

РІВНЯННЯ, НЕ РОЗВ'ЯЗАНІ ВІДНОСНО ПОХІДНОЇ

1. Інтегровні типи неявних рівнянь першого порядку. Рівняння Лагранжа та Клеро

Неявними рівняннями першого порядку називаються рівняння, не розв'язані відносно похідної. Такі рівняння мають загальний вигляд

$$F(x, y, y') = 0. \quad (1.1)$$

Наведемо деякі типи рівнянь вигляду (1.1), які інтегруються в квадратурах.

1. Диференціальне рівняння першого порядку степеня n :

$$\sum_{k=0}^n a_{n-k}(x, y) \cdot (y')^k = 0. \quad (1.2)$$

Таке рівняння має m дійсних розв'язків вигляду

$$y' = f_k(x, y), \quad k = \overline{1, m} \quad (m \leq n). \quad (1.3)$$

Зінтегрувавши кожне з m рівнянь (1.3), одержимо загальний інтеграл ДР (1.2) у вигляді сукупності загальних інтегралів дочірніх ДР (1.3). Рівняння (1.2) допускає рівно m інтегральних кривих, що проходять через фіксовану точку (x_0, y_0) .

2. Диференціальне рівняння вигляду

$$f(y') = 0. \quad (1.4)$$

Припустимо, що рівняння (1.4) має дійсні корені $y' = K_i = \text{const}$, $i = \overline{1, m}$. Тоді

$y = K_i x + C$, звідки $K_i = x^{-1}(y - C)$. Підклавши ці значення у рівність (1.4) замість y' , одержимо загальний інтеграл ДР (1.4) у вигляді

$$f\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0.$$

3. Диференціальне рівняння, розв'язане відносно шуканої функції

$$y = f(x, y'), \quad (1.5)$$

інтегрується шляхом введення параметра

$$y' = p \Rightarrow dy = p dx. \quad (1.6)$$

Тоді з (1.5) $y = f(x, p)$ і $dy = f'_x dx + f'_p dp$. Із останньої рівності з урахуванням (1.6) одержимо явне ДР першого порядку відносно невідомої функції $x(p)$:

$$p dx = f'_x dx + f'_p dp \Rightarrow \frac{dx}{dp} = \frac{f'_p}{p - f'_x}. \quad (1.7)$$

Нехай $x = \varphi(p, C)$ – загальний розв'язок ДР (1.7). Тоді рівності

$$x = \varphi(p, C), \quad y = f[\varphi(p, C), p] \quad (1.8)$$

визначатимуть загальний інтеграл ДР (1.5) у параметричній формі. Загальний інтеграл у звичайному вигляді можна отримати, виключивши з рівностей (1.8) параметр p .

4. Диференціальне рівняння, розв'язане відносно незалежної змінної

$$x = f(y, y'), \quad (1.9)$$

інтегрується аналогічно до (1.5) шляхом введення параметра

$$y' = p \Rightarrow dx = \frac{dy}{p}. \quad (1.10)$$

Тоді з (1.9) $x = f(y, p)$ і $dx = f'_y dy + f'_p dp$. З останньої рівності, враховуючи (1.10), одержимо явне ДР першого порядку відносно невідомої функції $y(p)$:

$$\frac{dy}{p} = f'_y dy + f'_p dp \Rightarrow \frac{dy}{dp} = \frac{f'_p}{p^{-1} - f'_y}. \quad (1.11)$$

Нехай $y = \varphi(p, C)$ – загальний розв'язок ДР (1.11). Тоді рівності

$$y = \varphi(p, C), \quad x = f[\varphi(p, C), p] \quad (1.12)$$

визначатимуть загальний інтеграл ДР (1.9) у параметричній формі. Загальний інтеграл у звичайному вигляді можна отримати, виключивши з рівностей (1.12) параметр p .

5. Метод подвійної параметризації. У ДР вигляду (1.5), (1.9), а також у їх спрощених варіантах

$$y = f(y'), \quad x = f(y') \quad (1.13)$$

іноді зручно параметризувати по два [у випадку (1.13) – обидва] аргументи: $y = \varphi(t)$,

$y' = \psi(t)$ або $x = \varphi(t)$, $y' = \psi(t)$. Відповідно будемо мати: $dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)}$, або ж

$dy = y'dx = \psi(t)\varphi'(t)dt$, і третій аргумент знаходиться простим інтегруванням, після чого загальний інтеграл записуємо в параметричному або – після виключення параметра t – у звичайному вигляді.

