РІВНЯННЯ В ПОВНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛАХ ТА ЗВІДНІ ДО НИХ

1. Рівняння в повних диференціалах

Нагадаємо: диференціальне рівняння (ДР) вигляду

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{1.1}$$

називається рівнянням у повних диференціалах (РПД), якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції $f(x,y)$. У такому випадку його загальний інтеграл визначається рівністю

$$f(x,y) = C, \tag{1.2}$$

де $f(x,y)$ визначається з системи рівнянь

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y). \tag{1.3}$$

Необхідною й достатньою умовою того, щоб ДР (1.1) було РПД, є умова Ейлера

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{1.4}$$

Приклад 1.1. Перевірити, чи є задане ДР рівнянням у повних диференціалах, і знайти його розв'язок:

$$(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y\cos^2 x dy = 0. \tag{1.5}$$

Розв'язання. Перевіримо, чи є задане ДР рівнянням у повних диференціалах, тобто чи виконується умова Ейлера (1.4). Порівнюючи з (1.1), маємо:

$$M(x,y) = 1 + y^2 \sin 2x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 2y\sin 2x;$$

$$N(x,y) = -2y\cos^2 x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 4y\cos x \sin x = 2y\sin 2x.$$

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, отже, (1.5) є РПД. Для побудови його загального розв'язку вигляду (1.2) потрібно знайти функцію $f(x,y)$, повним диференціалом якої є ліва частина рівності (1.5). Вона визначається з системи рівнянь (1.3), яка у нашому випадку має вигляд

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + y^2 \sin 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y\cos^2 x. \tag{1.6}$$

Інтегруючи перше з рівнянь системи (1.6) за змінною x, маємо:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + y^2 \sin 2x \quad \Rightarrow \quad f(x,y) = x - \frac{y^2 \cos 2x}{2} + \varphi(y), \tag{1.7}$$

де $\varphi(y)$ – невідома функція змінної y, яку визначаємо підстановкою (1.7) у друге рівняння системи (1.6). Таким чином, з урахуванням тригонометричної тотожності $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$, одержимо:

$$\frac{\partial f}{\partial y} \equiv -y\cos 2x + \varphi'(y) = -2y\cos^2 x \quad \Rightarrow \quad \varphi'(y) = -y\,.$$

Оскільки загальний інтеграл (1.2) уже містить довільну сталу, то нам досить знайти частинний розв'язок отриманого рівняння. Інтегруванням і наступною підстановкою знайденої $\varphi(y)$ в (1.7) визначаємо

$$\varphi(y) = -\frac{y^2}{2} \quad \Rightarrow \quad f(x,y) = x - \frac{y^2\cos 2x}{2} - \frac{y^2}{2} = x - y^2\cos^2 x\,.$$

Тоді згідно з (1.2) загальний інтеграл РПД (1.5) запишеться у вигляді

$$x - y^2\cos^2 x = C\,.$$

Відповідь. $x - y^2\cos^2 x = C$.

Приклад 1.2. Перевірити, чи є задане ДР рівнянням у повних диференціалах, і знайти його розв'язок, що проходить через точку $M(0,1)$:

$$\left(2xy\,\mathrm{e}^{x^2} + \ln y\right)dx + \left(\mathrm{e}^{x^2} + \frac{x}{y}\right)dy = 0\,. \tag{1.8}$$

Розв'язання. Перевіримо, чи є задане ДР рівнянням у повних диференціалах, тобто чи виконується умова Ейлера (1.4). Порівнюючи з (1.1), маємо:

$$M(x,y) = 2xy\,\mathrm{e}^{x^2} + \ln y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 2x\,\mathrm{e}^{x^2} + \frac{1}{y}\,;$$

$$N(x,y) = \mathrm{e}^{x^2} + \frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x\,\mathrm{e}^{x^2} + \frac{1}{y}\,.$$

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, отже, (1.8) є РПД. Для побудови його загального розв'язку вигляду (1.2) потрібно знайти функцію $f(x,y)$, повним диференціалом якої є ліва частина рівності (1.8). Вона визначається з системи рівнянь (1.3), яка у нашому випадку має вигляд

