МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
КАФЕДРА ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Поляк І.Й., Погоріляк О.О.

ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

ЧАСТИНА II

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять
для студентів математичного факультету

Ужгород – 2012

Поляк І.Й., Погоріляк О.О. **Методичні вказівки до практичних занять з теорії функцій комплексної змінної для студентів математичного факультету. Частина ІІ. –** Ужгород, 2012. – 30с.

У методичних вказівках проілюстровано основні методи розв’язування задач з комплексного аналізу по темах: «Розклад функцій в ряд Тейлора», «Нулі аналітичної функції», «Ряди Лорана», «Ізольовані точки аналітичної функції», «Обчислення лишків», «Обчислення інтегралів по замкненому контуру та за допомогою лишків», «Перетворення Лапласа та його застосування до розв’язування диференціальних рівнянь» а також наведені завдання для аудиторної та домашньої роботи.

Наведено робочу програму дисципліни «Комплексний аналіз».

Методичні вказівки розроблені для студентів математичного факультету спеціальностей «Математика» та «Прикладна математика».

Рекомендовано до друку засіданням методичної комісії математичного факультету, протокол № 6 від «9» лютого 2012 року.

Рецензенти:

Н. М. Щобак, кандидат фіз.-мат. наук, доцент (ДВНЗ «УжНУ»)

А. Ю. Брила, кандидат фіз.-мат. наук, доцент (ДВНЗ «УжНУ»)

ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ
«КОМПЛЕКСНИЙ АНАЛІЗ»

Змістовий модуль 2.

1. Функціональні послідовності. Рівномірна збіжність функціональної послідовності. Властивості рівномірно збіжних функціональних послідовностей.
2. Функціональні ряди, рівномірна збіжність. Властивості рівномірно збіжних функціональних рядів.
3. Степеневі ряди. Теорема Абеля. Теорема Коші-Адамара.
4. Рівномірна збіжність степеневого ряду, властивості.
5. Ряди Тейлора. Теорема про розклад функції в ряд Тейлора. Наслідки.
6. Узагальнені степеневі ряди. Область збіжності.
7. Теорема Лорана про розклад функції в ряд Лорана. Ряди Лорана відносно нескінченно віддаленої точки.
8. Теорема єдності для аналітичних функцій.
9. Принцип максимума модуля для аналітичних функцій.
10. Нулі аналітичних функцій. Властивості нулів.
11. Особливі точки аналітичних функцій. Теорема про усувну особливу точку.
12. Особливі точки аналітичних функцій. Полюс.
13. Істотно особливі точки. Теорема Сохоцького.
14. Лишки . Основна теорема про лишки.
15. Лишки. Формули для обчислення лишків відносно полюса.
16. Логарифмічні лишки. Принцип аргументу. Теорема Руше.
17. Обчислення визначеного інтегралу за допомогою лишків.
18. Обчислення невласних інтегралів за допомогою лишків.
19. Обчислення інтегралу виду $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x) dx$.
20. Аналітичні продовження функцій.
21. Означення перетворення Лапласа. Оригінал і зображення.
22. Перетворення Лапласа деяких елементарних функцій.
23. Властивості лінійності, теореми затухання, зміщення.
24. Зображення похідної, інтеграла. Зображення згортки.
25. Диференціювання і інтегрування зображення.
26. Знаходження оригіналу по зображенню. Формула Меліна.

Тема 1. <u>СТЕПЕНЕВІ РЯДИ</u>

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

<u>Задача 1.</u> Знайти радіуси збіжності рядів

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$.

<u>Розв'язання.</u> а) Позначимо $n! = m$. Коефіцієнти даного степеневого ряду $a_k = 0$, якщо $k \neq n!$ і $a_m = 2^n$, якщо $m = n!$. Тому

$$l = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{|a_m|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n!]{2^n} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{(n-1)!}} = 2^0 = 1.$$

Радіус збіжності даного ряду $R = 1$.

б) Маємо: $a_n = \frac{n!}{n^n}$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$.

Для визначення радіуса збіжності скористаємося другою формулою:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n!(n+1)^{n+1}}{(n+1)!n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

<u>Задача 2.</u> Вияснити, в яких точках границі круга збіжності збігається степеневий ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$.

<u>Розв'язання.</u> Радіус збіжності даного ряду $R = 1$, отже, границею круга збіжності є коло $\gamma = \{z : |z| = 1\}$.

При $z = 1$ маємо розбіжний гармонічний ряд.