6. Рівняння Лагранжа є частинним випадком ДР (1.5) вигляду

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'), \quad (1.14)$$

де φ , ψ – довільні функції аргументу y' .

Зінтегруємо ДР (1.14) описаним вище методом введення параметра:

$$y' = p \Rightarrow y = x\varphi(p) + \psi(p) \Rightarrow dy \equiv p dx = \varphi(p)dx + [x\varphi'(p) + \psi'(p)]dp.$$

Із останньої рівності одержуємо лінійне неоднорідне ДР першого порядку відносно невідомої функції $x(p)$ вигляду

$$x'(p) - \frac{x\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)},$$

загальний розв'язок якого дається формулою

$$x(p) = e^{\int \frac{\varphi'(p)dp}{p - \varphi(p)}} \left(C + \int \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)} \cdot e^{-\int \frac{\varphi'(p)dp}{p - \varphi(p)}} dp \right) = \chi(p, C).$$

Тоді загальний інтеграл рівняння Лагранжа (1.14) у параметричній формі дається рівностями

$$x = \chi(p, C), \quad y = \varphi(p)\chi(p, C) + \psi(p).$$

Зауважимо: якщо рівняння $p - \varphi(p) = 0$ має дійсні корені $p_i = \text{const}$, то до загального інтеграла ДР Лагранжа слід додати особливі розв'язки вигляду

$$y_i = x\varphi(p_i) + \psi(p_i).$$

7. Рівняння Клеро є простішим варіантом ДР (1.14) вигляду

$$y = xy' + \psi(y'), \quad (1.15)$$

де ψ – довільна функція аргументу y' .

Зінтегруємо ДР (1.15) описаним вище методом введення параметра:

$$y' = p \Rightarrow y = xp + \psi(p) \Rightarrow dy \equiv pdx = pdx + [x + \psi'(p)]dp.$$

Із останньої рівності одержуємо ДР вигляду

$$dp \cdot [x + \psi'(p)] = 0, \quad (1.16)$$

яке розпадається на два рівняння: $dp = 0$ і $x + \psi'(p) = 0$.

Якщо $dp = 0$, то $p = C$ і з (1.15) отримаємо загальний розв'язок рівняння Клеро

$$y = Cx + \psi(C).$$

Якщо $x + \psi'(p) = 0$, тобто $x = -\psi'(p)$, тоді з урахуванням (1.15) отримаємо рівності

$$x = -\psi'(p), \quad y = \psi(p) - p\psi'(p),$$

які визначають особливий розв'язок рівняння Клеро в параметричній формі. Отже, для рівняння Клеро як загальний, так і особливий розв'язки одержуються на підставі рівності (1.16) **без інтегрування**.

Зауважимо, що для ДР (1.15) незастосовні формули, виведені для більш загального ДР Лагранжа (1.14), оскільки у випадку рівняння Клеро $p - \varphi(p) = p - p = 0$.

2. Особливі розв'язки диференціальних рівнянь першого порядку

Розглянемо задачу Коші для ДР першого порядку (1.1), не розв'язаного відносно похідної, із початковою умовою

$$y(x_0) = y_0. \quad (2.1)$$

Має силу наступна

Теорема 2.1 (про існування і єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння першого порядку, не розв'язаного відносно похідної). Нехай ліва частина рівняння (1.1)

$F(x, y, y')$ неперервна разом із частинними похідними першого порядку в деякому h -околі точки $M_0(x_0, y_0, y'_0)$ де y'_0 розв'язок рівняння $F(x_0, y_0, y') = 0$, і справджує умови: $F(M_0) = 0$, $\partial F(M_0)/\partial y' \neq 0$. Тоді для всіх $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ диференціальне рівняння (1.1) має єдиний розв'язок $y(x)$, що справджує початкову умову (2.1).

Доведення. Якщо $\partial F/\partial y' \neq 0$ у точці M_0 , то згідно з теоремою про існування неявної функції ДР (1.1) визначає y' як однозначну функцію

$$y' = F_1(x, y) \quad (2.2)$$

у деякому h -околі точки M_0 . Функція $F_1(x, y)$ неперервна по обох аргументах і матиме неперервні частинні похідні першого порядку, тобто в розглядуваній області – h -околі точки M_0 – вона справджує умови теореми Коші-Пеано. Якщо $y = y(x)$ розв'язок ДР

(1.1), то з ДР (2.2) маємо: $y'(x_0) = F_1[x_0, y(x_0)] \equiv y'_0$. Тому ДР (2.2), а отже, і ДР (1.1), визначає в h -околі точки M_0 єдину функцію $y(x)$, яка справджує початкову умову (2.1): це впливає безпосередньо з теореми Коші-Пеано.