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy\,\mathrm{e}^{x^2} + \ln y\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \mathrm{e}^{x^2} + \frac{x}{y}\,. \tag{1.9}$$

Інтегруючи друге з рівнянь системи (1.9) за змінною y з урахуванням визначеності ДР (1.8) при $y > 0$, маємо:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \mathrm{e}^{x^2} + \frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad f(x,y) = y\,\mathrm{e}^{x^2} + x\ln y + \varphi(x)\,, \tag{1.10}$$

де $\varphi(x)$ – невідома функція змінної x, яку визначаємо підстановкою (1.10) у перше рівняння системи (1.9). Таким чином одержимо:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv 2xy\,\mathrm{e}^{x^2} + \ln y + \varphi'(x) = 2xy\,\mathrm{e}^{x^2} + \ln y \quad \Rightarrow \quad \varphi'(x) = 0\,.$$

Оскільки загальний інтеграл (1.2) уже містить довільну сталу, то нам досить знайти частинний розв'язок отриманого рівняння, наприклад, $\varphi(x) = 0$. Підстановкою в (1.10) визначаємо

$$f(x,y)=y\mathrm{e}^{x^2}+x\ln y.$$

Тоді згідно з (1.2) загальний інтеграл РПД (1.5) запишеться у вигляді

$$y\mathrm{e}^{x^2}+x\ln y=C. \tag{1.11}$$

Виділимо з сім'ї кривих (1.11) ту інтегральну криву, яка проходить через точку $M(0,1)$, тобто справджує початкову умову $y(0)=1$. При значеннях $x=0$, $y=1$ із (1.11) маємо:

$$1\cdot \mathrm{e}^0+0\cdot\ln 1=C \quad\Rightarrow\quad C=1.$$

Рівняння шуканої інтегральної кривої (розв'язку задачі Коші) отримаємо, підставивши значення $C=1$ у рівність (1.11). Отже, $y\mathrm{e}^{x^2}+x\ln y=1$.

Відповідь. $y\mathrm{e}^{x^2}+x\ln y=1$.

Приклад 1.3. Розв'язати рівняння шляхом виділення повних диференціалів:

$$y(x+y^2)dx+x^2(y-1)dy=0. \tag{1.12}$$

Розв'язання. Зауважимо, що (1.12) не є рівнянням у повних диференціалах, оскільки для нього не виконується умова Ейлера: $\frac{\partial}{\partial y}[y(x+y^2)]\neq\frac{\partial}{\partial x}[x^2(y-1)]$. Подамо (1.12) у вигляді

$$y^3dx+x^2ydy+x(ydx-xdy)=0. \tag{1.13}$$

Це рівняння Мінділнґа-Дарбу, яке загалом зводиться до рівняння Бернуллі підстановкою $y=xz$. Однак специфічний вигляд рівнянь такого типу дуже часто допускає інтегрування простішими методами, зокрема шляхом виділення повних диференціалів зі згрупованих певним чином доданків.

Застосуємо цей метод до рівняння (1.13). Щоб отримати повні диференціали з першої та другої пар доданків, поділимо рівність (1.13) на x^2y^3, вважаючи $xy\neq 0$ [принагідно зауважимо, що функції $x=0$ та $y=0$ є розв'язками ДР (1.12), тому їх слід враховувати в остаточній відповіді]. Маємо:

$$\frac{dx}{x^2}+\frac{dy}{y^2}+\frac{ydx-xdy}{xy^3}=0.$$

Останню рівність можна подати з виділеними повними диференціалами:

$$-d\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{xy}d\left(\frac{x}{y}\right)=0. \tag{1.14}$$

Введемо подвійну підстановку

$$u=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy},\quad v=\frac{x}{y}. \tag{1.15}$$

Звідси

$$x=\frac{v+1}{u},\quad y=\frac{v+1}{uv},$$

а отже, рівність (1.14) через нові змінні *u*, *v* запишеться у вигляді

$$-du+\frac{u^2v}{(v+1)^2}dv=0. \tag{1.16}$$

Рівняння (1.16) інтегрується шляхом відокремлення змінних:

$$du = \frac{u^2 v}{(v+1)^2}dv \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u^2} = \frac{vdv}{(v+1)^2},$$

