

ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ ТА ЗВІДНІ ДО НИХ

1. Лінійні рівняння першого порядку

Приклад 1.1. Розв'язати лінійне рівняння першого порядку:

$$y' - y \operatorname{ctg} x = \sin x. \quad (1.1)$$

Розв'язання. Знайдемо розв'язок ДР (1.1) із застосуванням методу варіації сталої (Лагранжа). Згідно з алгоритмом цього методу спочатку шукаємо загальний розв'язок відповідного до (1.1) однорідного рівняння $y' - y \operatorname{ctg} x = 0$. Це рівняння інтегрується шляхом відокремлення змінних:

$$\frac{dy}{dx} - y \operatorname{ctg} x = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = \operatorname{ctg} x dx,$$

звідки

$$y_{z.o.} = C e^{\int \operatorname{ctg} x dx} = C \sin x, \quad C = \text{const}. \quad (1.2)$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (1.1) будемо шукати у вигляді (1.2), вважаючи сталу C функцією незалежної змінної x :

$$y = C(x) \sin x. \quad (1.3)$$

Функцію $C(x)$ знайдемо безпосередньою підстановкою (1.3) в (1.1):

$$C'(x) \sin x + C(x) \cos x - C(x) \sin x \cdot \operatorname{ctg} x = \sin x,$$

звідки

$$C'(x) = 1 \Rightarrow C(x) = x + C_1,$$

де C_1 – довільна стала. Підставивши знайдений вираз для $C(x)$ у (1.3) і перепозначивши задля зручності $C_1 = C$, одержимо загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (ЛНДР) першого порядку (1.1)

$$y = (x + C) \sin x. \quad (1.4)$$

Як відомо, лінійне ДР, записане у вигляді (1.1), не має особливих розв'язків. Отже, сім'я кривих, задана формулою (1.4), включає всі розв'язки рівняння (1.1).

Відповідь. $y = (x + C) \sin x$.

Приклад 1.2. Розв'язати задачу Коші для лінійного рівняння першого порядку:

$$y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x, \quad y(e^2) = e^4. \quad (1.5)$$

Розв'язання. Будемо шукати розв'язок ЛНДР (1.5) методом підстановки (Д'Аламбера) у вигляді добутку двох функцій незалежної змінної x

$$y = u(x) \cdot v(x). \quad (1.6)$$

Одну з двох функцій $u(x)$, $v(x)$ можна вибрати довільним чином, а друга визначиться на підставі рівняння (1.5).

Після підстановки (1.6) у рівняння з (1.5) маємо:

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x \ln x} = x \ln x$$

або

$$u'v + u \left[v' - \frac{v}{x \ln x} \right] = x \ln x. \quad (1.7)$$

Будемо вимагати, щоб у (1.7) коефіцієнт при $u(x)$ перетворився на нуль, тоді за функцію $v(x)$ можна взяти будь-який розв'язок лінійного однорідного ДР

$$\frac{dv}{dx} - \frac{v}{x \ln x} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x \ln x},$$

наприклад, $v = e^{\int \frac{dx}{x \ln x}} = \ln x$. Тоді з (1.7) для визначення функції $u(x)$ дістанемо рівняння

$$u' \ln x = x \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = x,$$

звідки $u = 0,5x^2 + C$, де C – довільна стала. Підставивши знайдені функції $u(x)$ і $v(x)$ у (1.6), одержимо загальний розв'язок ЛНДР першого порядку (1.5)

$$y = (0,5x^2 + C) \cdot \ln x. \quad (1.8)$$

Виділимо з (1.8) частинний розв'язок, який справджує задану початкову умову $y(e^2) = e^4$. Із (1.8) при значеннях $x = e^2$, $y = e^4$ маємо:

$$e^4 = (0,5 \cdot e^4 + C) \cdot \ln e^2 \Rightarrow C = 0.$$

Шуканий розв'язок задачі Коші (1.5) отримаємо, підставивши значення $C = 0$ у формулу (1.8). Отже, $y = \frac{x^2 \ln x}{2}$.

