Курс: «Рівняння в частинних похідних та їх застосування» **ст. викл. Рего В. Л.**
До Модуля 2
Лекція на тему:

ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ У ПРОСТОРІ ТА НА ПЛОЩИНІ

1. Задача Коші для хвильового рівняння у просторі. Формула Кірхгофа

Розглянемо задачу Коші: в просторі функцій $C^2\left(\mathbf{D}=(0,+\infty)\times\mathbf{E}_3\right)$ знайти розв'язок тривимірного хвильового рівняння

$$u_{tt}=a^2\Delta u(t,M),\quad t>0,\quad M=M(x,y,z)\in\mathbf{E}_3, \tag{1.1}$$

де $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$, за початкових умов

$$u(0,M)=\Phi(M),\quad u_t(0,M)=\Psi(M),\quad M\in\mathbf{E}_3. \tag{1.2}$$

Справедливі наступні теореми.

Теорема 1.1 ***(про єдиність розв'язку задачі Коші для хвильового рівняння у просторі).*** Якщо в початкових умовах (1.2) $\Phi(M)\in C^3(\mathbf{E}_3)$, $\Psi(M)\in C^2(\mathbf{E}_3)$, то єдиний у просторі функцій $C^2(\mathbf{D})$ розв'язок задачі Коші (1.1)-(1.2) існує і дається формулою

$$u(t,M)=\frac{1}{4\pi a^2}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{\mathbf{S}_{at}(M)}\frac{\Phi(\xi,\eta,\zeta)}{t}ds_{at}+\frac{1}{4\pi a^2}\iint\limits_{\mathbf{S}_{at}(M)}\frac{\Psi(\xi,\eta,\zeta)}{t}ds_{at}, \tag{1.3}$$

де $\mathbf{S}_{at}(M)$ – сфера радіуса at із центром у точці $M(x,y,z)$:

$$(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2=(at)^2.$$

Формула (1.3) називається ***формулою Кірхгофа***.

Теорема 1.2 ***(про коректність постановки задачі Коші для хвильового рівняння у просторі).*** Нехай функції $u_1(t,M)$, $u_2(t,M)$ є розв'язками рівняння (1.1) за початкових умов

$$u_i(0,M)=\Phi_i(M),\quad u_{i_t}(0,M)=\Psi_i(M),\quad M\in\mathbf{E}_3,\quad i=1,2,$$

де $\Phi_i(M)\in C^3(\mathbf{E}_3)$, $\Psi_i(M)\in C^2(\mathbf{E}_3)$, $i=1,2$. Тоді $\forall\varepsilon>0$, $t_1>0$ $\exists\delta=\delta(\varepsilon,t_1)>0$, що як тільки $|\Phi_1(M)-\Phi_2(M)|<\delta$, $|\Phi_{1_x}(M)-\Phi_{2_x}(M)|<\delta$, $|\Phi_{1_y}(M)-\Phi_{2_y}(M)|<\delta$, $|\Phi_{1_z}(M)-\Phi_{2_z}(M)|<\delta$, $|\Psi_1(M)-\Psi_2(M)|<\delta$ при $M\in\mathbf{E}_3$, то виконується нерівність

$$|u_1(t,M)-u_2(t,M)|<\varepsilon,\ \forall t\le t_1,\ M\in\mathbf{E}_3.$$

Теорема 1.3 ***(принцип Гюйґенса).*** Розв'язок задачі Коші (1.1)-(1.2) в довільній точці $M\in\mathbf{E}_3$ і в довільний момент часу $t>0$ повністю визначається значеннями функцій $\Phi(M)$, $\dfrac{\partial\Phi}{\partial\vec{n}}$ та $\Psi(M)$ на сфері $\mathbf{S}_{at}(M)$, де $\vec{n}$ позначає зовнішню нормаль до цієї сфери.

