

## ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ ТА ЗВІДНІ ДО НИХ

### 1. Лінійні рівняння першого порядку та методи їх інтегрування

**Означення 1.** *Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку* називається рівняння вигляду

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (1.1)$$

де  $p(x)$ ,  $q(x)$  – задані неперервні в області визначення рівняння функції. Якщо в (1.1)  $q(x) \equiv 0$ , то рівняння називається *лінійним однорідним*, у протилежному випадку – *лінійним неоднорідним*.

Лінійне диференціальне рівняння (1.1) не має особливих розв'язків, а його загальний розв'язок можна шукати двома способами.

**1. Метод варіації сталої (метод Лагранжа).** Спочатку знаходимо загальний розв'язок відповідного до (1.1) однорідного рівняння  $y' + p(x)y = 0$ . Це рівняння інтегрується шляхом відокремлення змінних:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx,$$

звідки

$$y_{z.o.} = C e^{-\int p(x)dx}, \quad C = const. \quad (1.2)$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (1.1) будемо шукати у вигляді (1.2) із застосуванням *методу варіації сталої*, тобто вважаючи сталу  $C$  функцією незалежної змінної  $x$ :

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}. \quad (1.3)$$

Функцію  $C(x)$  знайдемо безпосередньою підстановкою (1.3) в (1.1):

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

звідки

$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx} \Rightarrow C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C_1,$$

де  $C_1$  – довільна стала. Підставивши знайдений вираз для  $C(x)$  у (1.3) і перепозначивши задля зручності  $C_1 = C$ , одержимо формулу для загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння (ЛНДР) першого порядку (1.1)

$$y = e^{-\int p(x)dx} \cdot \left( C + \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx \right). \quad (1.4)$$

**2. Метод підстановки (метод Д'Аламбера).** Будемо шукати розв'язок ЛНДР (1.1) у вигляді добутку двох функцій незалежної змінної  $x$

$$y = u(x) \cdot v(x). \quad (1.5)$$

Одну з двох функцій  $u(x)$ ,  $v(x)$  можна вибрати довільним чином, а друга визначиться на підставі рівняння (1.1).

Після підстановки (1.5) в (1.1) маємо:

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$$

або

$$u'v + u[v' + p(x)v] = q(x). \quad (1.6)$$

Будемо вимагати, щоб у рівності (1.6) коефіцієнт при  $u(x)$  перетворився на нуль, тоді за функцію  $v(x)$  можна взяти будь-який розв'язок аналогічного до розглянутого вище лінійного однорідного ДР

$$v' + p(x)v = 0,$$

наприклад,  $v = e^{-\int p(x)dx}$ . Тоді з (1.6) для визначення функції  $u(x)$  дістанемо рівняння

$$u' e^{-\int p(x)dx} = q(x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = q(x) e^{\int p(x)dx},$$

звідки  $u = \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C$ , де  $C$  – довільна стала. Підставивши знайдені функції  $u(x)$  і  $v(x)$  у (1.5), для загального розв'язку ЛНДР першого порядку (1.1) одержимо вже виведену методом Лагранжа формулу (1.4).

## 2. Рівняння Бернуллі

**Означення 1.** Рівняння вигляду

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha, \quad (2.1)$$

де  $p(x)$ ,  $q(x)$  – задані неперервні функції,  $\alpha \in R \setminus \{0;1\}$ , називається **рівнянням Бернуллі**.

Легко бачити, що у випадку  $\alpha = 0$  ДР (2.1) є лінійним неоднорідним, а при  $\alpha = 1$  – лінійним однорідним.

Подібно до ЛНДР (1.1), рівняння Бернуллі інтегрується двома шляхами.

**1. Метод зведення до лінійного рівняння.** Поділимо ліву і праву частини рівності (2.1) на  $y^\alpha$ , вважаючи  $y \neq 0$ :

$$y^{-\alpha} y' + p(x) y^{1-\alpha} = q(x). \quad (2.2)$$

Введемо підстановку

$$z(x) = y^{1-\alpha} \Rightarrow z' = (1-\alpha) y^{-\alpha} y' \Rightarrow y^{-\alpha} y' = (1-\alpha)^{-1} z'.$$

Тоді з (2.2) одержимо рівняння

$$(1-\alpha)^{-1} z' + p(x)z = q(x),$$

або після домноження на  $1-\alpha \neq 0$

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x). \quad (2.3)$$

Рівняння (2.3) є ЛНДР відносно невідомої функції  $z(x)$ . Його загальний розв'язок можна записати з застосуванням формули (1.4):

$$z = e^{-(1-\alpha)\int p(x)dx} \cdot \left( C + \int (1-\alpha)q(x) e^{(1-\alpha)\int p(x)dx} dx \right). \quad (2.4)$$

Підклавши в (2.4) значення  $z = y^{1-\alpha}$ , дістанемо загальний інтеграл рівняння Бернуллі (2.1)

$$y^{1-\alpha} = e^{-(1-\alpha)\int p(x)dx} \cdot \left( C + \int (1-\alpha)q(x)e^{(1-\alpha)\int p(x)dx} dx \right). \quad (2.5)$$

Зауважимо, що у випадку  $\alpha > 0$  рівняння Бернуллі (2.1) має також особливий розв'язок  $y = 0$ .

