ТЕОРЕМА ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ, РОЗВ'ЯЗАНОГО ВІДНОСНО ПОХІДНОЇ

Розглянемо задачу Коші для явного рівняння першого порядку

$$y' = f(x,y) \tag{1}$$

із початковою умовою

$$y(x_0) = y_0 . \tag{2}$$

Для неї справедлива наступна

Теорема (***про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння першого порядку, розв'язаного відносно похідної***). Нехай права частина рівняння (1) $f(x,y)$

а) неперервна по обох аргументах у прямокутнику $\mathrm{D} = \{(x,y) \mid |x - x_0| \le a, \ |y - y_0| \le b\}$, де a, b – додатні сталі; тоді $f(x,y)$ є також обмеженою в D, тобто існує така додатна стала M, що при $\forall (x,y) \in \mathrm{D}$ $|f(x,y)| \le M$;

б) справджує умову Ліпшиця за змінною y в області D, тобто існує така стала $L > 0$ (***стала Ліпшиця***), що для довільних $(x,y_1),(x,y_2) \in \mathrm{D}$

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L\,|y_1 - y_2| . \tag{3}$$

Тоді існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ диференціального рівняння (1), визначений і неперервний на інтервалі $|x - x_0| \le h$, де $h = \min\{a, b/M\}$, який при $x = x_0$ набуває значення y_0.

<u>Доведення</u>. Зведемо рівняння (1) до еквівалентного інтегрального вигляду. Інтегруючи за змінною x у межах $[x_0, x]$, одержимо:

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y)\,dt . \tag{4}$$

Будемо розв'язувати інтегральне рівняння (4) методом послідовних наближень Пікара. Візьмемо за нульове наближення y_0, а наступні ітерації (послідовні наближення) шукатимемо за формулою

$$y_i = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{i-1})\,dt, \quad i = \overline{1,\infty}. . \tag{5}$$

Зауважимо, що при $|x - x_0| \le h$ буде $|x - x_0| \le a$, бо $h \le a$. Оцінимо послідовні наближення (5):

$$|y_1 - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\,dt \right| \le M\,|x - x_0| \le Mh \le b, \ \text{бо} \ \ h \le b/M ;$$

$$|y_2 - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_1)\,dt \right| \le M\,|x - x_0| \le b$$

тощо. Звідси випливає, що $|y_i - y_0| \le b$ для всіх $i = \overline{1,\infty}$, тобто послідовні наближення (5) не виходять за межі області D.
Покажемо, що існує границя послідовності ітерацій (5) $Y = \lim\limits_{i\to\infty} y_i$. Для цього розглянемо ряд

$$y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + ... + (y_i - y_{i-1}) + ..., \tag{6}$$

i-ва сума якого S_i рівна y_i, і покажемо, що він збігається до деякої неперервної функції $Y(x)$. Оцінка членів ряду (6) дає:

$$|y_1 - y_0| \le M|x - x_0|;$$

$$|y_2 - y_1| \le \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, y_1) - f(t, y_0)|\,dt \right| \overset{(3)}{\le} L \left| \int_{x_0}^{x} |y_1 - y_0|\,dt \right| \le$$

$$\le LM \left| \int_{x_0}^{x} |t - x_0|\,dt \right| = \frac{LM}{2}|x - x_0|^2$$

тощо. Отже, для всіх $i = \overline{1,\infty}$ справджується оцінка:

$$|y_i - y_{i-1}| \le \frac{ML^{i-1}}{i!}|x - x_0|^i.$$

Тоді при $|x - x_0| \le h$ ряд (6) мажорується числовим рядом

$$y_0 + Mh + M\frac{Lh^2}{2} + ... + M\frac{L^{i-1}h^i}{i!} + ... \tag{7}$$

Позначимо через u_i i-й член ряду (7). Згідно з ознакою Д'Аламбера

$$\lim_{i\to\infty} \frac{u_{i+1}}{u_i} = \lim_{i\to\infty} \frac{i!ML^i h^{i+1}}{(i+1)!ML^{i-1}h^i} = \lim_{i\to\infty} \frac{Lh}{i+1} = 0 < 1,$$