Відповідь. $y = \frac{x^2 \ln x}{2}$.

2. Рівняння Бернуллі

Приклад 2.1. Зінтегрувати рівняння Бернуллі:

$$x^2 y' + xy + \sqrt{y} = 0. \quad (2.1)$$

Розв'язання. Подамо ДР (2.1) у стандартному вигляді рівняння Бернуллі при $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$y' + \frac{y}{x} = -\frac{\sqrt{y}}{x^2}. \quad (2.2)$$

Для інтегрування ДР (2.2) застосуємо метод зведення до лінійного рівняння. Поділимо ліву і праву частини рівності (2.2) на \sqrt{y} , вважаючи $y \neq 0$:

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} + \frac{y}{x} = -\frac{1}{x^2}. \quad (2.3)$$

Введемо підстановку

$$z(x) = \sqrt{y} \Rightarrow z' = \frac{y'}{2\sqrt{y}} \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{y}} = 2z'.$$

Тоді з (2.3) одержимо рівняння

$$2z' + \frac{z}{x} = -\frac{1}{x^2},$$

або

$$z' + \frac{z}{2x} = -\frac{1}{2x^2}. \quad (2.4)$$

Рівняння (2.4) є ЛНДР відносно невідомої функції $z(x)$. Знайдемо його розв'язок із застосуванням методу варіації сталої (Лагранжа) аналогічно до Прикладу 1.1.

Спочатку шукаємо загальний розв'язок відповідного до (2.4) однорідного рівняння

$z' + \frac{z}{2x} = 0$. Це рівняння інтегрується шляхом відокремлення змінних:

$$\frac{dz}{dx} + \frac{z}{2x} = 0 \Rightarrow \frac{dz}{z} = -\frac{dx}{2x},$$

звідки

$$z_{z.o.} = C e^{-\int \frac{dx}{2x}} = \frac{C}{\sqrt{x}}, \quad C = const. \quad (2.5)$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (2.4) будемо шукати у вигляді (2.5), вважаючи сталу C функцією незалежної змінної x :

$$z = \frac{C(x)}{\sqrt{x}}. \quad (2.6)$$

Функцію $C(x)$ знайдемо безпосередньою підстановкою (2.6) у (2.4):

$$\frac{C'(x)}{\sqrt{x}} - \frac{C(x)}{2\sqrt{x^3}} + \frac{C(x)}{2x\sqrt{x}} = -\frac{1}{2x^2},$$

звідки

$$C'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}} \Rightarrow C(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + C_1,$$

де C_1 – довільна стала. Підставивши знайдений вираз для $C(x)$ у (2.6) і перепозначивши задля зручності $C_1 = C$, одержимо загальний розв'язок ЛНДР першого порядку (2.4)

$$z = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + C \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x} + \frac{C}{\sqrt{x}}. \quad (2.7)$$

Враховуючи підстановку $z = \sqrt{y}$, із (2.7) дістанемо загальний розв'язок рівняння Бернуллі (2.2)

$$\sqrt{y} = \frac{1}{x} + \frac{C}{\sqrt{x}} \Rightarrow y = \left(\frac{1}{x} + \frac{C}{\sqrt{x}} \right)^2.$$

Зауважимо: оскільки в (2.2) $\alpha = \frac{1}{2} > 0$, то рівняння Бернуллі має також розв'язок $y = 0$.

Відповідь. $y = \left(\frac{1}{x} + \frac{C}{\sqrt{x}} \right)^2, y = 0$.