звідки

$$C - \frac{1}{u} = \ln|v+1| + \frac{1}{v+1}, \tag{1.17}$$

де C – довільна стала. Зауважимо, що на цьому кроці інтегрування слід врахувати ще один втрачений розв'язок ДР (1.12)

$$v+1=0 \quad \Rightarrow \quad y=-x.$$

Загальний інтеграл рівняння (1.12) одержуємо після підстановки в (1.17) значень змінних u, v із (1.15):

$$C - \frac{xy}{x+y} = \ln|xy^{-1}+1| + \frac{1}{xy^{-1}+1},$$

або після спрощення

$$\ln\left|\frac{x+y}{y}\right| + \frac{y(1+x)}{x+y} = C. \tag{1.18}$$

Порівнюючи три втрачені в процесі інтегрування розв'язки з (1.18), робимо висновок, що $y=0$ та $y=-x$ не одержуються з загального інтеграла, зате при $x=0$ ліва частина рівності (1.18) дає сталу величину, а отже, цей розв'язок входить у сім'ю інтегральних кривих, тому в остаточній відповіді його не потрібно вказувати окремо.

Відповідь. $\ln\left|\frac{x+y}{y}\right| + \frac{y(1+x)}{x+y} = C$, $y=0$, $y=-x$.

2. Інтегрувальний множник та його застосування

Якщо ДР (1.1) не є рівнянням у повних диференціалах, то його часто вдається звести до такого шляхом домноження на інтегрувальний множник μ, який на практиці шукають у вигляді функції одного аргумента з застосуванням наступних критеріїв:

а) за виконання умови $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \varphi_1(x)$ існує $\mu(x) = e^{\int \varphi_1(x)dx}$;

б) за виконання умови $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = \varphi_2(y)$ існує $\mu(y) = e^{\int \varphi_2(y)dy}$;

в) за виконання умови $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial \omega}{\partial x} - M\frac{\partial \omega}{\partial y}} = \varphi_3(\omega)$, де $\omega = \omega(x,y)$ деяка відома функція двох змінних, існує $\mu(\omega) = e^{\int \varphi_3(\omega)d\omega}$.

Приклад 2.1. Знайшовши інтегрувальний множник, звести задане ДР до рівняння в повних диференціалах та зінтегрувати його:

$$(x\cos y - y\sin y)dy + (x\sin y + y\cos y)dx = 0. \tag{2.1}$$

Розв'язання. Перевіримо, чи є задане ДР рівнянням у повних диференціалах, тобто чи виконується умова Ейлера (1.4). Порівнюючи з (1.1), маємо:

$$M(x,y)=x\sin y+y\cos y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y}=(x+1)\cos y-y\sin y;$$

$$N(x,y)=x\cos y-y\sin y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x}=\cos y.$$

$\dfrac{\partial M}{\partial y}\neq\dfrac{\partial N}{\partial x}$, отже, (2.1) не є РПД. Спробуємо звести його до такого шляхом відшукання інтегрувального множника із застосуванням наведених вище критеріїв:

а) $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}\equiv\dfrac{(x+1)\cos y-y\sin y-\cos y}{x\cos y-y\sin y}=1=\varphi_1(x)$. Нам поталанило: виконується перший же критерій, тому існує $\mu(x)=\mathrm{e}^{\int\varphi_1(x)dx}=\mathrm{e}^{\int dx}=\mathrm{e}^x$.

Домноживши рівність (2.1) на знайдений інтегрувальний множник, одержимо:

$$\mathrm{e}^x(x\cos y-y\sin y)dy+\mathrm{e}^x(x\sin y+y\cos y)dx=0. \tag{2.2}$$

Згідно з означенням інтегрувального множника ДР (2.2) має бути рівнянням у повних диференціалах. Перевіримо виконання умови Ейлера, порівнюючи з (1.1):

$$M(x,y)=\mathrm{e}^x(x\sin y+y\cos y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y}=\mathrm{e}^x[(x+1)\cos y-y\sin y];$$

$$N(x,y)=\mathrm{e}^x(x\cos y-y\sin y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x}=\mathrm{e}^x[(x+1)\cos y-y\sin y].$$