Нехай тепер $z \neq 1$. Тоді при $z \in \gamma \left(z = e(\varphi)\right)$ одержимо:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e(k\varphi)}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\varphi}{k} + i\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\varphi}{k}.$$

Використовуючи розв'язок задачі 2 теми 4 методичних вказівок частини I, одержимо, що при $\varphi \neq 2k\pi \, (z \neq 1)$ суми $P_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \cos k\varphi$ і $Q_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin k\varphi$ обмежені, причому

$$|Q_n| \leq \frac{1}{\left|\sin \frac{\varphi}{2}\right|}, \; |P_n| = |S - 1| \leq |S| + 1 \leq \frac{1}{\left|\sin \frac{\varphi}{2}\right|} + 1, \; (\forall n \in \mathbf{N}).$$

Оскільки послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ монотонно спадаючи прямує до нуля, то за ознакою Абеля-Діріхле ряди $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos k\varphi$ і $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin k\varphi$ збіжні. Отже, даний ряд збігається в кожній точці $z \in \gamma$, за винятком точки $z = 1$.

Очевидно, ця збіжність не абсолютна.

ЗАДАЧІ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ І ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

1. Довести абсолютну збіжність рядів:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} z^n,\ |z|<1,\ \alpha\in\mathbf{C};\quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{(n!)^2}\cdot\frac{z^n}{1+z^n},\ |z|<\frac{1}{z};$$

$$3)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+z)\ln^2 n},\ z\neq -2,-3,\ \ldots;\quad 4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z(z+1)\cdot\ldots\cdot(z+n)}{n!},\ \operatorname{Re} z<-1.$$

2. Знайти області збіжності вказаних рядів:

$$1)\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{n!}+\frac{n^2}{z^n}\right);\ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{z(z+n)}{n}\right]^n;\ 3)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z+n};\ 4)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{1+z^{2n}}.$$

3. Довести, що дані ряди рівномірно збігаються на множинах E:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}z^{-2n},\ E=\{|z|\geq 1\};\ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}e^{-nz},\ E=\{\operatorname{Re} z\geq\delta>0\};$$

$$3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right),\ E=\{|z|=1\};\ 4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+z)^2},\ E=\{|z|\leq R<\infty\}.$$

4. Знайти радіуси збіжності рядів:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}z^n;\ 2)\ \sum_{n=0}^{\infty}z^{2^n};\ 3)\ \sum_{n=0}^{\infty}\left[3+(-1)^n\right]^n z^n;\ 4)\ \sum_{n=0}^{\infty}\left[1+i^n\right]^n z^n;$$

$$5)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2-i}{3}\right)^n z^n;\ 6)\ \sum_{n=1}^{\infty}(tgin)^n z^n;\ 7)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+2ni}{n+2i}\right)^n z^n.$$

5. Радіус збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ дорівнює $R\ (0<R<\infty)$. Визначити радіуси збіжності рядів:

$$1)\ \sum_{n=0}^{\infty}(2^n-1)c_n z^n;\ 2)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n!}z^n;\ 3)\ \sum_{n=1}^{\infty}n^n c_n z^n;$$

$$4)\ \sum_{n=0}^{\infty}(1+z_0^n)c_n z^n;\ 5)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{1+|c_n|}z^n.$$

6. Знайти круг збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{2^n+in}$.

7. Дослідити поведінку степеневого ряду на границі круга збіжності:

$$1)\ \sum_{n=0}^{\infty}z^n;\ 2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{p^n}}{n}\ (p\in\mathbf{C});\ 3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2};\ 4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}z^n.$$

Тема 2. РОЗКЛАД ФУНКЦІЇ В РЯД ТЕЙЛОРА

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Задача 1. Розкласти функцію $e^z\sin z$ в ряд Тейлора за степенями z.

Розв’язання. Користуючись розкладом функції e^t, одержимо:

$$e^z\sin z=e^z\frac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)=\frac{1}{2i}\left[e^{(1+i)z}-e^{(1-i)z}\right]=$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n z^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-i)^n z^n}{n!}\right]=\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n\frac{z^n}{n!}-\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^n\frac{z^n}{n!}\right]=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{2^n}\cdot\frac{1}{2i}\left(e^{i\frac{\pi}{4}n}-e^{-i\frac{\pi}{4}n}\right)\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{2^n}\cdot\sin\frac{\pi}{4}n\cdot\frac{z^n}{n!}.$$

Задача 2. Функцію $f(z)=\dfrac{2z-5}{z^2-5z+6}$ розкласти в ряд за степенями $(z-1)$ і знайти радіус збіжності одержаного ряду.