Означення 1. Розв'язок ДР (1.1), у кожній точці якого порушується умова єдиності (тобто не виконуються умови Теореми 2.1), називається **особливим**.

Припустимо, що ліва частина ДР (1.1) $F(x, y, y')$ є неперервною і має неперервні частинні похідні першого порядку за всіма аргументами. Тоді особливі розв'язки ДР (1.1) знаходять із системи рівнянь

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0, \\ F'_p(x, y, p) = 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

де $p = y'$ – параметр. Виключивши параметр p із (2.3), отримаємо деяку функцію $\varphi(x, y) = 0$, яка називається рівнянням **p -дискримінантної кривої**. Для кожної вітки p -дискримінантної кривої слід перевірити, чи є ця вітка розв'язком ДР (1.1), а якщо є, то чи буде цей розв'язок особливим, тобто чи дотикаються до нього в кожній точці інші розв'язки (що означає порушення умови єдиності). Для перевірки порушення умов єдиності користуються умовами дотику кривих $y = y_1(x)$ та $y = y_2(x)$ у точці з абсцисою x_0 , які мають вигляд

$$y_1(x_0) = y_2(x_0), \quad y'_1(x_0) = y'_2(x_0).$$

На практиці для дослідження ДР (1.1) на особливі розв'язки застосовується наступна

Теорема 2.2 (критерій існування особливих розв'язків рівняння першого порядку).

Нехай ліва частина рівняння (1.1) $F(x, y, y')$ неперервна разом із частинними похідними першого порядку в деякій замкненій області $D \subset R^3$. Тоді для того, щоб p -дискримінантна крива (p ДК) була особливим розв'язком ДР (1.1), необхідно й достатньо одночасного виконання умов

$$F(x, y, p) = 0, \quad (2.4)$$

$$F'_p(x, y, p) = 0, \quad (2.5)$$

$$F'_x(x, y, p) + pF'_y(x, y, p) = 0, \quad (2.6)$$

де p – параметр.

Доведення. Нехай p ДК – особливий розв'язок ДР (1.1). Тоді вона: **а)** справджує ДР (1.1) [тобто виконується умова (2.4)], і **б)** порушує умову єдиності в кожній своїй точці [тобто виконується умова (2.5)]. Диференціюючи (2.4) за змінною x із урахуванням (2.5), одержимо умову (2.6); при цьому всюди вважаємо $y' = p$.

Нехай тепер виконуються умови (2.4)-(2.6), а $y = \varphi(x)$ – p ДК, одержана шляхом виключення параметра p з системи (2.3) [тобто з рівностей (2.4), (2.5)]. Тоді, підклавши $y = \varphi(x)$ і $y' = \varphi'(x)$, із (2.6) з урахуванням (2.5) дістанемо:

$$\frac{dF(x, \varphi(x), \varphi'(x))}{dx} = 0, \quad \text{тобто } F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = C = \text{const}. \quad \text{Із (2.4) } C = 0, \quad \text{звідки впливає,}$$

що p ДК є розв'язком ДР (1.1).

Зауважимо, що особливі розв'язки можна шукати також за допомогою відомого загального інтеграла. Якщо відомий загальний інтеграл $\Phi(x, y, C) = 0$ ДР (1.1), то він визначає деяку однопараметричну сім'ю кривих, а **обвідна** $\varphi(x, y) = 0$ цієї сім'ї (тобто крива, в кожній точці якої має місце дотик із однією з кривих сім'ї), за умови її існування, є особливим розв'язком ДР (1.1). Якщо функція Φ має неперервні частинні похідні першого порядку, то для знаходження обвідної треба виключити параметр C із системи рівнянь

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \Phi'_C(x, y, C) = 0 \end{cases}$$

і перевірити, чи буде отримана **C-дискримінантна крива** обвідною, тобто чи дотикаються до неї в кожній точці криві сім'ї. Цю перевірку можна здійснити із застосуванням наведених вище умов дотику кривих.

Джерела:

Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959. – Стор. 104-135.

Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. – Стор. 34-39.