$\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$, отже, (2.2) справді є РПД. Для побудови його загального розв'язку вигляду (1.2) потрібно знайти функцію $f(x,y)$, повним диференціалом якої є ліва частина рівності (2.2). Вона визначається з системи рівнянь (1.3), яка у нашому випадку має вигляд

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\mathrm{e}^x(x\sin y+y\cos y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}=\mathrm{e}^x(x\cos y-y\sin y). \tag{2.3}$$

Інтегруючи перше з рівнянь системи (2.3) за змінною *x*, маємо:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\mathrm{e}^x(x\sin y+y\cos y) \quad \Rightarrow \quad f(x,y)=\mathrm{e}^x[(x-1)\sin y+y\cos y]+\varphi(y), \tag{2.4}$$

де $\varphi(y)$ – невідома функція змінної *y*, яку визначаємо підстановкою (2.4) у друге рівняння системи (2.3). Таким чином одержимо:

$$\frac{\partial f}{\partial y}\equiv\mathrm{e}^x(x\cos y-y\sin y)+\varphi'(y)=\mathrm{e}^x(x\cos y-y\sin y) \quad \Rightarrow \quad \varphi'(y)=0.$$

Оскільки загальний інтеграл (1.2) уже містить довільну сталу, то нам досить знайти частинний розв'язок отриманого рівняння, наприклад, $\varphi(y)=0$. Підстановкою в (2.4) визначаємо

$$f(x,y)=\mathrm{e}^x[(x-1)\sin y+y\cos y].$$

Тоді згідно з (1.2) загальний інтеграл РПД (1.5) запишеться у вигляді

$$\mathrm{e}^x[(x-1)\sin y+y\cos y]=C \quad \Rightarrow \quad (x-1)\sin y+y\cos y=C\mathrm{e}^{-x}.$$

Відповідь. $(x-1)\sin y + y\cos y = C\,\mathrm{e}^{-x}$.

Приклад 2.2. Знайшовши інтегрувальний множник, звести задане ДР до рівняння в повних диференціалах, і визначити його розв'язок, який справджує початкову умову $y(1)=1$:

$$(2xy+y^2)dx+(2x^2+3xy)dy=0. \tag{2.5}$$

Розв'язання. Перевіримо, чи є задане ДР рівнянням у повних диференціалах, тобто чи виконується умова Ейлера (1.4). Порівнюючи з (1.1), маємо:

$$M(x,y)=2xy+y^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial M}{\partial y}=2x+2y;$$

$$N(x,y)=2x^2+3xy \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial N}{\partial x}=4x+3y.$$

$\dfrac{\partial M}{\partial y}\neq\dfrac{\partial N}{\partial x}$, отже, (2.5) не є РПД. Спробуємо звести його до такого шляхом відшукання інтегрувального множника із застосуванням наведених вище критеріїв:

а) $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}\equiv\dfrac{2x+2y-(4x+3y)}{2x^2+3xy}=-\dfrac{2x+y}{x(2x+3y)}\neq\varphi_1(x)$. На жаль, перший критерій не виконується, тому переходимо до перевірки наступних.

б) $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}\equiv\dfrac{2x+2y-(4x+3y)}{-(2xy+y^2)}=\dfrac{2x+y}{y(2x+y)}=\dfrac{1}{y}=\varphi_2(y)$. Цей критерій виконується, отже, існує $\mu(y)=\mathrm{e}^{\int\varphi_2(y)dy}=\mathrm{e}^{\int\frac{dy}{y}}=y$.

Домноживши рівність (2.5) на знайдений інтегрувальний множник, одержимо:

$$(2xy^2+y^3)dx+(2x^2y+3xy^2)dy=0. \tag{2.6}$$

Згідно з означенням інтегрувального множника ДР (2.6) має бути рівнянням у повних диференціалах. Перевіримо виконання умови Ейлера, порівнюючи з (1.1):

$$M(x,y)=2xy^2+y^3 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial M}{\partial y}=4xy+3y^2;$$

$$N(x,y)=2x^2y+3xy^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial N}{\partial x}=4xy+3y^2.$$

