

Лабораторна робота №2

Тема: Знаходження розв'язків диференціальних рівнянь чисельними методами

Мета: сформулювати поняття наближеного розв'язку, пояснити послідовність дій під час розв'язування рівнянь з однією змінною; сформулювати вміння розв'язувати рівняння з однією змінною; навчитися використовувати програмні засоби для розв'язування рівнянь з однією змінною.

Хід роботи:

Завдання. Знайти розв'язок диференціального рівняння $F(x,y,y')=0$ при відповідних початкових умовах на певній області дослідження:

- методом Ейлера ($y_{n+1}=y_n+h \times f(x_{n+1},y_n)$);
- модифікованим методом Ейлера ($y_{n+1}=y_n + \times [f(x_{n+1}+(h/2),y_n+(h/2))]$);
- методом Рунге-Кутта третього порядку ($y_{n+1}=y_n+(h/6) \times (k_1+4k_2+k_3)$, де $k_1=f(x_{n+1},y_n)$, $k_2=f(x_{n+1}+h/2, y_n+(k_1/2))$, $k_3=f(x_{n+1}+h, y_n-hk_1+2hk_2)$);
- методом Рунге-Кутта четвертого порядку ($y_{n+1}=y_n+(h/6) \times (k_1+2k_2+2k_3+k_4)$, де $k_1=f(x_{n+1},y_n)$, $k_2=f(x_{n+1}+h/2, y_n+(k_1/2) \times)$, $k_3=f(x_{n+1}+h/2, y_n+(k_2/2))$, $k_4=f(x_{n+1}+h, y_n+k_3)$).

Результати обчислень представити табличним та графічним методами. Зробити порівняння абсолютних похибок методів і зробити відповідні висновки щодо їх точності.

Приклад: Відомими чисельними методами (Ейлера та Рунге-Кутта) знайти розв'язок диференціального рівняння $y'=2y+x+5$ при наступних початкових умовах: $y(0)=0$, $h=0,1$ (h – заданий крок), $x=[0; 1]$ – область дослідження функції.

Необхідні розрахунки провести використовуючи середовище електронної таблиці Microsoft Excel (табл. 2.1.) та графічно (рис. 2.1.) представити результати обчислень диференціального рівняння.

Таблиця 2.1. Табличний вираз розв'язку диференціального рівняння

| x | y(метод Ейлера) | y(ММЕ) | y(метод Рунге-Кутта) 3п | y(метод Рунге-Кутта) 4п |
|-----|-----------------|-------------|-------------------------|-------------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0,1 | 0,51 | 0,52 | 0,598333333 | 0,878333333 |
| 0,2 | 1,132 | 1,142 | 1,347944444 | 1,735513889 |
| 0,3 | 1,8884 | 1,8984 | 2,284131481 | 2,772668056 |
| 0,4 | 2,80608 | 2,81608 | 3,450428827 | 4,059264614 |
| 0,5 | 3,917296 | 3,927296 | 4,900528887 | 5,657170115 |
| 0,6 | 5,2607552 | 5,2707552 | 6,700652294 | 7,639511754 |
| 0,7 | 6,88290624 | 6,89290624 | 8,932471162 | 10,09605642 |
| 0,8 | 8,839487488 | 8,849487488 | 11,69671443 | 13,13746018 |
| 0,9 | 11,19738499 | 11,20738499 | 15,11761447 | 16,9001913 |
| 1 | 14,03686198 | 14,04686198 | 19,34839118 | 21,55255966 |