Зведемо формулу Кірхгофа (1.3) до вигляду, зручного для практичного застосування. Для цього спочатку перейдемо в інтегралах у правій частині рівності (1.3) від сфери $\mathbf{S}_{at}(M)$ до одиничної сфери з центром у початку координат $\mathbf{S}_1(0)$: $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ шляхом підстановок

$$\alpha=\frac{\xi-x}{at},\quad \beta=\frac{\eta-y}{at},\quad \gamma=\frac{\zeta-z}{at},\quad ds_{at}=(at)^2 ds_1.$$

Тоді з (1.3) одержимо:

$$\begin{aligned} u(t,M)=&\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{\mathbf{S}_1(0)} t\Phi(x+at\alpha,y+at\beta,z+at\gamma)ds_1+\\ &+\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\mathbf{S}_1(0)} t\Psi(x+at\alpha,y+at\beta,z+at\gamma)ds_1. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Перейдемо тепер до сферичних координат на сфері $\mathbf{S}_1(0)$ за формулами:

$$\alpha=\sin\theta\cos\varphi,\ \beta=\sin\theta\sin\varphi,\ \gamma=\cos\theta,\ ds_1=\sin\theta d\theta d\varphi\quad(0\le\theta\le\pi,\ 0\le\varphi<2\pi).$$

За таких замін із (1.4) дістанемо ***формулу Кірхгофа у сферичних координатах***

$$\begin{aligned} u(t,M)=&\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} t\Phi(x+at\sin\theta\cos\varphi,y+at\sin\theta\sin\varphi,z+at\cos\theta)\sin\theta d\theta d\varphi+\\ &+\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} t\Psi(x+at\sin\theta\cos\varphi,y+at\sin\theta\sin\varphi,z+at\cos\theta)\sin\theta d\theta d\varphi. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Застосовуючи принцип Дюгамеля, можна переконатися, що розв'язок задачі Коші для неоднорідного хвильового рівняння

$$u_{tt}=a^2\Delta u(t,M)+f(t,M),\quad t>0,\quad M=M(x,y,z)\in\mathbf{E}_3,$$
$$u(0,M)=0,\quad u_t(0,M)=0,\quad M\in\mathbf{E}_3,$$

де $f(t,M)\in C^2(\mathbf{D})$, подається у вигляді так званого ***запізнюючого потенціала***

$$u(t,M)=\frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_{\mathbf{D}_{at}(M)}\frac{f\left(t-\frac{\rho}{a},\alpha,\beta,\gamma\right)}{\rho}d\alpha d\beta d\gamma, \tag{1.6}$$

де $\rho=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}$, а $\mathbf{D}_{at}(M)$ – куля радіуса at із центром у точці $M(x,y,z)$. Якщо в інтегралі (1.6) перейти до кулі $\mathbf{D}_{at}(0)$ і потім ввести сферичні координати, то одержимо формулу запізнюючого потенціала для практичного використання:

$$u(t,M)=\frac{1}{4\pi a^2}\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f\left(t-\frac{\rho}{a},x+\rho\sin\theta\cos\varphi,y+\rho\sin\theta\sin\varphi,z+\rho\cos\theta\right)\rho\sin\theta d\theta d\varphi d\rho.$$

Зауваження. Іноді розв'язок багатовимірної задачі Коші можна знайти простіше, використовуючи так званий ***метод спуску***. Ідея методу: розв'язок задачі Коші шукаємо як функцію лише тих просторових змінних, від яких залежать початкові умови. Якщо цих змінних менше, ніж вимірів оператора Лапласа Δu, то таким чином вдається «спустити» вимірність задачі, замінивши її простішою.

Приклад 1.1. Знайти розв'язок задачі Коші

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \quad t > 0, \quad (x, y, z) \in \mathbf{E}_3,$$
$$u(0, x, y, z) = 0, \quad u_t(0, x, y, z) = z, \quad (x, y, z) \in \mathbf{E}_3$$

шляхом безпосереднього використання формули Кірхгофа та за методом спуску.
Розв'язання. Безпосередня підстановка початкових функцій $\Phi(M) = 0$, $\Psi(M) = z$ у формулу Кірхгофа (1.5) дає

$$u(t, x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} t(z + at\cos\theta)\sin\theta d\theta d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} t(z + at\cos\theta)\sin\theta d\theta =$$

$$= \frac{t}{2}\left[-z\cos\theta - 0{,}25at\cos 2\theta\right]_0^{\pi} = tz.$$

Для застосування методу спуску зауважимо, що з просторових змінних у початкові функції входить тільки z, а отже, можемо шукати $u(t, x, y, z) \equiv u(t, z)$ із одновимірної задачі Коші

$$u_{tt} = a^2 u_{zz}, \quad t > 0, \quad z \in \mathbf{R},$$
$$u(0, z) = 0, \quad u_t(0, z) = z, \quad z \in \mathbf{R},$$