тобто ряд (7) збігається, а тому на підставі критерію Веєрштрасса ряд (6) збігається рівномірно для всіх x із інтервалу $|x - x_0| \le h$. Оскільки кожен член ряду (6) є неперервною функцією змінної x, то границя послідовності $Y(x) = \lim\limits_{i\to\infty} y_i$ існує і є неперервною функцією.
Переходячи в (5) до границі при $i \to \infty$, маємо:

$$Y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, Y(t))dt,$$

тобто гранична функція $Y(x)$ є розв'язком інтегрального рівняння (4), еквівалентного задачі Коші (1), (2). Отже, $Y(x)$ є розв'язком диференціального рівняння (1), який справджує початкову умову (2). Покажемо, що знайдений розв'язок є єдиним.
Припустимо, що крім $Y(x)$ існує інший розв'язок $Z(x)$ задачі Коші для рівняння (1) із початковою умовою (2). Нехай $Y(x) \ne Z(x)$ поблизу точки x_0 правіше від неї. Візьмемо деяке $\varepsilon > 0$; тоді згідно з припущенням $Y(x) \ne Z(x)$ для точок $x \in [x_0, x_0 + \varepsilon]$, а тому додатна функція $|Y(x) - Z(x)|$ досягає в деякій точці $\xi \ne x_0$ (оскільки $Y(x_0) = Z(x_0) = y_0$) цього інтервалу свого найбільшого значення $\theta > 0$. Згідно з (4)

$$Y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, Y(t))dt, \quad Z(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, Z(t))dt,$$

звідки з урахуванням умови Ліпшиця (3)

$$|Y(\xi) - Z(\xi)| = \theta \le \int_{x_0}^{\xi} | f(t, Y(t)) - f(t, Z(t)) | dt \le$$

$$\le L \int_{x_0}^{\xi} | Y(t) - Z(t) | dt < L \int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} \theta dt = L\theta\varepsilon.$$

Оскільки $\theta \ne 0$, то остання нерівність дає $L\varepsilon > 1$, що суперечить довільності ε (адже можна вибрати, наприклад, $\varepsilon = 1/L$). Отже, задача Коші (1), (2) за виконання умов теореми має єдиний розв'язок, визначений і неперервний на інтервалі $|x - x_0| \le h$.

Наприкінці зауважимо, що доведена теорема в різних джерелах нерідко згадується під різними власними назвами – зокрема «теорема Коші», «теорема Пеано», «теорема Коші-Пеано», «теорема Коші-Ліпшиця», «теорема Пікара», «теорема Пікара-Ліндельофа» тощо – на честь видатних математиків XIX-XX сторіч: французів Оґюстена-Луї Коші (1789-1857) та Шарля Еміля Пікара (1856-1941), німця Рудольфа Отто Сиґізмунда Ліпшиця (1832-1903), італійця Джузеппе Пеано (1858-1932), а також Ернста Леонарда Ліндельофа (1870-1946) з Фінляндії.

Приклад 1. Побудувати послідовні наближення до розв'язку задачі Коші:

$$y' = x - y^2, \quad y(0) = 0. \tag{8}$$

Розв'язання. Порівнюючи (8) із (1), (2), маємо: $f(x, y) = x - y^2$, $x_0 = y_0 = 0$. Візьмемо за нульове наближення $y_0 = 0$, а наступні ітерації (послідовні наближення) шукатимемо за формулою (5), яка для задачі (8) запишеться у вигляді

$$y_i = \int_0^x (t - y_{i-1}^2)dt, \quad i = \overline{1, \infty}. \tag{9}$$

При $i = 1$ формула (9) дає

$$y_1 = \int_0^x (t - y_0^2)dt = \int_0^x tdt = \frac{x^2}{2}.$$

Послідовно підставляючи в (9) наступні значення *i*, отримаємо відповідні наближення:

$$y_2 = \int_0^x (t - y_1^2)dt = \int_0^x \left(t - \frac{t^4}{4} \right) dt = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20};$$

$$y_3 = \int_0^x (t - y_2^2)dt = \int_0^x \left(t - \frac{t^4}{4} + \frac{t^7}{20} - \frac{t^{10}}{400} \right) dt = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20} + \frac{x^8}{160} - \frac{x^{11}}{4400}$$

тощо.

Джерело:

Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959. – Стор. 57-75.