Розв’язання. Дану функцію розкладемо на суму простих дробів. Маємо:

$$\frac{2z-5}{(z-2)(z-3)}=\frac{A}{z-2}+\frac{B}{z-3};\ A=\left(\frac{2z-5}{z-3}\right)\bigg|_{z=2}=1;\ B=\left(\frac{2z-5}{z-2}\right)\bigg|_{z=3}=1.$$

Скориставшись розкладом одержимо:

$$f(z)=\frac{1}{z-2}+\frac{1}{z-3}=\frac{1}{(z-1)-1}+\frac{1}{(z-1)-2}=-\frac{1}{1-(z-1)}-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}}=-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)(z-1)^n.$$

Одержаний ряд збігається на множині $\{|z-1|<1\}\cap\left\{\left|\frac{z-1}{2}\right|<1\right\}$.

Отже, радіус збіжності $R=1$.

Задача 3. Знайти перші три відмінні від нуля члени розкладу функції $\operatorname{tg} z$ в степеневий ряд в околі точки $z_0=0$.

Розв’язання. Скористаємося методом невизначених коефіцієнтів. Нехай

$$\operatorname{tg} z=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots\ .$$

Тоді $\sin z=\cos z\left(a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots\right)$ або

$$z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots=\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots\right)\left(a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots\right).$$

Для визначення коефіцієнтів $a_0,\ a_1,\ a_2,\ldots$ряди в правій частині рівності перемножимо і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях z. Одержимо:

$$a_0=0,\ a_1=1,\ a_2=0, a_3-\frac{1}{2!}=-\frac{1}{3!},\ a_4-\frac{a_2}{2!}=0,\ a_5-\frac{a_3}{2!}+\frac{1}{4!}=\frac{1}{5!},\text{ або}$$

$$a_0=0,\ a_1=1,\ a_2=0, a_3=\frac{1}{3},\ a_4=0,\ a_5=\frac{2}{15}.$$

Шуканий розклад: $\operatorname{tg} z=z+\dfrac{1}{3}z^3+\dfrac{2}{15}z^5+\ldots.$

ЗАДАЧІ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ І ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

8. Вказані функції розкласти в ряди Тейлора за степенями z і знайти їх радіуси збіжності:

$$1)\ \mathrm{ch}\,z;\ 2)\ \mathrm{sh}\,z;\ 3)\ \arcsin z;\ 4)\ \mathrm{arctg}\,z;\ 5)\ \frac{1}{(1+z)^3};\ 6)\ \frac{1}{(z^2+1)^2};$$

$$7)\ \frac{z^2}{(1+z)^2};\ 8)\ \frac{z}{z^2-4z+13};\ 9)\ \frac{1}{(z^2-1)^2(z^2-4)};\ 10)\ \ln\frac{1+z}{1-z}.$$

9. Функції розкласти в степеневі ряди за степенями $z-z_0$ та визначити їх радіуси збіжності:

$$1)\ \frac{z}{z+2},\ z_0=0;\ 2)\ \frac{1}{2z+3},\ z_0=1;\ 3)\ \frac{z-i}{z+i},\ z_0=i;$$

$$4)\ \frac{z}{z^2-2z+5},\ z_0=1;\ 5)\ \frac{z}{(z^2+1)(z-1)},\ z_0=-1;$$

$$6)\ \cos z,\ z_0=\frac{\pi}{4};\ 7)\ \sin\left(2z-z^2\right),\ z_0=1.$$

10. Розкласти в ряд Тейлора в околі точки $z=0$ такі функції:

$$1)\ \sin^2 z;\ 2)\ \cos^2 z;\ 3)\ \mathrm{ch}\,z\cos z;\ 4)\ \cos^2 z+\mathrm{ch}^2 z;$$

$$5)\ \sin^4 z+\cos^4 z;\ 6)\ e^z\cos z;\ 7)\ e^z\sin z;\ 8)\ \cos^3 z.$$

11. За допомогою методу невизначених коефіцієнтів знайти перші три відмінні від нуля члени розкладу функцій в ряд Тейлора в околі точки $z=0$:

$$1)\ \frac{z}{\ln(1+z)};\ 2)\ \frac{z}{arctgz};\ 3)\ \frac{z}{\arcsin z};\ 4)\ e^{z\cos z}.$$

Тема 3. НУЛІ АНАЛІТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Задача 1. Знайти порядок нулів функції $f(z)=\ln\cos z$.

