

До Модуля 3

Індивідуальні завдання №6 до розділу:

СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Постановка завдань:

1. Розв'язати лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь методом Ейлера.
2. Знайти загальний розв'язок лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь.
3. Розв'язати лінійну неоднорідну систему диференціальних рівнянь методом варіації сталих (Лагранжа).
4. Побудувати загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь методом невизначених коефіцієнтів (числові значення коефіцієнтів не знаходити).
5. Знайти експоненту матриці.

Варіант 1

1. $\dot{X} = AX$, $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - y - z, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = 2x - z. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^t, \\ \dot{y} = x + t^2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = x + z - y + e^t, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = 2x - y + t. \end{cases}$ 5. $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Варіант 2

1. $\dot{X} = AX$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - z, \\ \dot{y} = -x - 3z, \\ \dot{z} = 2x - y - z. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} \dot{x} = y - 5\cos t, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z, \\ \dot{y} = y - x + z + e^{-t} \sin 2t, \\ \dot{z} = x - z. \end{cases}$ 5. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Варіант 3

1. $\dot{X} = AX$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{cases} \dot{x} = -x - y - z, \\ \dot{y} = -x - 2z, \\ \dot{z} = x. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y + 4e^{5t}, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z - 3t \cos t, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \\ \dot{z} = x - y + 2z + 2e^{2t}. \end{cases}$ 5. $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Варіант 4

$$1. \dot{X} = AX, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \quad 2. \begin{cases} \dot{x} = -y - z, \\ \dot{y} = -x + z, \\ \dot{z} = 2x - z. \end{cases} \quad 3. \begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y + 4e^{-2t}, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = 3x - y + z, \\ \dot{y} = x + y + z - 2t + 1, \\ \dot{z} = 4x - y + 4z. \end{cases} \quad 5. A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Варіант 5

$$1. \dot{X} = AX, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad 2. \begin{cases} \dot{x} = x - y - z, \\ \dot{y} = x + y, \\ \dot{z} = 3x + z. \end{cases} \quad 3. \begin{cases} \dot{x} = 4x + y - e^{2t}, \\ \dot{y} = y - 2x. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = 4y - 2z - 3x + \sin t, \\ \dot{y} = z + x - t \cos t, \\ \dot{z} = 6x - 6y + 5z. \end{cases} \quad 5. A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 6

$$1. \dot{X} = AX, A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad 2. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = x + 3y - z, \\ \dot{z} = 2y + 3z - x. \end{cases} \quad 3. \begin{cases} \dot{x} = 2y - x + 1, \\ \dot{y} = 3y - 2x. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = x - y - z, \\ \dot{y} = x + y - t e^t \sin 2t, \\ \dot{z} = 3x + z. \end{cases} \quad 5. A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Варіант 7

$$1. \dot{X} = AX, A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad 2. \begin{cases} \dot{x} = 2x + 2z - y, \\ \dot{y} = x + 2z, \\ \dot{z} = y - 2x - z. \end{cases} \quad 3. \begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ \dot{y} = x + y + 5e^{-t}. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y - 5t^2, \\ \dot{y} = x + 3y - z, \\ \dot{z} = 2y + 3z - x + 1. \end{cases} \quad 5. A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 8

$$1. \dot{X} = AX, A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}. \quad 2. \begin{cases} \dot{x} = y + z, \\ \dot{y} = x + z, \\ \dot{z} = 2x + 2y + z. \end{cases} \quad 3. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y + e^t, \\ \dot{y} = -2x + 2t. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = 2x + 2z - y + 2\sin t, \\ \dot{y} = x + 2z + 5t, \\ \dot{z} = y - 2x - z. \end{cases} \quad 5. A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вариант 9

$$1. \dot{X} = AX, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad 2. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \\ \dot{y} = x - z, \\ \dot{z} = 3x - y - 2z. \end{cases} \quad 3. \begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = x - 5\sin t. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = 4x - y - z, \\ \dot{y} = x + 2y - z + 7e^{3t}, \\ \dot{z} = x - y + 2z - \cos 4t. \end{cases} \quad 5. A = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 10

$$1. \dot{X} = AX, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad 2. \begin{cases} \dot{x} = x - 2y + 2z, \\ \dot{y} = x + 4y - 2z, \\ \dot{z} = x + 5y - 3z. \end{cases} \quad 3. \begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y, \\ \dot{y} = x - 3y + 3e^t. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3z + t - 1, \\ \dot{z} = 2z - x + y. \end{cases} \quad 5. A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вариант 11

$$1. \dot{X} = AX, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad 2. \begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + 2z, \\ \dot{y} = -2x - y + 2z, \\ \dot{z} = -3x - 2y + 3z. \end{cases} \quad 3. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = y - 2x + 18t. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = y - 2x - 2z, \\ \dot{y} = x - 2y + 2z + 3\sin t + 1, \\ \dot{z} = 3x - 3y + 5z. \end{cases} \quad 5. A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 12

$$1. \dot{X} = AX, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}. \quad 2. \begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y + 2z, \\ \dot{y} = -3x - y + z, \\ \dot{z} = -x + 2y. \end{cases} \quad 3. \begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 16te^t, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y - z - t \cos t, \\ \dot{y} = 3x - 4y - 3z - e^{2t}, \\ \dot{z} = 2x - 4y. \end{cases} \quad 5. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Варіант 13

$$1. \dot{X} = AX, A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & -6 & 5 \end{pmatrix}. \quad 2. \begin{cases} \dot{x} = 3x - 3y + z, \\ \dot{y} = 3x - 2y + 2z, \\ \dot{z} = -x + 2y. \end{cases} \quad 3. \begin{cases} \dot{x} = 2x + 4y - 8, \\ \dot{y} = 3x + 6y. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = x - y + z, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = 2z - y + 3t^2 + 2t + 1. \end{cases} \quad 5. A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Варіант 14