**2. Метод підстановки (метод Д'Аламбера).** Аналогічно до випадку лінійного ДР шукаємо розв'язок рівняння Бернуллі (2.1) у вигляді добутку (1.5) двох функцій незалежної змінної  $x$ . Одну з двох функцій  $u(x)$ ,  $v(x)$  в (1.5) можна вибрати довільним чином, а друга визначиться на підставі рівняння (2.1).

Після підстановки (1.5) у (2.1) маємо:

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x) \cdot (uv)^\alpha$$

або

$$u'v + u[v' + p(x)v] = q(x) \cdot (uv)^\alpha. \quad (2.6)$$

Будемо вимагати, щоб у рівності (2.6) коефіцієнт при  $u(x)$  перетворився на нуль, тоді за функцію  $v(x)$  можна взяти будь-який розв'язок лінійного однорідного ДР

$$v' + p(x)v = 0,$$

наприклад,  $v = e^{-\int p(x)dx}$ . Тоді з (2.6) для визначення функції  $u(x)$  дістанемо рівняння

$$u' e^{-\int p(x)dx} = q(x) \cdot u^\alpha e^{-\alpha \int p(x)dx} \Rightarrow \frac{du}{dx} = q(x) \cdot u^\alpha e^{(1-\alpha)\int p(x)dx},$$

звідки після відокремлення змінних і наступного інтегрування маємо:

$$\frac{du}{u^\alpha} = q(x) e^{(1-\alpha)\int p(x)dx} dx \Rightarrow u^{1-\alpha} = (1-\alpha) \int q(x) e^{(1-\alpha)\int p(x)dx} dx + C,$$

де  $C$  – довільна стала. Підставивши знайдені функції  $u(x)$  і  $v(x)$  у формулу (1.5), яку задля спрощення запису можна розглядати у вигляді  $y^{1-\alpha} = u^{1-\alpha} \cdot v^{1-\alpha}$ , одержимо побудований вище методом зведення до лінійного рівняння загальний інтеграл (2.5) рівняння Бернуллі (2.1).

### 3. Рівняння Ріккати

**Означення 1.** Рівняння вигляду

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 = r(x), \quad (3.1)$$

де  $p(x)$ ,  $q(x)$ ,  $r(x)$  – задані неперервні функції, називається **рівнянням Ріккати**.

Легко бачити, що у випадку  $q(x) \equiv 0$  ДР (3.1) є лінійним неоднорідним, а у випадку  $r(x) \equiv 0$  – рівнянням Бернуллі при  $\alpha = 2$ . Надалі будемо вважати, що в (3.1)  $r(x)q(x) \neq 0$ .

Загалом рівняння Ріккати вигляду (3.1) не інтегрується в квадратурах. Однак якщо відомий деякий частинний розв'язок цього рівняння, то рівняння Ріккати зводиться до рівняння Бернуллі, і таким чином може бути розв'язане в квадратурах.

Справді, нехай  $y_1(x)$  – деякий частинний розв'язок ДР (3.1). Введемо підстановку

$$y = y_1(x) + z(x), \quad (3.2)$$

де  $z(x)$  – нова невідома функція. Тоді з (3.1) маємо:

$$y_1' + z' + p(x)(y_1 + z) + q(x)(y_1 + z)^2 = r(x),$$

або після перегрупування доданків

$$z' + \{p(x) + 2q(x)y_1\}z + q(x)z^2 + [y_1' + p(x)y_1 + q(x)y_1^2 - r(x)] = 0. \quad (3.3)$$

Оскільки  $y_1(x)$  є розв'язком ДР (3.1), то вираз у квадратних дужках у лівій частині рівності (3.3) очевидно обертається в нуль, тобто для нової невідомої функції  $z(x)$  отримуємо рівняння Бернуллі при  $\alpha = 2$

$$z' + \{p(x) + 2q(x)y_1\}z = -q(x)z^2.$$

Зінтегрувавши останнє рівняння одним із наведених вище методів, і підставивши знайдений розв'язок  $z(x)$  у (3.2), одержимо загальний розв'язок рівняння Ріккаті (3.1). Підібрати частинний розв'язок рівняння Ріккаті загалом досить складно. Однак іноді його вдається визначити, виходячи з вигляду вільного члена рівняння  $r(x)$ .

Наприклад, для рівняння  $y' + y^2 = x^2 - 2x$  у лівій частині будуть члени, подібні до доданків правої частини, якщо покласти  $y = ax + b$ . Підставляючи в рівняння і прирівнюючи коефіцієнти при подібних членах, знаходимо  $a$  і  $b$  (якщо тільки частинний розв'язок такого вигляду існує, що буває зовсім не завжди). Інший приклад: для рівняння  $y' + 2y^2 = 6x^{-2}$  такі ж міркування спонукають нас шукати частинний розв'язок у вигляді  $y = ax^{-1}$ . Підставивши  $y = ax^{-1}$  у рівняння, знаходимо значення сталої  $a$ .