Розв'язання. Оскільки $\ln t=0 \Leftrightarrow t=1$, то звідси маємо $\cos z=1 \Leftrightarrow z=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Отже, нулями функції $f(z)$ є точки $z_k=2\pi k$.

Визначимо порядок цих нулів. Знаходимо:

$$f'(z)=-\mathrm{tg}\,z,\ f'(z_k)=0;\ f''(z)=-\frac{1}{\cos^2 z},\ f''(z_k)\neq 0.$$

Таким чином, всі нулі z_k даної функції другого порядку.

Задача 2. Знайти нулі функції $f(z)=\dfrac{(z^2-z-2)^3}{1+\cos\pi z}$ і їх порядки.

Розв'язання. Нулями $z \in \mathbf{C}$ даної функції можуть бути точки $z=-1$ і $z=2$, в яких чисельник перетворюється в нуль. Для знаменника $g(z)=1+\cos\pi z$ точка $z=-1$ – нуль 2-го порядку, оскільки $g(-1)=0$, $g'(-1)=-\pi\sin(-\pi)=0$, $g''(-1)=-\pi^2\cos\pi \neq 0$.

За теоремою про нулі функції $g(z)=(z+1)^2\varphi(z)$, де $\varphi(-1)\neq 0$.

Отже, $f(z)=\dfrac{(z+1)^3(z-2)^3}{(z+1)^2\varphi(z)}=(z+1)\cdot\dfrac{(z-2)^3}{\varphi(z)}$.

Це означає. Що $z=-1$ – нуль 1-го порядку функції $f(z)$. Оскільки $g(2)\neq 0$, то $z=2$ для даної функції є нулем 3-го порядку.

Задача 3. Визначити порядок нуля $z=\infty$ для функції $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z^4}$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $\varphi(t)=f\left(\dfrac{1}{t}\right)=\dfrac{t^{-2}+1}{t^{-4}}=t^2\left(1+t^2\right)$.

Для функції $\varphi(t)$ точка $t=0$ – нуль 2-го порядку, отже, для функції $f(z)$ точка $z=\infty$ – нуль теж 2-го порядку.

ЗАДАЧІ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ І ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

12. Знайти порядок нуля $z=0$ для функцій:

1) $z^2\left(e^{z^2}-1\right)$; 2) $6\sin z^3+z^3\left(z^6-6\right)$; 3) $e^{\sin z}-e^{\operatorname{tg} z}$.

13. Знайти порядки всіх нулів даних функцій:

1) $e^{z-1}-1$; 2) $e^{2z}-3e^z+2$; 3) $1-\cos z$; 4) $e^{\operatorname{tg} z}$;

5) $\sin^2 z+\sin z$; 6) $\dfrac{\sin^2(z-1)}{\cos\dfrac{\pi z}{2}}$; 7) $\dfrac{1-\cos z^2}{1+\cos z}$; 8) $e^{\frac{1}{z}}-1$;

9) $\dfrac{\left(z^2-9\right)^2(z-1)^3}{z^2-4z+3}$; 10) $\left(1-\sqrt{2-2\cos z}\right)^2$.

11) $\dfrac{\sin^3 z}{z^2}$; 12) $\dfrac{\left(1+z^2\right)^2}{1-z^2}$; 13) $\dfrac{1}{z^2}\exp\left\{\dfrac{1}{z+1}\right\}$.

14. Нехай функції $f(z)$ і $g(z)$ аналітичні в точці $z=z_0$ і $f(z_0)=g(z_0)=0$. Довести, що:

1) $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f'(z)}{g'(z)}$; 2) $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{g'(z)f^2(z)}{f'(z)g^2(z)}$.

Тема 4. РЯДИ ЛОРАНА

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Задача 1. Знайти область збіжності ряду Лорана $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{3^n+1}$.

Розв'язання. Виділимо правильну і головну частину ряду:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{3^n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n+1} + \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{z^n}{3^n+1} = \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n+1}\right)}_{(1)} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-n}}{3^{-n}+1}}_{(2)}.$$

Визначимо радіус збіжності ряду (1):

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+1}{3^n+1} = 3.$$

Поклавши $\frac{1}{z} = \zeta$, знайдемо радіус збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{-n}+1}\cdot\zeta^n$.

Маємо:

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{-n-1}+1}{3^{-n}+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{-1}+3^n}{1+3^n} = 1.$$

Ряд (2) збігається при $|z|^{-1} < 1$ або $|z| > 1$.