$\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$, отже, (2.6) справді є РПД. Для побудови його загального розв'язку вигляду (1.2) потрібно знайти функцію $f(x,y)$, повним диференціалом якої є ліва частина рівності (2.6). Вона визначається з системи рівнянь (1.3), яка у нашому випадку має вигляд

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy^2+y^3,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=2x^2y+3xy^2. \tag{2.7}$$

Інтегруючи друге з рівнянь системи (2.7) за змінною *y*, маємо:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2x^2y+3xy^2 \quad\Rightarrow\quad f(x,y)=x^2y^2+xy^3+\varphi(x), \tag{2.8}$$

де $\varphi(x)$ – невідома функція змінної x, яку визначаємо підстановкою (2.8) у перше рівняння системи (2.7). Таким чином одержимо:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv 2xy^2 + y^3 + \varphi'(x) = 2xy^2 + y^3 \quad \Rightarrow \quad \varphi'(x) = 0.$$

Оскільки загальний інтеграл (1.2) уже містить довільну сталу, то нам досить знайти частинний розв'язок отриманого рівняння, наприклад, $\varphi(x) = 0$. Підстановкою в (2.8) визначаємо

$$f(x, y) = x^2y^2 + xy^3.$$

Тоді згідно з (1.2) загальний інтеграл РПД (2.6) запишеться у вигляді

$$x^2y^2 + xy^3 = C. \tag{2.9}$$

Виділимо з (2.9) частинний інтеграл, який справджує початкову умову $y(1) = 1$. При значеннях $x = 1$, $y = 1$ із (2.9) маємо:

$$1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = C \quad \Rightarrow \quad C = 2.$$

Шуканий частинний інтеграл (розв'язок задачі Коші) отримаємо, підставивши значення $C = 2$ у рівність (2.9). Отже, $x^2y^2 + xy^3 = 2$.

Відповідь. $x^2y^2 + xy^3 = 2$.

Приклад 2.3. Знайшовши інтегрувальний множник, звести задане ДР до рівняння в повних диференціалах, і зінтегрувати його:

$$(y - xy^2)dx + xdy = 0. \tag{2.10}$$

Розв'язання. Перевіримо, чи є задане ДР рівнянням у повних диференціалах, тобто чи виконується умова Ейлера (1.4). Порівнюючи з (1.1), маємо:

$$M(x, y) = y - xy^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 1 - 2xy;$$

$$N(x, y) = x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1.$$

$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, отже, (2.10) не є РПД. Спробуємо звести його до такого шляхом відшукання інтегрувального множника із застосуванням наведених вище критеріїв:

а) $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \equiv \dfrac{1 - 2xy - 1}{x} = -\dfrac{2xy}{x} = -2y \neq \varphi_1(x)$. Перший критерій не виконується, тому переходимо до перевірки наступних.

б) $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} \equiv \dfrac{1 - 2xy - 1}{-(y - xy^2)} = \dfrac{2xy}{y(1 - xy)} = \dfrac{2x}{1 - xy} \neq \varphi_2(y)$. Цей критерій також не виконується, отже, залишається надія на останній.

в) $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial \omega}{\partial x} - M\frac{\partial \omega}{\partial y}} = \dfrac{-2xy}{x\frac{\partial \omega}{\partial x} - (y - xy^2)\frac{\partial \omega}{\partial y}}$; тут необхідно підібрати функцію $\omega = \omega(x, y)$ таким чином, щоб дріб у правій частині рівності давав функцію виключно цього аргумента

$\varphi_3(\omega)$. Перепробовуючи простіші вирази для аргумента, переконуємося, що критерій виконується для випадку $\omega = xy$, адже для цієї функції

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial \omega}{\partial x} - M\frac{\partial \omega}{\partial y}} = \frac{-2xy}{xy - (y - xy^2)\cdot x} = -\frac{2xy}{x^2y^2} = -\frac{2}{xy} = -\frac{2}{\omega} = \varphi_3(\omega)$$

а тому існує $\mu(\omega) = e^{-\int \frac{2d\omega}{\omega}} = \omega^{-2} = \frac{1}{(xy)^2}$.

