

До Модуля 2

Індивідуальні завдання №3 до розділів:

**ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ ТА ЇХ
ЗАСТОСУВАННЯ. СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ**

Варіант 1

1. Знайти загальний розв'язок рівняння: $y'' + y = \operatorname{ctg} x$.
2. Розв'язати задачу Коші: $y'' - 9y' + 20y = e^{6x}$, $y(0) = y'(0) = 1$.
3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь методом Ейлера:

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - y - z, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = 2x - z. \end{cases}$$

4. Побудувати загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь методом невизначених коефіцієнтів (значення коефіцієнтів не знаходити):

$$\begin{cases} \dot{x} = x + z - y + e^t, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = 2x - y + t. \end{cases}$$

5. В електричному колі послідовно включені: джерело струму, напруга якого змінюється за законом $E = 6 \sin 3t$, самоіндукція $L = 1$ Гн, і конденсатор ємності $C = 0,25$ Ф, заряд якого в початковий момент часу $t = 0$ рівний $q_0 = 0,5$ Кл. Знайти силу струму в колі при $t > 0$ (усталений режим).

Варіант 2

1. Знайти загальний розв'язок рівняння: $y'' - y = \frac{e^x}{1 + e^x}$.
2. Розв'язати задачу Коші: $y'' + y = 4e^x$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -3$.
3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь методом Ейлера:

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - z, \\ \dot{y} = -x - 3z, \\ \dot{z} = 2x - y - z. \end{cases}$$

4. Побудувати загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь методом невизначених коефіцієнтів (значення коефіцієнтів не знаходити):

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z, \\ \dot{y} = y - x + z + e^{-t} \sin 2t, \\ \dot{z} = x - z. \end{cases}$$

5. Частинка маси m рухається по осі Ox , відштовхуючись від точки $x = 0$ з силою $3mr_0$ і притягуючись до точки $x = 1$ із силою $4mr_1$, де r_0 і r_1 – відстані до цих точок. Визначити рух частинки за початкових умов $x(0) = 2$, $\dot{x}(0) = 0$.

Варіант 3

1. Знайти загальний розв'язок рівняння: $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$.
2. Розв'язати задачу Коші: $y'' - 2y' = 2e^x$, $y(1) = -1$, $y'(1) = 0$.
3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь методом Ейлера:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - y - z, \\ \dot{y} = -x - 2z, \\ \dot{z} = x. \end{cases}$$

4. Побудувати загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь методом невизначених коефіцієнтів (значення коефіцієнтів не знаходити):

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z - 3t \cos t, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \\ \dot{z} = x - y + 2z + 2e^{2t}. \end{cases}$$

5. В електричному колі послідовно включені: джерело струму, напруга якого змінюється за законом $E = 4 \cos t$, опір $R = 2$ Ом, самоіндукція $L = 1$ Гн, і конденсатор ємності $C = 0,5$ Ф, заряд якого в початковий момент часу $t = 0$ рівний $q_0 = 0,1$ Кл. Знайти закони зміни сили струму в колі і заряду конденсатора при $t > 0$.

Варіант 4

1. Знайти загальний розв'язок рівняння: $x^3 y''' + 8x^2 y'' + 12xy' = \ln x$.
2. Розв'язати задачу Коші: $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}$, $y(0) = y'(0) = 0$.
3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь методом Ейлера:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z, \\ \dot{y} = -x + z, \\ \dot{z} = 2x - z. \end{cases}$$

4. Побудувати загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь методом невизначених коефіцієнтів (значення коефіцієнтів не знаходити):

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + z, \\ \dot{y} = x + y + z - 2t + 1, \\ \dot{z} = 4x - y + 4z. \end{cases}$$

5. Один кінець пружини закріплений нерухомо, а до другого прикріплена гиря маси m . При русі гирі зі швидкістю v сила опору рівна hv . При відхиленні гирі від положення рівноваги на відстань x пружина діє на неї з силою kx , напрямленою до положення рівноваги. До гирі додатково прикладена періодична зовнішня сила $f = b \sin \omega t$ ($h, k, b, \omega = \text{const} > 0$). Показати, що за будь-яких початкових умов рух гирі наблизатиметься до періодичного і знайти цей періодичний рух (вимушені коливання).