Отже, даний ряд збіжний в кільці $\{1 < |z| < 3\}$.

Задача 2. Розкласти в ряд Лорана функцію

$$f(z) = \frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)} \text{ в кільці } 1 < |z| < 2.$$

Розв'язання. Розклавши даний дріб на суму простих дробів, одержимо

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{2}{z^2+1}.$$

Функція $f_1(z) = \frac{1}{z-2}$ аналітична в крузі $|z| < 2$, розкладемо її в цьому крузі в ряд Тейлора. Маємо:

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{2^{k+1}}.$$

Функція $f_2(z) = \frac{-2}{z^2+1}$ має особливі точки $z = \pm i$, отже, вона є аналітичною при $|z| > 1$. В цій області функцію $f_2(z)$ розкладемо в ряд Лорана. Маємо:

$$\frac{-2}{z^2+1} = -\frac{2}{z^2}\cdot\frac{1}{1+1/z^2} = -\frac{2}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{z^2}\right)^k =$$

$$= 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{z^{2k+2}} = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n}}.$$

Взявши суму розкладів для f_1 і f_2, одержимо розклад в ряд Лорана функції $f(z)$:

$$f(z)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

Задача 3. Функцію $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}$ розкласти в ряд Лорана в околі точок $z=1$ і $z=\infty$.

Розв'язання. 1) Маємо: $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{z+(z-1)}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k(z-1)^k$ при $|z-1|<1$. Тому одержимо:

$$\frac{1}{z(1-z)}=-\frac{1}{z-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(z-1)^k=-\frac{1}{z-1}\left[1-(z-1)+(z-1)^2-\dots\right]=$$

$$=-\frac{1}{z-1}+1-(z-1)+(z-1)^2-\dots$$

або, теж саме – $\dfrac{1}{z(1-z)}=-\dfrac{1}{z-1}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$ при $0<|z-1|<1$.

2) При $|z|>1$ одержимо розклад

$\dfrac{1}{1-z}=-\dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\dfrac{1}{z}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^k}$, звідки маємо $\dfrac{1}{(1-z)z}=-\dfrac{1}{z^2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^k}=-\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^{k+2}}$ або, що теж саме – $\dfrac{1}{z(1-z)}=-\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{z^n}$ при $|z|>1$.

Задача 4. Функцію $f(z)=\sin\dfrac{z}{z-1}$ розкласти в ряд Лорана в околі точки $z=1$.

Розв'язання. Функцію представимо у вигляді

$$f(z)=\sin\frac{z}{z-1}=\sin\left(1+\frac{1}{z-1}\right)=\sin 1\cdot\cos\frac{1}{z-1}+\cos 1\cdot\sin\frac{1}{z-1}.$$

Користуючись відомими розкладами для функції $\cos t$ і $\sin t$ одержимо:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin 1}{(2k)!}\cdot\frac{1}{(z-1)^{2k}}+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos 1}{(2k+1)!}\cdot\frac{1}{(z-1)^{2k+1}}.\qquad(*)$$

Враховуючи, що

$$\sin\left(1+\frac{n\pi}{2}\right)=\begin{cases}(-1)^k\sin 1 \text{ при } n=2k,\\ (-1)^k\cos 1 \text{ при } n=2k+1,\end{cases}$$

з рівності (*) одержимо $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\sin\left(1+\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}(z-1)^{-n}$.

ЗАДАЧІ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ І ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

15. Знайти області збіжності рядів Лорана:

$$1)\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|} z^n;\ 2) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{n^2+1};\ 3)\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n z^n;$$

$$4)\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{\operatorname{ch} 2n};\ 5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^{n-3}};\ 6)\ 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{2n}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}};$$

$$7)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}}.$$

16. Вказані функції розкласти в ряд Лорана за степенями z в кільці $1<|z|<2$:

$$1)\ \frac{1}{(z+1)(z-2)};\ 2)\ \frac{z}{(z^2+1)(z+2)};\ 3)\ \frac{1}{(z-1)(z+2)}.$$

17. Дані функції розкласти в ряд Лорана в кільці Q:

$$1)\ f(z) = \frac{1}{z(z-3)^2},\ Q = \{1<|z-1|<2\};\ 2)\ f(z) = \frac{1}{z^2-3z+2},\ Q = \{|z|>2\};$$

$$3)\ f(z) = \frac{1}{(z^2-9)z^2},\ Q = \{1<|z-1<4|\};\ 4)\ f(z) = \frac{1}{(z^2-4)^2},\ Q = \{|z+2|>4\}.$$