Приклад 2.2. Розв'язати задачу Коші для рівняння Бернуллі:

$$xy' + y = \frac{\ln x}{y^3}, \quad y(1) = 2. \quad (2.8)$$

Розв'язання. Подамо ДР (2.8) у стандартному вигляді рівняння Бернуллі при $\alpha = -3$:

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\ln x}{xy^3}. \quad (2.9)$$

Будемо шукати розв'язок ДР (2.9) методом підстановки (Д'Аламбера) у вигляді добутку (1.6) двох функцій незалежної змінної x . Одну з двох функцій $u(x)$, $v(x)$ можна вибрати довільним чином, а друга визначиться на підставі рівняння (2.9). Після підстановки (1.6) у рівняння (2.9) маємо:

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{\ln x}{x(uv)^3}$$

або

$$u'v + u \left[v' + \frac{v}{x} \right] = \frac{\ln x}{x(uv)^3}. \quad (2.10)$$

Будемо вимагати, щоб у (2.10) коефіцієнт при $u(x)$ перетворився на нуль, тоді за функцію $v(x)$ можна взяти будь-який розв'язок лінійного однорідного ДР

$$\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x},$$

наприклад, $v = e^{-\int \frac{dx}{x}} = x^{-1}$. Тоді з (2.10) для визначення функції $u(x)$ дістанемо рівняння

$$x^{-1} \frac{du}{dx} = \frac{\ln x}{x \cdot (ux^{-1})^3} \Rightarrow u^3 du = x^3 \ln x dx,$$

звідки після інтегрування дістанемо

$$\frac{u^4}{4} = \frac{x^4}{4} \left(\ln x - \frac{1}{4} \right) + \frac{C}{4} \Rightarrow u = \pm x \cdot \sqrt[4]{\left(\ln x - \frac{1}{4} \right) + \frac{C}{x^4}},$$

де C – довільна стала. Підставивши знайдені функції $u(x)$ і $v(x)$ у (1.6), одержимо загальний розв'язок рівняння Бернуллі (2.9)

$$y = \pm x \cdot \sqrt[4]{\left(\ln x - \frac{1}{4} \right) + \frac{C}{x^4}} \cdot x^{-1} = \pm \sqrt[4]{\left(\ln x - \frac{1}{4} \right) + \frac{C}{x^4}}. \quad (2.11)$$

Виділимо з (2.11) частинний розв'язок, який справджує задану початкову умову $y(1) = 2$. Із (2.11) при значеннях $x = 1$, $y = 2$ і за знаку «+» перед коренем (оскільки початкове значення змінної y є додатним) маємо:

$$2 = \sqrt[4]{C - \frac{1}{4}} \Rightarrow C = \frac{65}{4}.$$

Шуканий розв'язок задачі Коші (2.8) отримаємо, підставивши знайдене значення

сталі C у формулу (2.11) за знаку «+» перед коренем. Отже, $y = \sqrt[4]{\left(\ln x - \frac{1}{4} \right) + \frac{65}{4x^4}}$.

Відповідь. $y = \sqrt[4]{\left(\ln x - \frac{1}{4} \right) + \frac{65}{4x^4}}$.

3. Рівняння, звідні до лінійних рівнянь першого порядку

Приклад 3.1. Зінтегрувати рівняння, попередньо звівши його до лінійного ДР першого порядку:

$$y = (2x + y^3)y'. \quad (3.1)$$

Розв'язання. Рівняння (3.1) не є лінійним відносно функції $y(x)$, однак якщо в ньому поміняти місцями залежну й незалежну змінні (тобто x вважати шуканою функцією, а y – незалежною змінною), то його можна подати у вигляді ЛНДР відносно шуканої функції $x(y)$:

$$\frac{dx}{dy} - \frac{2x}{y} = y^2. \quad (3.2)$$

Знайдемо розв'язок ДР (3.2) із застосуванням методу варіації сталої (Лагранжа), проілюстрованому в Прикладах 1.1 та 2.1. Спочатку шукаємо загальний розв'язок відповідного до (3.2) однорідного рівняння, яке інтегрується шляхом відокремлення змінних:

$$\frac{dx}{dy} - \frac{2x}{y} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{2dy}{y},$$