Варіант 5

1. Знайти загальний розв'язок рівняння: $y'' - 6y' + 9y = \frac{9x^2 + 6x + 2}{x^3}$.
2. Розв'язати задачу Коші: $y''' - y' = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 1$.
3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь методом Ейлера:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - z, \\ \dot{y} = x + y, \\ \dot{z} = 3x + z. \end{cases}$$

4. Побудувати загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь методом невизначених коефіцієнтів (значення коефіцієнтів не знаходити):

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y - 2z - 3x + \sin t, \\ \dot{y} = z + x - t \cos t, \\ \dot{z} = 6x - 6y + 5z. \end{cases}$$

5. Електричне коло складається з послідовно включених: джерела струму, яке дає напругу $V = \text{const}$, опору R , конденсатора ємності C ($R, C = \text{const} > 0$), заряд якого в початковий момент часу $t = 0$ рівний q_0 , і вимикача, який вмикається при $t = 0$. Знайти залежність сили струму і заряду конденсатора від часу при $t > 0$.

Варіант 6

1. Знайти загальний розв'язок рівняння: $x^2 y'' + xy' + 4y = 10x$.
2. Розв'язати задачу Коші: $y''' - 3y' - 2y = 9e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -3$, $y''(0) = 3$.
3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь методом Ейлера:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = x + 3y - z, \\ \dot{z} = 2y + 3z - x. \end{cases}$$

4. Побудувати загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь методом невизначених коефіцієнтів (значення коефіцієнтів не знаходити):

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - z, \\ \dot{y} = x + y - t e^t \sin 2t, \\ \dot{z} = 3x + z. \end{cases}$$

5. Частинка маси m рухається по осі Ox , відштовхуючись від точки $x = 0$ з силою $4mr_0$ і притягуючись до точки $x = -2$ із силою $8mr_1$, де r_0 і r_1 – відстані до цих точок. Визначити рух частинки за початкових умов $x(0) = -5$, $\dot{x}(0) = 1$.

Варіант 7

1. Знайти загальний розв'язок рівняння: $x^3 y'' - 2xy' = 6 \ln x$.
2. Розв'язати задачу Коші: $y^{(4)} + y'' = 2 \cos x$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = y'''(0) = 0$.
3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь методом Ейлера:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2z - y, \\ \dot{y} = x + 2z, \\ \dot{z} = y - 2x - z. \end{cases}$$

4. Побудувати загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь методом невизначених коефіцієнтів (значення коефіцієнтів не знаходити):

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - 5t^2, \\ \dot{y} = x + 3y - z, \\ \dot{z} = 2y + 3z - x + 1. \end{cases}$$

5. Електричне коло складається з послідовно включених: джерела струму, яке дає напругу $V = \text{const}$, опору R , самоіндукції L ($R, L = \text{const} > 0$), і вимикача, який вмикається при $t = 0$. Знайти залежність сили струму від часу при $t > 0$. Обчислити падіння напруги на резисторі U_R і котушці індуктивності U_L .

Варіант 8

1. Знайти загальний розв'язок рівняння: $x^2 y'' - 3xy' + 5y = 3x^2$.
2. Розв'язати задачу Коші: $y'' - 4y = e^{2x}(11 \cos x - 7 \sin x)$, $y(0) = y'(0) = 1$.
3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь методом Ейлера:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + z, \\ \dot{y} = x + z, \\ \dot{z} = 2x + 2y + z. \end{cases}$$

4. Побудувати загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь методом невизначених коефіцієнтів (значення коефіцієнтів не знаходити):

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2z - y + 2 \sin t, \\ \dot{y} = x + 2z + 5t, \\ \dot{z} = y - 2x - z. \end{cases}$$

5. На кінці пружного стрижня закріплена маса m . Другий кінець стрижня вібрує так, що його зміщення в момент часу t рівне $B \sin \omega t$ ($B, \omega = \text{const} > 0$). Сила пружності, що виникає в стрижні, пропорційна різниці зміщень його кінців. Знайти амплітуду A вимушених коливань маси m , нехтуючи масою стрижня й тертям.