18. Функції розкласти в ряд Лорана в околах відповідних точок z_0 і вказати області збіжності одержаних розкладів:

$$1)\ \frac{1}{(z^2+1)^2} \quad \text{в околі точок } z_0 = i \text{ і } z_0 = \infty;$$

$$2)\ \frac{1-e^{-z}}{z^3},\ z_0 = 0;\ 3)\ \frac{1+\cos^2 z}{z^4},\ z_0 = \infty;\ 4)\ z^2 \sin\frac{1}{z-1},\ z_0 = 1;$$

$$5)\ \cos\frac{z^2-4z}{(z-2)^2},\ z_0 = 2;\ 6)\ \frac{z^3}{(z+1)(z-2)},\ z_0 = -1;\ 7)\ \frac{1}{z(z-1)(z-2)},\ z_0 = 0.$$

Тема 5. <u>ІЗОЛЬОВАНІ ОСОБЛИВІ ТОЧКИ АНАЛІТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ</u>

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

<u>Задача 1.</u> Довести, що точка $z=0$ є усувною особливою точкою функції

$$f(z) = \frac{\operatorname{tg} z - \sin z}{z^3}.$$

<u>Розв'язання.</u> Маємо:

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} \cdot \frac{\frac{1}{\cos z} - 1}{z^2} =$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} \cdot \lim_{z\to 0} \frac{1}{\cos z} \cdot \lim_{z\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{z}{2}}{z^2} = \frac{1}{2} \lim_{z\to 0} \left(\frac{\sin \frac{z}{2}}{\frac{z}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}.$$

За означенням $z=0$ – усувна особлива точка деякої функції.

Задача 2. Довести, що точка $z=\infty$ є полюсом функції $f(z)=\dfrac{z^5}{(z-1)^2}$ і знайти її порядок.

Розв'язання. Для функції $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}=\dfrac{(z-1)^2}{z^5}$ точка $z=\infty$ є нулем, оскільки $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{(z-1)^2}{z^5}=0$. Розглянемо функцію

$$\psi(\zeta)=\varphi\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\frac{\left(\zeta^{-1}-1\right)^2}{\zeta^{-5}}=\zeta^3(1-\zeta)^2.$$

Для функції $\psi(\zeta)$ точка $\zeta=0$ – нуль 3-го порядку, тоже, $z=\infty$ – полюс 3-го порядку для функції $f(z)$.

Задача 3. Довести, що точка z_0 є істотно особливою точкою функції $f(z)$:

$$1)\, f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}},\ z_0=0;\quad 2)\, f(z)=\cos\frac{z}{z+1},\ z_0=-1.$$

Розв'язання. 1) Функцію розкладемо в ряд Лорана в околі точки $z=0$:

$$z^3e^{\frac{1}{z}}=z^3\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\ldots\right)=z^3+z^2+\frac{z}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!z}+\frac{1}{5!z^2}+\ldots.$$

Оскільки головна частина розкладу містить нескінчену кількість членів, то $z=0$ – істотно особлива точка даної функції.

1) Відомо, що $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ не існує, тому не існує і границя $\lim\limits_{\zeta\to\infty}\cos\zeta$ $(\zeta\in\mathbf{C})$.

Оскільки $\lim\limits_{z\to-1}\dfrac{z}{z+1}=\infty$, то $\lim\limits_{z\to-1}\cos\dfrac{z}{z+1}$ не існує. За означенням $z=-1$ – істотно особлива точка даної функції.

Задача 4. Знайти всі особливі точки функції $f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{z}$.

Розв'язання. Функцію подамо у вигляді $f(z)=\dfrac{z-e^z+1}{z\left(e^z-1\right)}$.

Визначимо в яких точках знаменник дробу перетворюється в нуль. Одержимо: $z_0=0,\ z_k=\mathrm{Ln}1=2\pi ki,\ k=\pm1,\ \pm2,\ldots.$

а) В околі точки $z_0=0$ маємо:

$$f(z)=\frac{z-1-z-\dfrac{z^2}{2!}-\ldots+1}{z\left(1+z+\dfrac{z^2}{2!}+\ldots-1\right)}=\frac{-\dfrac{z^2}{2!}-\dfrac{z^3}{3!}-\ldots}{z^2\left(1+\dfrac{z}{2}+\ldots\right)}=\frac{-\dfrac{1}{2}-\dfrac{z}{6}-\ldots}{1+\dfrac{z}{2}+\ldots}.$$

Оскільки існує $\lim\limits_{z\to0}f(z)=-\dfrac{1}{2}$, то $\mathrm{z}_0=0$ – усувна особлива точка функції $f(z)$.