звідки

$$x_{з.о.} = C e^{\int \frac{2dy}{y}} = C y^2, \quad C = const. \quad (3.3)$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (3.2) будемо шукати у вигляді (3.3), вважаючи сталу C функцією незалежної змінної y :

$$x = C(y) \cdot y^2. \quad (3.4)$$

Функцію $C(y)$ знайдемо безпосередньою підстановкою (3.4) в (3.2):

$$C'(y) \cdot y^2 + 2yC(y) - 2yC(y) = y^2,$$

звідки

$$C'(y) = 1 \Rightarrow C(y) = y + C_1,$$

де C_1 – довільна стала. Підставивши знайдений вираз для $C(y)$ у (3.4) і перепозначивши задля зручності $C_1 = C$, одержимо загальний розв'язок ЛНДР першого порядку (3.2)

$$x = (y + C) \cdot y^2 = y^3 + C y^2.$$

який визначає загальний інтеграл рівняння (3.1). Зауважимо, що в остаточній відповіді необхідно також врахувати розв'язок $y = 0$ ДР (3.1), втрачений при переході від (3.1) до (3.2).

Відповідь. $x = y^3 + C y^2, y = 0.$

Приклад 3.2. Знайти розв'язок задачі Коші для вказаного рівняння, попередньо звівши його до лінійного ДР першого порядку:

$$x e^{-y} y' = x - e^{-y}, \quad y(1) = \ln \frac{1}{2}. \quad (3.5)$$

Розв'язання. Зауважуючи, що для функції $y = y(x)$

$$\frac{d e^{-y}}{dx} = -e^{-y} \frac{dy}{dx} \Rightarrow e^{-y} y' = -(e^{-y})',$$

можна зробити висновок, що ДР (3.5) є лінійним відносно функції $f(y) = e^{-y}$, а отже, зводиться до лінійного шляхом введення нової невідомої функції

$$z(x) = e^{-y} \Rightarrow z' = -e^{-y} y'.$$

Тоді з (3.5) маємо

$$-xz' = x - z$$

або

$$z' - \frac{z}{x} = -1. \quad (3.6)$$

Будемо шукати розв'язок ЛНДР (3.6) методом підстановки (Д'Аламбера) у вигляді добутку двох функцій незалежної змінної x аналогічно до Прикладів 1.2 та 2.2:

$$z = u(x) \cdot v(x). \quad (3.7)$$

Одну з двох функцій $u(x)$, $v(x)$ можна вибрати довільним чином, а друга визначиться на підставі рівняння (3.6).

Після підстановки (3.7) у рівняння (3.6) маємо:

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = -1$$

або

$$u'v + u \left[v' - \frac{v}{x} \right] = -1. \quad (3.8)$$

Будемо вимагати, щоб у (3.8) коефіцієнт при $u(x)$ перетворився на нуль, тоді за функцію $v(x)$ можна взяти будь-який розв'язок лінійного однорідного ДР

$$\frac{dv}{dx} - \frac{v}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x},$$

наприклад, $v = e^{\int \frac{dx}{x}} = x$. Тоді з (3.8) для визначення функції $u(x)$ дістанемо рівняння

$$u'x = -1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{x},$$

звідки $u = -\ln|x| + C$, де C – довільна стала. Підставивши знайдені функції $u(x)$ і $v(x)$ у (3.7), одержимо загальний розв'язок ЛНДР першого порядку (3.6)

$$z = x(C - \ln|x|). \quad (3.9)$$

Враховуючи, що $z = e^{-y}$, із (3.9) дістанемо загальний розв'язок заданого ДР (3.5)

$$e^{-y} = x(C - \ln|x|) \Rightarrow y = -\ln(Cx - x \ln|x|). \quad (3.10)$$

Виділимо з (3.10) частинний розв'язок, який справджує задану початкову умову $y(1) = \ln \frac{1}{2}$. Із (3.10) при значеннях $x = 1$, $y = \ln \frac{1}{2}$ маємо:

$$\ln \frac{1}{2} = -\ln(C - \ln 1) \Rightarrow C = 2.$$

Шуканий розв'язок задачі Коші (3.5) отримаємо, підставивши значення $C = 2$ у формулу (3.10). Отже, $y = -\ln(2x - x \ln|x|)$.

Відповідь. $y = -\ln(2x - x \ln|x|)$.