Варіант 9

1. Знайти загальний розв'язок рівняння: $x^2 y'' - 6y = 5x^3 + 8x^2$.
2. Розв'язати задачу Коші: $y'' - 9y = e^{3x} \cos x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь методом Ейлера:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \\ \dot{y} = x - z, \\ \dot{z} = 3x - y - 2z. \end{cases}$$

4. Побудувати загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь методом невизначених коефіцієнтів (значення коефіцієнтів не знаходити):

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y - z, \\ \dot{y} = x + 2y - z + 7e^{3t}, \\ \dot{z} = x - y + 2z - \cos 4t. \end{cases}$$

5. В електричному колі послідовно включені: джерело струму, напруга якого змінюється за законом $\varepsilon = V \sin \omega t$, де V, ω – задані додатні сталі, опір R і ємність C ($R, C = \text{const} > 0$). Знайти силу струму в колі (усталений режим).

Варіант 10

1. Знайти загальний розв'язок рівняння: $x^2 y'' - 2y = \sin \ln x$.
2. Розв'язати задачу Коші: $y'' - 4y' + 4y = x e^x$, $y(0) = y'(0) = 0$.
3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь методом Ейлера:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y + 2z, \\ \dot{y} = x + 4y - 2z, \\ \dot{z} = x + 5y - 3z. \end{cases}$$

4. Побудувати загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь методом невизначених коефіцієнтів (значення коефіцієнтів не знаходити):

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3z + t - 1, \\ \dot{z} = 2z - x + y. \end{cases}$$

5. Знайти період вільних коливань маси m , підвішеної на пружині, якщо за відхилення вантажу від положення рівноваги на відстань y пружина діє на нього з силою ky , напрямленою до положення рівноваги, і рух відбувається без опору.

Варіант 11

1. Знайти загальний розв'язок рівняння: $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$.
2. Розв'язати задачу Коші: $x^2 y'' + 3xy' + 2y = 34x^3$, $y(1) = y'(1) = 1$.
3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь методом Ейлера:

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y + 2z, \\ \dot{y} = -3x - y + z, \\ \dot{z} = -x + 2y. \end{cases}$$

4. Побудувати загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь методом невизначених коефіцієнтів (значення коефіцієнтів не знаходити):

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y - z - t \cos t, \\ \dot{y} = 3x - 4y - 3z - e^{2t}, \\ \dot{z} = 2x - 4y. \end{cases}$$

5. В електричному колі послідовно включені: джерело струму, напруга якого змінюється за законом $\varepsilon = V \sin \omega t$, де V , ω – задані додатні сталі, опір R і самоіндукція L ($R, L = \text{const} > 0$). Знайти силу струму в колі (усталений режим).

Варіант 12

1. Знайти загальний розв'язок рівняння: $y'' + 4y = 2 \operatorname{tg} x$.
2. Розв'язати задачу Коші: $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}$, $y(0) = y'(0) = 1$.
3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь методом Ейлера:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + 2z, \\ \dot{y} = -2x - y + 2z, \\ \dot{z} = -3x - 2y + 3z. \end{cases}$$

4. Побудувати загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь методом невизначених коефіцієнтів (значення коефіцієнтів не знаходити):

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 2x - 2z, \\ \dot{y} = x - 2y + 2z + 3\sin t + 1, \\ \dot{z} = 3x - 3y + 5z. \end{cases}$$

5. Один кінець пружини закріплений нерухомо, а до другого прикріплена гиря маси m . За відхилення гирі від положення рівноваги на відстань y пружина діє на неї з силою ky , напрямленою до положення рівноваги. За руху гирі зі швидкістю v сила опору рівна hv ($h, k = \text{const} > 0$). У момент часу $t = 0$ гирі, що перебувала у положенні рівноваги, була надана початкова швидкість v_0 . Дослідити рух гирі у випадку $h^2 < 4km$.