б) В точках $z_k = 2\pi k i$ $\left(k = \pm 1,\ \pm 2, \ldots\right)$ чисельник дробу не дорівнює нулю. Через те, z_k – полюси функції $f\left(z\right)$.

Порядок полюсів z_k функції $f\left(z\right)$ співпадає з порядком нулів z_k функції $\varphi\left(z\right) = \dfrac{1}{f\left(z\right)} = \dfrac{z\left(e^z - 1\right)}{z - e^z + 1}$.

Оскільки при $z = z_k$ вираз $z - e^z + 1 = 2\pi k i \neq 0$, то досить визначити порядок нулів z_k функції $g\left(z\right) = z\left(e^z - 1\right)$. Маємо:

$g\left(2\pi k i\right) = 0$, $g'\left(z\right) = e^z - 1 + z e^z$, $g'\left(2\pi k i\right) = 2\pi k i \neq 0$.

Отже, точки $z_k = 2\pi k i$ $\left(k = \pm 1,\ \pm 2, \ldots\right)$ є полюсами 1-го порядку функції $f\left(z\right)$.

Точка $z = \infty$ – гранична точка для множини полюсів.

ЗАДАЧІ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ І ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

19. Довести, що точка z_0 є усувною особливою точкою відповідних функцій:

1) $\dfrac{z^2 - 1}{z - 1}$, $z_0 = 1$; 2) $\dfrac{1 - \cos z}{z^2}$, $z_0 = 0$; 3) $\operatorname{ctg} z - \dfrac{1}{z}$, $z_0 = 0$;

4) $\dfrac{1}{e^z - 1} - \dfrac{1}{\sin z}$, $z_0 = 0$; 5) $\dfrac{1 + \cos z}{z - \pi}$, $z_0 = \pi$; 6) $\dfrac{z}{z^2 + 1}$, $z_0 = \infty$;

7) $z\left(e^{\frac{1}{z}} - 1\right)$, $z_0 = \infty$; 8) $\dfrac{1 - \cos z^{-2}}{\sin z^{-2}}$, $z_0 = \infty$.

20. Знайти полюси даних функції і визначити їх порядок:

1) $\dfrac{\cos z}{\left(z^2 - z - 2\right)^2}$; 2) $\dfrac{z}{\left(z^3 + 1\right)^2}$; 3) $\dfrac{1}{2 - \cos z}$; 4) $\dfrac{z}{1 + e^z}$;

5) $\operatorname{tg} \pi z$; 6) $\operatorname{ctg} \pi z$; 7) $\dfrac{\sin \pi z / 2}{\sin^2\left(z - 1\right)}$; 8) $\dfrac{\cos z}{z^3 + z - 1}$.

21. Довести, що точка z_0 є істотно особливою точкою відповідних функції:

1) $\sin \dfrac{\pi}{z^2 + 1}$, $z_0 = -i$; 2) e^{-z^2}, $z_0 = \infty$; 3) $z^4 e^{\frac{1}{z}}$, $z_0 = 0$;

4) $z^2 \cos \dfrac{\pi}{z}$, $z_0 = 0$; 5) $\sin z + e^{\frac{1}{z}}$, $z_0 = \infty$; 6) $\dfrac{e^z}{e^z + 1}$, $z_0 = \infty$.

22. Знайти всі особливі точки відповідних функції і визначити їх тип:

1) $\dfrac{z}{\sin z}$; 2) $\dfrac{1 - \cos z}{\sin^2 z}$; 3) $z^2 \sin \dfrac{z}{z + 1}$; 4) $\operatorname{ctg} z - \dfrac{1}{z}$;

5) $\sin\left(e^{\frac{1}{z}}\right)$; 6) $z\left(e^{\frac{1}{z}} - 1\right)$; 7) $\dfrac{1 - e^z}{1 + e^z}$; 8) $z \operatorname{ch} \dfrac{1}{z}$; 9) $\operatorname{th} z$;

10) $e^{\frac{1}{\sin z}}$; 11) $\dfrac{\sin z}{z\left(z^2-1\right)}$; 12) $z^2\cos\dfrac{1}{z}-z$; 13) $\dfrac{z^3}{\sin^2\dfrac{1}{z+1}}$.