розв'язок якої дається формулою Д'Аламбера

$$u(t, z) = \frac{\Phi(z - at) + \Phi(z + at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{z-at}^{z+at}\Psi(\xi)d\xi = \frac{1}{2a}\int_{z-at}^{z+at}\xi d\xi = \left.\frac{\xi^2}{4a}\right|_{z-at}^{z+at} = tz.$$

2. Задача Коші для хвильового рівняння на площині. Формула Пуассона

Розглянемо задачу Коші: в просторі функцій $C^2\left(\mathbf{D} = (0, +\infty) \times \mathbf{E}_2\right)$ знайти розв'язок двовимірного хвильового рівняння (рівняння вільних коливань мембрани)

$$u_{tt} = a^2 \Delta u(t, M), \quad t > 0, \quad M = M(x, y) \in \mathbf{E}_2, \qquad (2.1)$$

де $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, за початкових умов

$$u(0, M) = \Phi(M), \quad u_t(0, M) = \Psi(M), \quad M \in \mathbf{E}_2. \qquad (2.2)$$

Справедливі наступні теореми.

Теорема 2.1 (про єдиність розв'язку задачі Коші для хвильового рівняння на площині). Якщо в початкових умовах (2.2) $\Phi(M) \in C^3\left(\mathbf{E}_2\right)$, $\Psi(M) \in C^2\left(\mathbf{E}_2\right)$, то єдиний у просторі функцій $C^2(\mathbf{D})$ розв'язок задачі Коші (2.1)-(2.2) існує і дається формулою

$$u(t,M)=\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{\mathbf{K}_{at}(M)}\frac{\Phi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}+$$
$$+\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{\mathbf{K}_{at}(M)}\frac{\Psi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}, \tag{2.3}$$

де $\mathbf{K}_{at}(M)$ – круг радіуса *at* із центром у точці $M(x,y)$: $(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\le(at)^2$.
Формула (2.3) називається ***формулою Пуассона***.
Зауважимо, що формулу Пуассона (2.3) можна одержати із формули Кірхгофа (1.3) за допомогою згаданого вище методу спуску, використовуючи незалежність функцій $\Phi(M)$ і $\Psi(M)$ від змінної *z* (див. [1], с. 54-55).

Теорема 2.2 ***(про коректність постановки задачі Коші для хвильового рівняння на площині).*** Нехай функції $u_1(t,M)$, $u_2(t,M)$ є розв'язками рівняння (2.1) за початкових умов

$$u_i(0,M)=\Phi_i(M),\quad u_{i_t}(0,M)=\Psi_i(M),\quad M\in\mathbf{E}_2,\quad i=1,2,$$

де $\Phi_i(M)\in C^3(\mathbf{E}_2)$, $\Psi_i(M)\in C^2(\mathbf{E}_2)$, $i=1,2$. Тоді $\forall\varepsilon>0$, $t_1>0$ $\exists\delta=\delta(\varepsilon,t_1)>0$, що як тільки $|\Phi_1(M)-\Phi_2(M)|<\delta$, $|\Phi_{1_x}(M)-\Phi_{2_x}(M)|<\delta$, $|\Phi_{1_y}(M)-\Phi_{2_y}(M)|<\delta$, $|\Psi_1(M)-\Psi_2(M)|<\delta$ при $M\in\mathbf{E}_2$, то виконується нерівність

$$|u_1(t,M)-u_2(t,M)|<\varepsilon,\ \forall t\le t_1,\ M\in\mathbf{E}_2.$$

Із формули (2.3) очевидно випливає, що принцип Гюйґенса у випадку площини не має сили.
Зведемо формулу Пуассона (2.3) до вигляду, зручного для практичного застосування.
Для цього спочатку перейдемо в інтегралах у правій частині рівності (2.3) від круга $\mathbf{K}_{at}(M)$ до одиничного круга з центром у початку координат $\mathbf{K}_1(0)$: $\alpha^2+\beta^2\le1$ шляхом підстановок

$$\alpha=\frac{\xi-x}{at},\quad \beta=\frac{\eta-y}{at}\quad (d\xi=at\,d\alpha,\ \ d\eta=at\,d\beta).$$