#### **4. Деякі інші типи рівнянь першого порядку, що зводяться до лінійних**

**1.** Деякі рівняння стають лійними, якщо в них поміняти місцями шукану функцію та незалежну змінну. Наприклад, ДР  $y = (2x + y^3)y'$ , у якому  $y$  є функцією від  $x$ , не є лінійним. Запишемо його в диференціалах:  $ydx - (2x + y^3)dy = 0$ . Оскільки в це рівняння  $x$  і  $dx$  входять лінійно, то рівняння буде лінійним, якщо  $x$  вважати шуканою функцією, а  $y$  – незалежною змінною. Це рівняння може бути записане у вигляді

$$\frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}x = y^2$$

і розв'язується аналогічно до ДР (1.1).

Загалом до такого типу належать ДР, які подаються у вигляді лінійного неоднорідного рівняння

$$\frac{dx}{dy} + p(y)x = q(y), \quad (4.1)$$

або рівняння Бернуллі

$$\frac{dx}{dy} + p(y)x = q(y)x^\alpha, \quad \alpha \in R \setminus \{0;1\} \quad (4.2)$$

відносно невідомої функції  $x(y)$ . ДР (4.1) і (4.2) інтегруються аналогічно до рівнянь (1.1) і (2.1) відповідно, якщо вважати  $x$  шуканою функцією, а  $y$  – незалежною змінною.

## 2. Рівняння вигляду

$$f'(y) \cdot y' + p(x)f(y) = q(x), \quad y = y(x), \quad (4.3)$$

де  $f$  – деяка функція залежної змінної  $y$ , зводиться до лінійного очевидною підстановкою

$$z(x) = f(y) \Rightarrow z' = f'(y) \cdot y',$$

після якої для нової невідомої функції  $z(x)$  одержимо ЛНДР вигляду (1.1)

$$z' + p(x)z = q(x).$$

Частинним випадком ДР типу (4.3) є рівняння Бернуллі (2.1): його можна розглядати як лінійне відносно функції  $f(y) = y^{1-\alpha}$ .

До рівнянь типу (4.3) належить також ДР вигляду

$$y' + p(x) = q(x)e^{\alpha y}, \quad \alpha = \text{const} \neq 0,$$

яке зводиться до лінійного шляхом домноження на величину  $f(y) = -\alpha e^{-\alpha y}$  і введення підстановки  $z(x) = e^{-\alpha y}$ ,  $z' = -\alpha e^{-\alpha y} \cdot y'$ . Маємо:

$$-\alpha e^{-\alpha y} y' - \alpha p(x)e^{-\alpha y} = -\alpha q(x) \Rightarrow z' - \alpha p(x)z = -\alpha q(x).$$

Останнє рівняння є ЛНДР відносно нової невідомої функції  $z(x)$ .

## 3. Рівняння вигляду

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy + R(x, y)(xdy - ydx) = 0, \quad (4.4)$$

де  $M$ ,  $N$  і  $R$  однорідні функції, причому  $M$  і  $N$  – однакового виміру  $p$ ,  $R$  – іншого виміру  $k$ , називається **рівнянням Міндінга-Дарбу**. Покажемо, що заміною

$$y = xz, \quad dy = xdz + zdx \quad (4.5)$$

рівняння Міндінга-Дарбу зводиться до рівняння Бернуллі з шуканою функцією  $x(z)$ .

Підставимо (4.5) у (4.4):

$$M(x, xz)dx + N(x, xz)(xdz + zdx) + R(x, xz)(x[xdz + zdx] - xzdx) = 0,$$

або після спрощення і врахування вимірності однорідних функцій  $M$ ,  $N$  і  $R$

$$x^p M(1, z)dx + x^p N(1, z)(xdz + zdx) + x^k R(1, z) \cdot x^2 dz = 0,$$

звідки

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{N(1, z) \cdot x + R(1, z) \cdot x^{2+k-p}}{M(1, z) + zN(1, z)}. \quad (4.6)$$

Якщо  $k = p - 1$ , то ДР (4.6) є лінійним однорідним і інтегрується шляхом відокремлення змінних. Якщо  $k = p - 2$ , то ДР (4.6) є лінійним неоднорідним і інтегрується описаними вище методами Лагранжа або Д'Аламбера. В інших випадках ДР (4.6) є рівнянням Бернуллі, і інтегрується шляхом зведення до лінійного рівняння або методом підстановки  $x(z) = u(z) \cdot v(z)$ .

### Джерела:

Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т. 2. – М.: «Наука», 1970. – Стор. 32-38.

Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959. – Стор. 34-56.

Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. – Стор. 20-25.