Приклад 3.3. Зінтегрувати рівняння, попередньо звівши його до лінійного ДР першого порядку:

$$(x^2 - y^2 + y)dx + x(2y - 1)dy = 0. \quad (3.11)$$

Розв'язання. Перепишемо рівність (3.11) у вигляді

$$(x^2 - y^2)dx + 2xydy - (xdy - ydx) = 0. \quad (3.12)$$

Це рівняння Міндінга-Дарбу $M(x, y)dx + N(x, y)dy + R(x, y)(xdy - ydx) = 0$, коефіцієнти якого є однорідними функціями: $M = x^2 - y^2$ та $N = 2xy$ однакового виміру $p = 2$, а $R = -1$ виміру $k = 0$. Оскільки в нашому випадку $k = p - 2$, то згідно з властивостями рівняння Міндінга-Дарбу заміною

$$y = xz, \quad dy = xdz + zdx \quad (3.13)$$

(3.12) зводиться до лінійного неоднорідного ДР першого порядку з шуканою функцією $x(z)$. Покажемо це, підставивши (3.13) у (3.12):

$$[x^2 - (xz)^2]dx + 2x \cdot xz \cdot (xdz + zdx) - (x[xdz + zdx] - xzdx) = 0,$$

Поділимо одержану рівність на x^2 , вважаючи $x \neq 0$ [принагідно зауважимо, що $x = 0$ є розв'язком ДР (3.11), який слід враховувати в остаточній відповіді] і зведемо подібні доданки:

$$(1 + z^2)dx + (2zx - 1)dz = 0,$$

звідки одержимо ЛНДР відносно шуканої функції $x(z)$

$$\frac{dx}{dz} + \frac{2zx}{1 + z^2} = \frac{1}{1 + z^2}. \quad (3.14)$$

Знайдемо розв'язок ДР (3.14) із застосуванням методу Лагранжа. Спочатку шукаємо загальний розв'язок відповідного до (3.14) однорідного рівняння:

$$\frac{dx}{dz} + \frac{2zx}{1 + z^2} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{2zdz}{1 + z^2},$$

звідки

$$x_{z.o.} = C e^{-\int \frac{2zdz}{1+z^2}} = \frac{C}{1 + z^2}, \quad C = const. \quad (3.15)$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (3.14) будемо шукати у вигляді (3.15), вважаючи сталу C функцією незалежної змінної z :

$$x = \frac{C(z)}{1 + z^2}. \quad (3.16)$$

Функцію $C(z)$ знайдемо безпосередньою підстановкою (3.16) у (3.14):

$$\frac{C'(z)}{1 + z^2} - \frac{2zC(z)}{(1 + z^2)^2} + \frac{2z}{1 + z^2} \cdot \frac{C(z)}{1 + z^2} = \frac{1}{1 + z^2},$$

звідки

$$C'(z) = 1 \Rightarrow C(z) = z + C_1,$$

де C_1 – довільна стала. Підставивши знайдений вираз для $C(z)$ у (3.16) і перепозначивши задля зручності $C_1 = C$, одержимо загальний розв'язок ЛНДР першого порядку (3.14)

$$x = \frac{z + C}{1 + z^2}. \quad (3.17)$$

Загальний інтеграл рівняння (3.11) дістанемо, підставивши в (3.17) значення змінної z із (3.13):

$$z = \frac{y}{x} \Rightarrow x = \frac{yx^{-1} + C}{1 + (yx^{-1})^2} = \frac{x(Cx + y)}{x^2 + y^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = Cx + y.$$

Нагадаємо, що в остаточній відповіді необхідно також додати окремо розв'язок $x = 0$ ДР (3.11), втрачений при переході до ЛНДР (3.14), оскільки він очевидно не отримується з загального інтеграла.

Відповідь. $x^2 + y^2 = Cx + y$, $x = 0$.