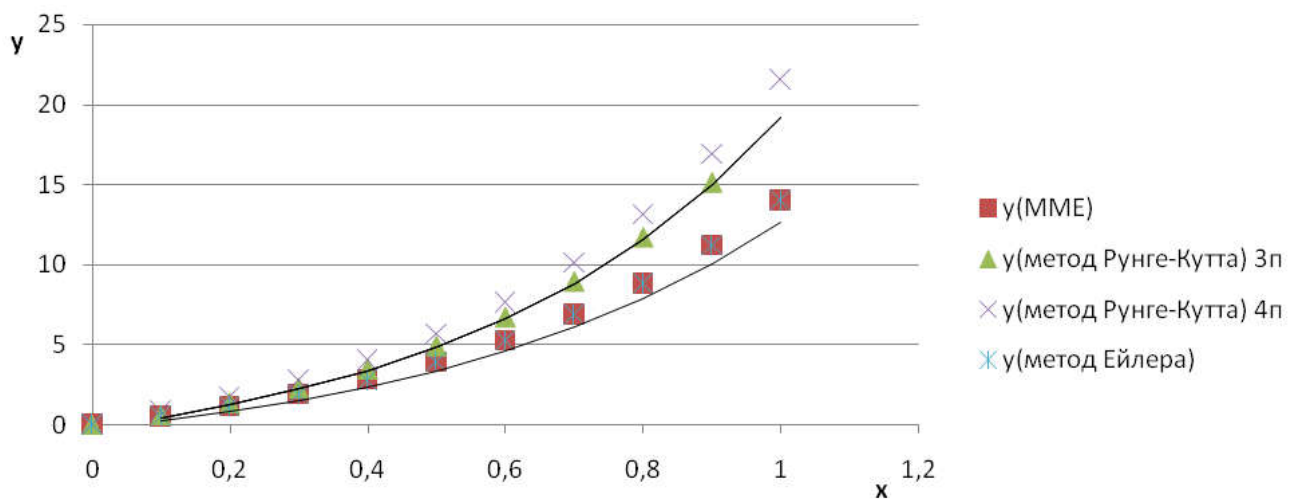


Рис. 2.1. Графічний вираз розв'язку диференціального рівняння чисельними методами

Завдання для індивідуальної роботи студентів:

Відомими чисельними методами (Ейлера та Рунге-Кутта) за номером варіанту (задається викладачем) знайти розв'язок диференціального рівняння при певних початкових умовах.

| № варіанту | Диференціальне рівняння | x_0 | y_0 | h | Область визначення x |
|------------|-------------------------|-------|-------|-----|------------------------|
| 1 | $y' = x + y + 3$ | 1 | 3 | 0,1 | 1 – 3 |
| 2 | $y' = 3x + 2y + 4$ | 0 | 1 | 0,2 | 0 – 5 |
| 3 | $y' = x + y + 7$ | 3 | 0 | 0,5 | 3 – 20 |
| 4 | $y' = 3y - 4x + 1$ | 0 | 2 | 0,3 | 0 – 2,7 |
| 5 | $y' = y + 2x + 8$ | 1 | 4 | 0,1 | 1 – 3 |
| 6 | $y' = 2x + 2y + 5$ | 2 | 1 | 0,1 | 2 – 4,4 |
| 7 | $y' = 2y + x + 3$ | 5 | 5 | 0,5 | 5 – 15 |
| 8 | $y' = y - 4x + 1$ | 2 | 0 | 0,4 | 2 – 5,6 |
| 9 | $y' = 2x + y + 4$ | 5 | 1 | 0,2 | 5 – 7,8 |
| 10 | $y' = x + 2y + 1$ | 1 | 5 | 0,1 | 1 – 3 |
| 11 | $y' = 2x + y + 3$ | 0 | 2 | 0,5 | 0 – 12 |
| 12 | $y' = y - 4x + 2$ | 2 | 0 | 0,3 | 2 – 5,1 |

Перелік питань для підготовки та самоконтролю студентів:

1. Поняття про диференціальні рівняння.
2. Задача Коші.
3. Похідна та її геометричний зміст.
4. Механічний зміст похідної.
5. Операції диференціювання та інтегрування.
6. Способи розв'язку диференціальних рівнянь: аналітичний (метод Бернуллі, Лагранжа та ін.) та чисельний.
7. Недоліки аналітичних методів розв'язання диференціальних рівнянь.
8. Поняття про чисельні методи. Метод Ейлера. Модифікований метод Ейлера.
9. Метод Рунге-Кутта 1-4 порядків. Метод Адамса.
10. Приклад простої математичної моделі в екології із побудовою похідної та диференціального рівняння.
11. Поняття наближеного числа.
12. Класифікація похибок наближених чисел.
13. Абсолютна похибка.
14. Відносна похибка.
15. Форми запису наближеного числа.
16. Поняття про значущі цифри.
17. Заокруглення чисел.
18. Оцінка похибок значень функцій.
19. Особливості комп'ютерної реалізації моделей. Види помилок і похибок при комп'ютерній реалізації.
20. Обернений аналіз похибок. Класифікація моделей.