Курс: «Диференціальні рівняння та їх застосування» (СО2-М2) **ст. викл. Рего В. Л.**
До Модуля 1
Індивідуальні завдання №1 до розділу:

РІВНЯННЯ З ВІДОКРЕМЛЮВАНИМИ ЗМІННИМИ. НЕЛІНІЙНІ ОДНОРІДНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Постановка завдань:

1. За допомогою ізоклін побудувати інтегральні криві диференціального рівняння.
2. Розв'язати рівняння (за наявності початкової умови – задачу Коші для заданого рівняння) шляхом відокремлення змінних або попереднього зведення заданого рівняння до рівняння з відокремлюваними змінними.
3. Знайти розв'язок однорідного диференціального рівняння.
4. Розв'язати рівняння, попередньо звівши його до однорідного.
5. Розв'язати задачу шляхом інтегрування відповідної диференціальної моделі.

Варіант 1

1. $y' = \mathrm{tg}(y - x^3)$. **2.** $x^2y^2y' + 1 = y$. **3.** $y' = \dfrac{xy + y^2 \mathrm{e}^{-\frac{x}{y}}}{x^2}$.
4. $(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0$.
5. Знайти криві, у яких піддотична дорівнює сумі абсциси та ординати точки дотику.

Варіант 2

1. $y' = y + \mathrm{e}^{x-1}$. **2.** $xydx + (x+1)dy = 0$. **3.** $\left(y + \sqrt{x^2 - y^2}\right)dx - xdy = 0$.
4. $8x + 4y + 1 + (4x + 2y + 1)y' = 0$.
5. Визначити криві, у яких піддотична є середнім арифметичним координат точки дотику.

Варіант 3

1. $y' = y - x^2 - 2x - 1$. **2.** $\sqrt{y^2 + 1}dx = xydy$. **3.** $\left(x - y - \sqrt{xy}\right)dx + \sqrt{xy}dy = 0$.
4. $(x - 2y - 1)dx + (3x - 6y + 2)dy = 0$.
5. Знайти криві, у яких піднормаль дорівнює різниці між радіус-вектором та абсцисою точки дотику.

Варіант 4

1. $y' = \cos(y - x^2 + 1)$. **2.** $z' = 10^{x+z}$. **3.** $\left(xy\mathrm{e}^{\frac{x}{y}} + y^2\right)dx - x^2\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}dy = 0$.
4. $(x + y)dx + (x + y - 1)dy = 0$.
5. Знайти криві, у яких трикутник, утворюваний віссю Oy, дотичною та радіус-вектором точки дотику, є рівнобічним.

Варіант 5

1. $xy' + y = 0$. **2.** $y'\operatorname{ctg} x + y = 2$, $y(-1) = 0$. **3.** $\left(x\operatorname{ctg}\frac{y}{x} - y\right)dx + xdy = 0$.

4. $(x + 2y + 1)dx + (2x + 4y + 3)dy = 0$.

5. Визначити криву, яка проходить через початок координат і поділяє прямокутник, утворений координатними осями та перпендикулярами, опущеними на них із будь-якої точки кривої, у відношенні 2:1.

Варіант 6

1. $y' = 2x$. **2.** $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$, $y(2) = 8$. **3.** $\left(2\sqrt{xy} - y\right)dx - xdy = 0$.

4. $(x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$.

5. Знайти криві, у яких трикутник, утворюваний нормаллю в будь-якій її точці з осями координат, рівновеликий із трикутником, утворюваним віссю абсцис, дотичною та нормаллю.

Варіант 7

1. $xy' = 2y$. **2.** $xy' + y = y^2$, $y(1) = \frac{1}{2}$. **3.** $\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\frac{y}{x}dy = 0$.

4. $x - y - 1 + (y - x + 2)y' = 0$.

5. Знайти криві, у яких нормаль збігається з радіус-вектором точки дотику.

Варіант 8

1. $y' = 2x(1 - y)$. **2.** $2x^2yy' + y^2 = 2$. **3.** $xy' - y = (x + y)\ln\frac{x + y}{x}$.

4. $(y - 1)dx + (2x + y + 1)dy = 0$.