Домноживши рівність (2.10) на знайдений інтегрувальний множник [втрачені на цьому кроці розв’язки $x = 0$ та $y = 0$ вихідного ДР (2.10) слід врахувати в остаточній відповіді], одержимо:

$$\left(\frac{1}{x^2y} - \frac{1}{x}\right)dx + \frac{dy}{xy^2} = 0. \qquad (2.11)$$

Згідно з означенням інтегрувального множника ДР (2.11) має бути рівнянням у повних диференціалах. Перевіримо виконання умови Ейлера, порівнюючи з (1.1):

$$M(x,y) = \frac{1}{x^2y} - \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{1}{(xy)^2};$$

$$N(x,y) = \frac{1}{xy^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{(xy)^2}.$$

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, отже, (2.11) справді є РПД. Для побудови його загального розв’язку вигляду (1.2) потрібно знайти функцію $f(x,y)$, повним диференціалом якої є ліва частина рівності (2.11). Вона визначається з системи рівнянь (1.3), яка у нашому випадку має вигляд

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x^2y} - \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{xy^2}. \qquad (2.12)$$

Інтегруючи друге (простіше на вигляд) з рівнянь системи (2.12) за змінною y, маємо:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{xy^2} \quad \Rightarrow \quad f(x,y) = -\frac{1}{xy} + \varphi(x), \qquad (2.13)$$

де $\varphi(x)$ – невідома функція змінної x, яку визначаємо підстановкою (2.13) у перше рівняння системи (2.12). Таким чином одержимо:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv \frac{1}{x^2y} + \varphi'(x) = \frac{1}{x^2y} - \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \varphi'(x) = -\frac{1}{x}.$$

Оскільки загальний інтеграл (1.2) уже містить довільну сталу, то нам досить знайти частинний розв’язок отриманого рівняння, наприклад, $\varphi(x) = -\ln|x|$. Підстановкою в (2.13) визначаємо

$$f(x,y) = -\frac{1}{xy} - \ln|x|.$$

Тоді згідно з (1.2) загальний інтеграл РПД (2.11) запишеться як

$$-\frac{1}{xy} - \ln|x| = C_1,$$

або в еквівалентному вигляді

$$\frac{1}{xy} + \ln|x| = C, \tag{2.14}$$

де $C = -C_1$.

Щоб записати всі розв'язки вихідного ДР (2.10), до загального інтеграла (2.14) слід додати окремо два втрачені при домноженні на інтегрувальний множник розв'язки, які очевидно не отримуються з рівності (2.14).

Відповідь. $\ln|x| + \dfrac{1}{xy} = C$, $x = 0$, $y = 0$.

Приклад 2.4. Знайшовши інтегрувальний множник, звести задане ДР до рівняння в повних диференціалах, і зінтегрувати його:

$$x(y^2 + 3\ln x)dy = ydx. \tag{2.15}$$

Розв'язання. Перевіримо, чи є задане ДР рівнянням у повних диференціалах, тобто чи виконується умова Ейлера (1.4). Порівнюючи з (1.1) після перенесення всіх доданків у ліву частину рівності (2.15), маємо:

$$M(x,y) = -y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = -1;$$

$$N(x,y) = x(y^2 + 3\ln x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x} = y^2 + 3(\ln x + 1).$$

$\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$, отже, (2.15) не є РПД. Спробуємо звести його до такого шляхом відшукання інтегрувального множника із застосуванням наведених вище критеріїв:

а) $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \equiv \dfrac{-1 - y^2 - 3(\ln x + 1)}{y^2 + 3(\ln x + 1)} = -\dfrac{y^2 + 3\ln x + 4}{y^2 + 3\ln x + 3} \neq \varphi_1(x)$. Перший критерій не виконується, тому переходимо до перевірки наступних.

б) $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} \equiv \dfrac{-1 - y^2 - 3(\ln x + 1)}{y} = -\dfrac{y^2 + 3\ln x + 4}{y} \neq \varphi_2(y)$. Цей критерій також не виконується, отже, залишається надія на останній.