4. Рівняння Ріккати

Приклад 4.1. Зінтегрувати рівняння, попередньо звівши його до лінійного ДР першого порядку:

$$y' + y^2 \sin x = \frac{2 \sin x}{\cos^2 x}. \quad (4.1)$$

Розв'язання. ДР (4.1) є рівнянням Ріккати, яке можна звести до рівняння Бернуллі, а далі й до лінійного ДР, якщо відомий деякий його частинний розв'язок $y_1(x)$. Бачимо, що в лівій частині рівності (4.1) отримуються доданки, подібні до вільного члена у правій частині, якщо покласти

$$y_1(x) = \frac{a}{\cos x} \Rightarrow y_1'(x) = \frac{a \sin x}{\cos^2 x},$$

де a – стала, значення якої визначаємо безпосередньою підстановкою в (4.1):

$$\frac{a \sin x}{\cos^2 x} + \frac{a^2}{\cos^2 x} \cdot \sin x = \frac{2 \sin x}{\cos^2 x} \Rightarrow a + a^2 = 2.$$

Остання рівність виконується при $a = 1$ або $a = -2$. Отже, за частинний розв'язок рівняння Ріккати (4.1) можна взяти функцію

$$y_1(x) = \frac{1}{\cos x}. \quad (4.2)$$

Введемо підстановку

$$y = y_1(x) + z(x) = \frac{1}{\cos x} + z(x), \quad (4.3)$$

де $z(x)$ – нова невідома функція. Тоді з (4.1) маємо:

$$\frac{\sin x}{\cos^2 x} + z' + \left(\frac{1}{\cos x} + z \right)^2 \cdot \sin x = \frac{2 \sin x}{\cos^2 x},$$

звідки після спрощення для нової невідомої функції $z(x)$ отримуємо рівняння Бернуллі при $\alpha = 2$

$$z' + \frac{2 \sin x}{\cos x} z = -z^2 \sin x. \quad (4.4)$$

Зауважимо, що виведене ДР (4.4) має тривіальний розв'язок $z = 0$, однак для рівняння Ріккати (4.1) він не дає нового розв'язку, оскільки згідно з (4.3) у цьому випадку отримуємо вже відомий частинний розв'язок (4.2).

Оскільки в завданні вимагається попередньо звести ДР (4.1) до лінійного, то для інтегрування рівняння Бернуллі (4.4) скористаємося методом зведення до лінійного рівняння, проілюстрованим у Прикладі 2.1.

Поділимо ліву і праву частини рівності (4.4) на z^2 , вважаючи $z \neq 0$:

$$z^{-2} z' + \frac{2 \sin x}{\cos x} z^{-1} = -\sin x. \quad (4.5)$$

Введемо підстановку

$$\omega(x) = z^{-1} \Rightarrow \omega' = -z^{-2} z' \Rightarrow z^{-2} z' = -\omega'.$$

Тоді з (4.5) одержимо рівняння

$$-\omega' + \frac{2 \sin x}{\cos x} \omega = -\sin x,$$

або

$$\omega' - \frac{2 \sin x}{\cos x} \omega = \sin x. \quad (4.6)$$

Рівняння (4.6) є ЛНДР відносно невідомої функції $\omega(x)$. Знайдемо його розв'язок із застосуванням методу варіації сталої (Лагранжа), проілюстрованому в Прикладах 1.1, 2.1 та 3.1. Спочатку шукаємо загальний розв'язок відповідного до (4.6) однорідного рівняння:

$$\frac{d\omega}{dx} - \frac{2 \sin x}{\cos x} \omega = 0 \Rightarrow \frac{d\omega}{\omega} = \frac{2 \sin x dx}{\cos x},$$

звідки

$$\omega_{z.o.} = C e^{2 \int \operatorname{tg} x dx} = C \cos^{-2} x, \quad C = \text{const}. \quad (4.7)$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (4.6) будемо шукати у вигляді (4.7), вважаючи сталу C функцією незалежної змінної x :

$$\omega = C(x) \cos^{-2} x. \quad (4.8)$$

Функцію $C(x)$ знайдемо безпосередньою підстановкою (4.8) у (4.6):

$$C'(x) \cos^{-2} x + 2C(x) \cos^{-3} x \sin x - 2 \sin x \cos^{-1} x \cdot C(x) \cos^{-2} x = \sin x,$$