5. Знайти криві, у яких піддотична дорівнює довжині радіус-вектора точки дотику.

Варіант 9

1. $(x - y)y' = x + y$. **2.** $y' - xy^2 = 2xy$. **3.** $xy' = y\cos\ln\frac{y}{x}$.

4. $(2y + 3)dx + (x + y - 3)dy = 0$.

5. Знайти криві, у яких точка перетину будь-якої дотичної з віссю абсцис має абсцису, вдвічі меншу за абсцису точки дотику.

Варіант 10

1. $y' = y - x^2$. **2.** $e^{-s}\left(1 + \frac{ds}{dt}\right) = 1$. **3.** $xy' - y = x\operatorname{tg}\frac{y}{x}$.

4. $(y + 2)dx + (y - 2x - 2)dy = 0$.

5. Знайти криві, у яких трикутник, утворюваний нормаллю в будь-якій її точці з осями координат, рівновеликий із трикутником, утворюваним віссю Ox, дотичною та нормаллю.

Варіант 11

1. $2(y+y')=x+3$. **2.** $(x^2-1)y'+2xy^2=0$, $y(0)=1$. **3.** $\left(y+\sqrt{xy}\right)dx=xdy$.

4. $(2y-1)dx+(2x+y+1)dy=0$.

5. Визначити криві, усі дотичні до яких проходять через початок координат.

Варіант 12

1. $y'=\dfrac{x^2+y^2}{2}-1$. **2.** $y'\sin x-y\cos x=0$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$. **3.** $(3x-2y)dx+(y-2x)dy=0$.

4. $(3x+2y-1)dx+(x+1)dy=0$.

5. Знайти криві, у яких трикутник, утворюваний нормаллю в будь-якій її точці з осями координат, рівновеликий із трикутником, утворюваним віссю абсцис, дотичною та нормаллю.

Варіант 13

1. $(y^2+1)y'=y-x$. **2.** $\mathrm{e}^x\sin^3 y+(1+\mathrm{e}^{2x})\cos y\cdot y'=0$. **3.** $(2y-2x)dx+(y-3x)dy=0$.

4. $(2-x-y)dx+(2x-1)dy=0$.

5. Знайти криві, у яких трикутник, утворюваний віссю *Oy*, дотичною та радіус-вектором точки дотику, є рівнобічним.

Варіант 14

1. $yy'+x=0$. **2.** $x\sin y=y'(1+x^2)\cos y$, $y(1)=\dfrac{\pi}{4}$. **3.** $(5x+3y)dx+(x+y)dy=0$.

4. $(x-2y+4)dx+(3x-2)dy=0$.

5. Визначити криву, яка проходить через початок координат і поділяє прямокутник, утворений координатними осями та перпендикулярами, опущеними на них із будь-якої точки кривої, у відношенні 2:1.

Варіант 15

1. $xy'=2y$. **2.** $(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0$. **3.** $(13x+y)dx+(y-5x)dy=0$.

4. $(2x+y-2)dx+(2-2x)dy=0$.

5. Довести, що крива, усі нормалі до якої проходять через одну й ту ж фіксовану точку, є колом.

Варіант 16

1. $xy'+y=0$. **2.** $x^2y'-\cos 2y=1$. **3.** $(3x+2y)dx+xdy=0$.

4. $(2x+y+1)dx=(4x-y)dy$.

5. Знайти криві, у яких точка перетину будь-якої дотичної з віссю абсцис має абсцису, вдвічі меншу за абсцису точки дотику.

Варіант 17

1. $y'+y=(x-y')^3$. **2.** $3y^2y'+16x=2xy^3$. **3.** $(x-2y)dx+ydy=0$.

4. $(3x+y-1)dy=(2x+2y-1)dx$.

5. Знайти криві, для яких площа трикутника, утвореного дотичною, ординатою точки дотику та віссю абсцис, є величина стала, рівна a^2.

Варіант 18

1. $y' = x - e^y$. **2.** $x^2 y' \cos y + 1 = 0$. **3.** $y(y - 3x)dx + x(2x + y)dy = 0$.

4. $(5x + 2y)dx + (2x + y + 1)dy = 0$.