$$1. \dot{X} = AX, A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad 2. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y - z, \\ \dot{y} = -x + z, \\ \dot{z} = x + y. \end{cases} \quad 3. \begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y, \\ \dot{y} = x - 2y + 2\sin t. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = y - 2z - x, \\ \dot{y} = 4x + y + e^{-t}, \\ \dot{z} = 2x + y - z - \cos 2t. \end{cases} \quad 5. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 15

$$1. \dot{X} = AX, A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad 2. \begin{cases} \dot{x} = y + z, \\ \dot{y} = x + z, \\ \dot{z} = 2x + 2y + z. \end{cases} \quad 3. \begin{cases} \dot{x} = x - y + 2\sin t, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 2y + 4z + 3t, \\ \dot{z} = x - z - 2e^{3t}. \end{cases} \quad 5. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Варіант 16

$$1. \dot{X} = AX, A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}. \quad 2. \begin{cases} \dot{x} = y + z, \\ \dot{y} = x + y, \\ \dot{z} = z - x. \end{cases} \quad 3. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x + 2e^t. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z + t \cos 3t, \\ \dot{y} = 2x - y - 2z, \\ \dot{z} = 2z - x + y - 2\sin 3t. \end{cases} \quad 5. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 17

$$1. \dot{X} = AX, A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}. \quad 2. \begin{cases} \dot{x} = -2x + y + 2z, \\ \dot{y} = -x + 2z, \\ \dot{z} = -2x + 3z. \end{cases} \quad 3. \begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y + \sin t, \\ \dot{y} = 2x - y - 2\cos t. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = 4x - y + e^{4t}, \\ \dot{y} = 3x + y - z, \\ \dot{z} = x + z - 7te^{2t}. \end{cases} \quad 5. A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 18

$$1. \dot{X} = AX, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad 2. \begin{cases} \dot{x} = y - z, \\ \dot{y} = x - z, \\ \dot{z} = 2x + 2y - 3z. \end{cases} \quad 3. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 2e^t, \\ \dot{y} = x + 2y - 3e^{4t}. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = 4x + 2y - 2z + 4, \\ \dot{y} = x + 3y - z, \\ \dot{z} = 3x + 3y - z - 2t. \end{cases} \quad 5. A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Варіант 19

$$1. \dot{X} = AX, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad 2. \begin{cases} \dot{x} = 2x - z, \\ \dot{y} = x - y, \\ \dot{z} = 3x - y - z. \end{cases} \quad 3. \begin{cases} \dot{x} = x - y + 8t, \\ \dot{y} = 5x - y. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = y + e^{-t} \sin t, \\ \dot{y} = x, \\ \dot{z} = z. \end{cases} \quad 5. A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 20

$$1. \dot{X} = AX, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad 2. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 2y + z, \\ \dot{z} = 2z. \end{cases} \quad 3. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 2y - x - 5e^t \sin t. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = x + 3z + te^t \cos 3t, \\ \dot{y} = -x + 2y + 3z - 2 \sin 3t, \\ \dot{z} = y - z. \end{cases} \quad 5. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Варіант 21

$$1. \dot{X} = AX, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad 2. \begin{cases} \dot{x} = x + 4y + 2z, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = 2x + y - 3z. \end{cases} \quad 3. \begin{cases} \dot{x} = y + \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ \dot{y} = -x + \operatorname{tg} t. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y - z - t \cos t, \\ \dot{y} = 3x - 4y - 3z - e^{2t}, \\ \dot{z} = 2x - 4y. \end{cases} \quad 5. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Варіант 22

$$1. \dot{X} = AX, A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad 2. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \\ \dot{y} = x - z, \\ \dot{z} = 3x - y - 2z. \end{cases} \quad 3. \begin{cases} \dot{x} = 2y - x, \\ \dot{y} = 4y - 3x + \frac{e^{3t}}{e^{2t} + 1}. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = x + z - y + e^t, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = 2x - y + t. \end{cases} \quad 5. A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 23

$$1. \dot{X} = AX, A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad 2. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y - z, \\ \dot{y} = -x + z, \\ \dot{z} = x + y. \end{cases} \quad 3. \begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + \frac{2}{e^t - 1}, \\ \dot{y} = 6x + 3y - \frac{3}{e^t - 1}. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z + t \cos t, \\ \dot{y} = 2x - y - 2z, \\ \dot{z} = 2z - x + y - 2e^{3t}. \end{cases} \quad 5. A = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 24

$$1. \dot{X} = AX, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \quad 2. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \\ \dot{y} = x - z, \\ \dot{z} = 3x - y - 2z. \end{cases} \quad 3. \begin{cases} \dot{x} = -x - y + \frac{1}{\cos t}, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = x - y - z, \\ \dot{y} = x + y - t e^t \sin 2t, \\ \dot{z} = 3x + z. \end{cases} \quad 5. A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 25

$$1. \dot{X} = AX, A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad 2. \begin{cases} \dot{x} = y + z, \\ \dot{y} = x + y, \\ \dot{z} = z - x. \end{cases} \quad 3. \begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 2x - y + 15e^t \sqrt{t}. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z - 3t \cos t, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \\ \dot{z} = x - y + 2z + 2e^{2t}. \end{cases} \quad 5. A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Джерело: Рего В. Л., Варга Я. В., Король І. І. Диференціальні рівняння вищих порядків. Системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. – Навчальний посібник із курсу «Диференціальні рівняння», частина II. – Ужгород: 2022. – С. 68-120.