звідки

$$C'(x) = \sin x \cos^2 x \Rightarrow C(x) = -\frac{\cos^3 x}{3} + C_1,$$

де C_1 – довільна стала. Підставивши знайдений вираз для $C(x)$ у (4.8), одержимо загальний розв'язок ЛНДР першого порядку (4.6)

$$\omega = \left(-\frac{\cos^3 x}{3} + C_1 \right) \cdot \cos^{-2} x = \frac{C - \cos^3 x}{3 \cos^2 x}, \quad (4.9)$$

де $C = 3C_1$. Оскільки $\omega = z^{-1}$, то з (4.9) одержимо загальний розв'язок рівняння Бернуллі (4.4)

$$z = \omega^{-1} = \frac{3 \cos^2 x}{C - \cos^3 x},$$

а тоді згідно з (4.3) загальний розв'язок рівняння Ріккати (4.1) запишеться у вигляді

$$y = \frac{3\cos^2 x}{C - \cos^3 x} + \frac{1}{\cos x} = \frac{C + 2\cos^3 x}{\cos x(C - \cos^3 x)}. \quad (4.10)$$

Зауважимо, що при значенні $C = 0$ із (4.10) отримуємо частинний розв'язок рівняння (4.1) $y_2(x) = -\frac{2}{\cos x}$ у випадку $a = -2$. Однак частинний розв'язок (4.2) не одержується з (4.10) при жодному значенні сталої C , тому в остаточній відповіді його слід додати окремо.

Відповідь. $y = \frac{C + 2\cos^3 x}{\cos x(C - \cos^3 x)}, y = \frac{1}{\cos x}.$

Приклад 4.2. Зінтегрувати рівняння, попередньо звівши його до лінійного ДР першого порядку, і знайти його інтегральну криву, що проходить через точку $M(1,1)$:

$$xy' - xy^2 - (2x^2 + 1)y - x^3 = 0.$$

Розв'язання. Задане ДР (4.11) є рівнянням Ріккати

$$y' - (2x + x^{-1})y - y^2 = x^2, \quad (4.11)$$

яке можна звести до рівняння Бернуллі, а далі й до лінійного ДР, якщо відомий деякий його частинний розв'язок $y_1(x)$. Бачимо, що в лівій частині рівності (4.11) отримуються доданки, подібні до вільного члена (тобто многочлени степеня не вищого за другий), якщо покласти

$$y_1(x) = ax + b \Rightarrow y_1'(x) = a,$$

де a, b – сталі, значення яких визначаємо безпосередньою підстановкою в (4.11):

$$a - (2x + x^{-1})(ax + b) - (ax + b)^2 = x^2,$$

або після спрощення

$$(a + 1)^2 x^2 + 2b(a + 1)x + b^2 + bx^{-1} = 0.$$

Остання рівність виконується при $a = -1, b = 0$. Отже, за частинний розв'язок рівняння Ріккати (4.11) можна взяти функцію

$$y_1(x) = -x. \quad (4.12)$$

Введемо підстановку

$$y = y_1(x) + z(x) = -x + z(x), \quad (4.13)$$

де $z(x)$ – нова невідома функція. Тоді з (4.11) маємо:

$$z' - 1 - \left(2x + \frac{1}{x}\right)(z - x) - (z - x)^2 = x^2,$$

звідки після спрощення для нової невідомої функції $z(x)$ отримуємо рівняння Бернуллі при $\alpha = 2$

$$z' - \frac{z}{x} = z^2. \quad (4.14)$$

Зауважимо, що виведене ДР (4.4) має тривіальний розв'язок $z = 0$, однак для рівняння Ріккати (4.11) він не дає нового розв'язку, оскільки згідно з (4.13) у цьому випадку отримуємо вже відомий частинний розв'язок (4.12).

Оскільки в завданні вимагається попередньо звести ДР (4.1) до лінійного, то для інтегрування рівняння Бернуллі (4.14) скористаємося методом, проілюстрованим у Прикладі 4.1.