Варіант 13

1. Знайти загальний розв'язок рівняння: $y'' + 2y' + y = 3e^{-x} \sqrt{x+1}$.
2. Розв'язати задачу Коші: $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}$, $y(0) = y'(0) = 1$.
3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь методом Ейлера:

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 3y + z, \\ \dot{y} = 3x - 2y + 2z, \\ \dot{z} = -x + 2y. \end{cases}$$

4. Побудувати загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь методом невизначених коефіцієнтів (значення коефіцієнтів не знаходити):

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + z, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = 2z - y + 3t^2 + 2t + 1. \end{cases}$$

5. В електричному колі послідовно включені: джерело струму, напруга якого змінюється за законом $E = 4\cos 2t$, самоіндукція $L = 1$ Гн, і конденсатор ємності $C = 0,04$ Ф, заряд якого в початковий момент часу $t = 0$ рівний $q_0 = 0,1$ Кл. Знайти силу струму в колі при $t > 0$ (усталений режим).

Варіант 14

1. Знайти загальний розв'язок рівняння: $y'' + y = 2\sec^3 x$.
2. Розв'язати задачу Коші: $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь методом Ейлера:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - z, \\ \dot{y} = -x + z, \\ \dot{z} = x + y. \end{cases}$$

4. Побудувати загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь методом невизначених коефіцієнтів (значення коефіцієнтів не знаходити):

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 2z - x, \\ \dot{y} = 4x + y + e^{-t}, \\ \dot{z} = 2x + y - z - \cos 2t. \end{cases}$$

5. Частинка маси m рухається по осі Ox , відштовхуючись від точки $x = 2$ з силою $2mr_0$ і притягуючись до точки $x = 1$ із силою $6mr_1$, де r_0 і r_1 – відстані до цих точок. Визначити рух частинки за початкових умов $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$.

Варіант 15

1. Знайти загальний розв'язок рівняння: $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{3x}}{1 + e^x}$.

2. Розв'язати задачу Коші: $y'' + y = 4e^x$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -3$.

3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь методом Ейлера:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + z, \\ \dot{y} = x + z, \\ \dot{z} = 2x + 2y + z. \end{cases}$$

4. Побудувати загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь методом невизначених коефіцієнтів (значення коефіцієнтів не знаходити):

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 2y + 4z + 3t, \\ \dot{z} = x - z - 2e^{3t}. \end{cases}$$

5. В електричному колі послідовно включені: джерело струму, напруга якого змінюється за законом $E = 0,4 \sin 5t$, опір $R = 1$ Ом, самоіндукція $L = 1$ Гн, і конденсатор ємності $C = 0,1$ Ф, заряд якого в початковий момент часу $t = 0$ рівний $q_0 = 0,05$ Кл. Знайти закони зміни сили струму в колі і заряду конденсатора при $t > 0$.

Варіант 16

1. Знайти загальний розв'язок рівняння: $x^3 y''' - xy' - 3y = x^2$.

2. Розв'язати задачу Коші: $y'' + y = 4e^x$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -3$.

3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь методом Ейлера:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + z, \\ \dot{y} = x + y, \\ \dot{z} = z - x. \end{cases}$$

4. Побудувати загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь методом невизначених коефіцієнтів (значення коефіцієнтів не знаходити):

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z + t \cos 3t, \\ \dot{y} = 2x - y - 2z, \\ \dot{z} = 2z - x + y - 2 \sin 3t. \end{cases}$$

5. Один кінець пружини закріплений нерухомо, а до другого прикріплена гиря маси m . За відхилення гирі від положення рівноваги на відстань y пружина діє на неї з силою ky , напрямленою до положення рівноваги. За руху гирі зі швидкістю v сила опору рівна hv ($h, k = \text{const} > 0$). У момент часу $t = 0$ гирі, що перебувала у положенні рівноваги, була надана початкова швидкість v_0 . Дослідити рух гирі у випадку $h^2 > 4km$.