в) $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial \omega}{\partial x} - M\frac{\partial \omega}{\partial y}} = -\dfrac{y^2 + 3\ln x + 4}{x(y^2 + 3\ln x)\frac{\partial \omega}{\partial x} + y\frac{\partial \omega}{\partial y}}$; тут необхідно підібрати функцію $\omega = \omega(x,y)$ таким чином, щоб дріб у правій частині рівності давав функцію виключно цього аргумента $\varphi_3(\omega)$. У даному випадку перепробовувати різні аргументи немає потреби, оскільки є простіший вихід: дріб перетворюється на сталу величину, якщо покласти

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{4}{y} \quad \Rightarrow \quad \omega = \ln x + 4\ln|y|,$$

адже тоді

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial \omega}{\partial x} - M\frac{\partial \omega}{\partial y}} = -\frac{y^2 + 3\ln x + 4}{x(y^2 + 3\ln x)\cdot x^{-1} + y\cdot 4y^{-1}} = -1 = \varphi_3(\omega),$$

а тому існує $\mu(\omega)=e^{-\int d\omega}=e^{-\omega}=\dfrac{1}{xy^4}$.

Домноживши рівність (2.15) на знайдений інтегрувальний множник [зауважимо, що значення $x=0$ не входить в область визначеності рівняння, а втрачений на цьому кроці розв'язок $y=0$ вихідного ДР (2.15) слід врахувати в остаточній відповіді], одержимо:

$$\left(\frac{1}{y^2}+\frac{3\ln x}{y^4}\right)dy-\frac{dx}{xy^3}=0. \tag{2.16}$$

Згідно з означенням інтегрувального множника ДР (2.16) має бути рівнянням у повних диференціалах. Перевіримо виконання умови Ейлера, порівнюючи з (1.1):

$$M(x,y)=-\frac{1}{xy^3} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{3}{xy^4};$$

$$N(x,y)=\frac{1}{y^2}+\frac{3\ln x}{y^4} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{3}{xy^4}.$$

$\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$, отже, (2.16) справді є РПД. Для побудови його загального розв'язку вигляду (1.2) потрібно знайти функцію $f(x,y)$, повним диференціалом якої є ліва частина рівності (2.16). Вона визначається з системи рівнянь (1.3), яка у нашому випадку має вигляд

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{1}{xy^3},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{y^2}+\frac{3\ln x}{y^4}. \tag{2.17}$$

Інтегруючи перше (простіше на вигляд) з рівнянь системи (2.17) за змінною x, маємо:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{1}{xy^3} \quad\Rightarrow\quad f(x,y)=-\frac{\ln x}{y^3}+\varphi(y), \tag{2.18}$$

де $\varphi(y)$ – невідома функція змінної y, яку визначаємо підстановкою (2.18) у друге рівняння системи (2.17). Таким чином одержимо:

$$\frac{\partial f}{\partial y}\equiv\frac{3\ln x}{y^4}+\varphi'(y)=\frac{1}{y^2}+\frac{3\ln x}{y^4} \quad\Rightarrow\quad \varphi'(y)=\frac{1}{y^2}.$$

Оскільки загальний інтеграл (1.2) уже містить довільну сталу, то нам досить знайти частинний розв'язок отриманого рівняння, наприклад, $\varphi(y)=-y^{-1}$. Підстановкою в (2.18) визначаємо

$$f(x,y)=-\frac{\ln x}{y^3}-\frac{1}{y}.$$

Тоді згідно з (1.2) загальний інтеграл РПД (2.16) запишеться як

$$-\frac{\ln x}{y^3}-\frac{1}{y}=C_1,$$

або в еквівалентному вигляді ($y\neq 0$)

$$y^2+\ln x=Cy^3, \tag{2.19}$$

де $C=-C_1$.

Щоб записати всі розв'язки вихідного ДР (2.10), до загального інтеграла (2.19) слід додати окремо втрачений при домноженні на інтегрувальний множник розв'язок $y = 0$, який очевидно не отримується з рівності (2.19).

Відповідь. $y^2 + \ln x = Cy^3$, $y = 0$.

Примітка. Необхідні теоретичні відомості по темах розділу:

Маринець К. В. Диференціальні рівняння першого порядку та методи їх інтегрування. – Навчальний посібник з курсу «Диференціальні рівняння», частина I. – Ужгород: «Говерла», 2015. – С. 42-48.

Лекції до Модуля 1 – Рівняння в повних диференціалах.