Поділимо ліву і праву частини рівності (4.14) на z^2 , вважаючи $z \neq 0$:

$$z^{-2}z' - (xz)^{-1} = 1. \quad (4.15)$$

Введемо підстановку

$$\omega(x) = z^{-1} \Rightarrow \omega' = -z^{-2}z' \Rightarrow z^{-2}z' = -\omega'.$$

Тоді з (4.15) одержимо рівняння

$$-\omega' - x^{-1}\omega = 1,$$

або

$$\omega' + \frac{\omega}{x} = -1. \quad (4.16)$$

Рівняння (4.16) є ЛНДР відносно невідомої функції $\omega(x)$. Будемо шукати його розв'язок методом підстановки (Д'Аламбера) у вигляді добутку двох функцій незалежної змінної x аналогічно до Прикладів 1.2, 2.2 та 3.2:

$$\omega = u(x) \cdot v(x). \quad (4.17)$$

Одну з двох функцій $u(x)$, $v(x)$ можна вибрати довільним чином, а друга визначиться на підставі рівняння (4.16).

Після підстановки (4.17) у рівняння (4.16) маємо:

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = -1$$

або

$$u'v + u \left[v' + \frac{v}{x} \right] = -1. \quad (4.18)$$

Будемо вимагати, щоб у (4.18) коефіцієнт при $u(x)$ перетворився на нуль, тоді за функцію $v(x)$ можна взяти будь-який розв'язок лінійного однорідного ДР

$$\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x},$$

наприклад, $v = e^{-\int \frac{dx}{x}} = x^{-1}$. Тоді з (4.18) для визначення функції $u(x)$ дістанемо рівняння

$$u'x^{-1} = -1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -x,$$

звідки $u = -0,5x^2 + C_1$, де C_1 – довільна стала. Підставивши знайдені функції $u(x)$ і $v(x)$ у (4.17), одержимо загальний розв'язок ЛНДР першого порядку (4.16)

$$\omega = x^{-1}(C_1 - 0,5x^2) = \frac{C - x^2}{2x}, \quad (4.19)$$

де $C = 2C_1$. Оскільки $\omega = z^{-1}$, то з (4.19) одержимо загальний розв'язок рівняння Бернуллі (4.14)

$$z = \omega^{-1} = \frac{2x}{C - x^2},$$

а тоді згідно з (4.13) загальний розв'язок рівняння Ріккаті (4.11) запишеться у вигляді

$$y = \frac{2x}{C - x^2} - x = \frac{(2 - C)x + x^3}{C - x^2}. \quad (4.20)$$

Зауважимо, що частинний розв'язок (4.12) не одержується з (4.20) при жодному значенні сталої C , тому в остаточній відповіді його слід додати окремо.

Виділимо з сім'ї кривих (4.20), (4.12) ту інтегральну криву, яка проходить через точку $M(1,1)$, тобто справджує початкову умову $y(1) = 1$. При значеннях $x = 1$, $y = 1$ (4.12) дає хибну рівність $1 = -1$, отже, частинний розв'язок (4.12) не є шуканою інтегральною кривою. Підставивши ті ж значення в (4.20), маємо:

$$1 = \frac{2 - C + 1}{C - 1} \Rightarrow C = 2.$$

Рівняння шуканої інтегральної кривої (розв'язку задачі Коші) отримаємо, підставивши значення $C = 2$ у формулу (4.20). Отже, $y = \frac{x^3}{2 - x^2}$.

Відповідь. $y = \frac{(2 - C)x + x^3}{C - x^2}$, $y = -x$; через точку $M(1,1)$ проходить інтегральна крива,

що задається рівнянням $y = \frac{x^3}{2 - x^2}$.

Примітка. Необхідні теоретичні відомості по темах розділу:

Маринець К. В. Диференціальні рівняння першого порядку та методи їх інтегрування. – Навчальний посібник з курсу «Диференціальні рівняння», частина I. – Ужгород: «Говерла», 2015. – С. 34-42.

Лекції до Модуля 1 – Лінійні рівняння першого порядку.