Тоді з (2.3) одержимо:

$$u(t,M)=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{\mathbf{K}_1(0)}\frac{t\Phi(x+at\alpha,y+at\beta)d\alpha d\beta}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\mathbf{K}_1(0)}\frac{t\Psi(x+at\alpha,y+at\beta)d\alpha d\beta}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}. \tag{2.4}$$

Перейдемо тепер до полярних координат за формулами:

$$\alpha=\rho\cos\varphi,\ \ \beta=\rho\sin\varphi,\ \ d\alpha d\beta=\begin{vmatrix}\alpha_\rho & \alpha_\varphi\\ \beta_\rho & \beta_\varphi\end{vmatrix}d\rho d\varphi=\rho\,d\rho\,d\varphi\quad(0\le\rho\le1,\ \ 0\le\varphi<2\pi).$$

За таких замін із (2.4) дістанемо ***формулу Пуассона у полярних координатах***

$$u(t,M)=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\frac{t\rho\Phi(x+at\rho\cos\varphi,y+at\rho\sin\varphi)d\varphi d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\frac{t\rho\Psi(x+at\rho\cos\varphi,y+at\rho\sin\varphi)d\varphi d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}. \tag{2.5}$$

Застосовуючи принцип Дюгамеля, можна переконатися, що розв'язок задачі Коші для рівняння вимушених коливань мембрани

$$u_{tt}=a^2\Delta u(t,M)+f(t,M),\quad t>0,\quad M=M(x,y)\in\mathbf{E}_2,$$
$$u(0,M)=0,\quad u_t(0,M)=0,\quad M\in\mathbf{E}_2,$$

де $f(t,M)\in C^2(\mathbf{D})$, подається формулою

$$u(t,M)=\frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^t\iint\limits_{\mathbf{K}_{a(t-\tau)}(M)}\frac{f(\tau,\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}d\tau, \tag{2.6}$$

де $\mathbf{K}_{a(t-\tau)}(M)$ – круг радіуса $a(t-\tau)$ з центром у точці $M(x,y)$.
Якщо в інтегралі (2.6) перейти до полярних координат аналогічно до формули Пуассона (2.3), то одержимо формулу для практичного використання:

$$u(t,M)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\frac{\rho(t-\tau)f[\tau,x+a(t-\tau)\rho\cos\varphi,y+a(t-\tau)\rho\sin\varphi]d\varphi d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}d\tau.$$

Приклад 2.1. Знайти закон вільних коливань однорідної необмеженої мембрани, якщо ці коливання відбуваються тільки за рахунок початкового зміщення точок мембрани, яке описується функцією x^2y.

Розв'язання. Математичною моделлю задачі є задача Коші для рівняння вільних коливань однорідної мембрани

$$u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}),\quad t>0,\quad (x,y)\in\mathbf{E}_2,$$
$$u(0,x,y)=x^2y,\quad u_t(0,x,y)=0,\quad (x,y)\in\mathbf{E}_2.$$

Зауважимо, що метод спуску тут застосувати не можна. Обчислимо розв'язок шляхом безпосередньої підстановки початкових функцій $\Phi(M)=x^2y$, $\Psi(M)=0$ у формулу Пуассона (2.5). Маємо:

$$u(t,x,y)=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\frac{t\rho(x+at\rho\cos\varphi)^2(y+at\rho\sin\varphi)d\varphi d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^1\frac{t\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\int\limits_0^{2\pi}(x+at\rho\cos\varphi)^2(y+at\rho\sin\varphi)d\varphi d\rho=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^1\frac{t\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\left[2\pi x^2y+\pi y(at\rho)^2\right]d\rho=$$

$$=\int_0^1 \frac{x^2 y\rho d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} + \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{y(at)^2 \rho^3 d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} =$$

$$= -x^2 y\sqrt{1-\rho^2}\Big|_0^1 + \frac{3}{2} y(at)^2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{[1-(1-\rho^2)]d\rho^2}{\sqrt{1-\rho^2}} =$$

$$= x^2 y + (at)^2 y.$$

Джерело:

[1] *Перестюк М. О., Маринець В. В.* Теорія рівнянь математичної фізики. – К.: Либідь, 2001. – С. 49-61.