5. Знайти криві, для яких тангенс кута нахилу дотичної в будь-якій їх точці в n разів більший за тангенс кута нахилу прямої, що проходить через цю точку і початок координат.

Варіант 19

1. $y(y' + x) = 1$. **2.** $(1 + x^2)y' - \frac{1}{2}\cos^2 2y = 0$. **3.** $(3x^2 - 6xy + y^2)dx + 2x^2 dy = 0$.

4. $(2x - 3y + 1)dx + (x + y - 1)dy = 0$.

5. Знайти криву, яка проходить через точку (2,3) і має властивість: відрізок її довільної дотичної між осями координат ділиться в точці дотику навпіл.

Варіант 20

1. $y' = \dfrac{y - 3x}{x + 3y}$. **2.** $y' = 2x(\pi + y)$. **3.** $(x^2 - 2xy + 4y^2)dx + 2x^2 dy = 0$. **4.** $2y' + x = 4\sqrt{y}$.

5. Крива $y = \varphi(x)$ проходить через точку (1,1) і має властивість: тангенс кута нахилу будь-якої дотичної до неї прямо пропорційний квадрату ординати точки дотику. Знайти рівняння цієї кривої.

Варіант 21

1. $y' = \dfrac{y}{x + y}$. **2.** $x^2 y' + \sin 2y = 1$. **3.** $(y^2 + 4xy - 4x^2)dx - 4x^2 dy = 0$. **4.** $y' = y^2 - \dfrac{2}{x^2}$.

5. Крива $y = \varphi(x)$ проходить через точку (0,–2) і має властивість: тангенс кута нахилу дотичної до неї в будь-якій точці дорівнює ординаті цієї точки, збільшеній на три одиниці. Знайти рівняння цієї кривої.

Варіант 22

1. $x^2 + y^2 y' = 1$. **2.** $y' = \cos(y - x)$. **3.** $\left(y + y\ln\dfrac{y}{x}\right)dx + xdy = 0$.

4. $10x^3 y' = y(2x^2 - y^{10})$.

5. Знайти криву, яка проходить через точку (0,1) і має властивість: кутовий коефіцієнт будь-якої дотичної до неї дорівнює подвоєній абсцисі точки дотику.

Варіант 23

1. $(x^2 + y^2)y' = 4x$. **2.** $(x + y)^2 y' = a^2$, $a = const$.

3. $\left(xy + x^2 \sin\dfrac{y}{x}\right)dy - \left(x^2 + xy\sin\dfrac{y}{x} + y^2\right)dx = 0$. **4.** $2x^2 y' = y^3 + xy$.

5. Довести, що крива, для якої тангенс кута нахилу будь-якої дотичної до осі абсцис прямо пропорційний абсцисі точки дотику, є параболою.

Варіант 24

1. $2xy' + y^2 = 1$. **<u>2</u>.** $(x+2y)y' = 1,\ y(0) = -1$.

3. $\left(x + y + y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx - \left(x\cos\dfrac{y}{x} + x\right)dy = 0$. **4.** $y^3 dx + 2(x^2 - xy^2)dy = 0$.

5. Знайти криві, для яких відрізок осі абсцис, що відтинається дотичною та нормаллю, проведеними з довільної точки кривої, має сталу довжину $2a$.

Варіант 25

1. $x^2 y' = y(x+y)$. **2.** $y' = \sqrt{4x+2y-1}$. **3.** $\left(\sqrt{x^3} + \sqrt{y^3}\,\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{y}{x}}}\right)dx - x\sqrt{y}\,\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{y}{x}}}\,dy = 0$.

4. $3x^5 y dx + (y^4 - x^6)dy = 0$.

5. Знайти криві, у яких точка перетину будь-якої дотичної з віссю абсцис має абсцису, вдвічі меншу за абсцису точки дотику.

Джерело: *Рего В. Л., Варга Я. В.* Диференціальні рівняння першого порядку та методи їх інтегрування. – Навчальний посібник із курсу «Диференціальні рівняння», частина I. – Ужгород: 2021. – С. 3-43.

Примітка. <u>Підкресленням</u> позначені номери завдань, у яких задана початкова умова (див. постановку завдань).