ V(0,x)=\Phi(x)=\begin{cases} \varphi(x), & x\ge 0, \\ \varphi(-x), & x<0, \end{cases} \quad V_t(0,x)=\Psi(x)=\begin{cases} \psi(x), & x\ge 0, \\ \psi(-x), & x<0. \end{cases} \end{gathered} \tag{3.5}$$

Покажемо, що в області $x \geq 0$ задача Коші (3.5) еквівалентна мішаній задачі (2.1)-(1.2)-(3.4). Для цього достатньо показати, що розв'язок задачі Коші (3.5) $V(t,x)$ справджує крайову умову (3.4), адже рівняння й початкові умови в розглядуваній області співпадають.

Як відомо, розв'язок задачі Коші (3.2) дається формулою Д'Аламбера (3.3). Для підстановки в крайову умову (3.4) знайдемо похідну

$$V_x(t,x) = \frac{\Phi'(x-at)+\Phi'(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}[\Psi(x+at)-\Psi(x-at)]. \qquad (3.6)$$

Підставивши в (3.6) значення $x = 0$, одержимо

$$V_x(t,0) = \frac{\Phi'(-at)+\Phi'(at)}{2} + \frac{1}{2a}[\Psi(at)-\Psi(-at)] = 0,$$

що випливає з парності функцій $\Phi(x)$ та $\Psi(x)$ [відомо, що похідна $\Phi'(x)$ парної функції є функцією непарною]. Отже, в області $x \geq 0$ задача Коші (3.5) еквівалентна мішаній задачі (2.1)-(1.2)-(3.4), а тому розв'язком останньої мішаної задачі буде функція

$$U(t,x) = V(t,x)\big|_{x \geq 0}.$$

Висновок. Отже, для того, щоб розв'язати мішану задачу (2.1)-(1.2)-(3.1) або (2.1)-(1.2)-(3.4), достатньо знайти розв'язок відповідної задачі Коші (3.2) або (3.5) і обмежити його «нефіктивною» областю $x \geq 0$.

Приклади на застосування методу відображень можна знайти у джерелах:
[1], с. 99-107;
[2], с. 68-73.

Джерела:

[1] *Перестюк М. О., Маринець В. В.* Теорія рівнянь математичної фізики. – К.: Либідь, 2001. – С. 92-107.

[2] *Перестюк М. О., Маринець В. В., Рего В. Л.* Збірник задач з математичної фізики. – Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2012. – С 61-78.