Тема 6. ОБЧИСЛЕННЯ ЛИШКІВ

РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Задача 1. Обчислити лишок функції $f(z)=\dfrac{z^{2n}}{(z+1)^n}$, $n\in\mathbf{N}$ в точці $z_0=-1$.

Розв’язання. За формулою бінома Ньютона маємо:

$$z^{2n}=\left[-1+(z+1)\right]^{2n}=1-C_{2n}^{1}(z+1)+C_{2n}^{2}(z+1)^2+\ldots+$$
$$+(-1)^{n+1}C_{2n}^{n-1}(z+1)^{n-1}+(-1)^n C_{2n}^{n}(z+1)^n+\ldots+(z+1)^{2n} \qquad (*)$$

Розділивши вираз (*) почленно на $(z+1)^n$, одержимо розклад функції $f(z)$ в ряд Лорана за степенями $(z+1)$. При цьому

$$C_{-1}(z+1)^{-1}=\frac{(-1)^{n+1}C_{2n}^{n-1}(z+1)^{n-1}}{(z+1)^n}.$$

За теоремою маємо

$$\operatorname*{res}_{-1}\frac{z^{2n}}{(z+1)^n}=C_{-1}=(-1)^{n+1}C_{2n}^{n-1}.$$

Задача 2. Обчислити $\operatorname*{res}_{0}\dfrac{1}{z-\sin z}$.

Розв’язання. Маємо:

$$z-\sin z=z-\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots\right)=\frac{z^3}{6}-\frac{z^5}{120}+\frac{z^7}{7!}-\ldots=$$
$$=z^3\left(\frac{1}{6}-\frac{z^2}{120}+\frac{z^4}{7!}-\ldots\right)=z^3\psi(z),$$

де $\psi(z)=\dfrac{1}{6}-\dfrac{z^2}{120}+\dfrac{z^4}{7!}-\ldots$.

Отже, $\dfrac{1}{z-\sin z}=\dfrac{\varphi(z)}{z^3}$, де $\varphi(z)=\dfrac{1}{\psi(z)}$, $\varphi(z)$ – аналітична функція і $\varphi(0)\neq 0$. Це означає, що $z_0=0$ – полюс 3-го порядку для функції $\dfrac{\varphi(z)}{z^3}$. За формулою одержимо:

$$\operatorname*{res}_{0}\frac{1}{z-\sin z}=\frac{1}{2!}\varphi''(0).$$

Обчислимо $\varphi''(0)$. Маємо: $\varphi'=\left(\psi^{-1}\right)'=-\psi^{-2}\psi'$, $\varphi''=\left(-\psi^{-2}\psi'\right)'=$

$= 2\psi^{-3}(\psi')^2 - \psi^{-2}\psi''$, причому $\psi' = -\dfrac{2z}{120} + \dfrac{4z^3}{7!} - \ldots$,

$$\psi'' = -\frac{z}{60} + \frac{12z^2}{7!} - \ldots,\ \psi'(0) = 0,\ \psi''(0) = -\frac{1}{60},\ \psi(0) = \frac{1}{6}.$$

Звідси одержимо: $\varphi''(0) = -6^2\left(-\dfrac{1}{60}\right) = \dfrac{6}{10}$, $\operatorname*{res}\limits_{0} \dfrac{1}{z - \sin z} = 0{,}3.$

<u>Задача 3.</u> Обчислити лишки функції $f(z) = \dfrac{\sin z}{\left(z^2+1\right)^2}$ в усіх її особливих точках і в точці $z = \infty$.

<u>Розв'язання.</u> Функція $f(z) = \dfrac{\sin z}{(z+i)^2(z-i)^2}$ має особливі точки: $z_1 = i,\ z_2 = -i$ – полюс 2-го порядку і $z_3 = \infty$ – істотно особливу точку.

За формулою

$$\operatorname*{res}_{i} f(z) = \left[\frac{\sin z}{(z+i)^2}\right]'\Bigg|_{z=i} = \frac{\cos z \cdot (z+i)^2 - 2(z+i)\sin z}{(z+i)^4}\Bigg|_{z=i} =$$

$$= \frac{-4\cos i - 4i\sin i}{16} = -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{-1}+e}{2} + \frac{e^{-1}-e}{2}\right) = -\frac{1}{4}e^{-1}.$$

Враховуючи, що функція $f(z)$ непарна, то лишок в симетричних точках співпадає

$$\operatorname*{res}_{-i} f(z) = -\frac{1}{4}e^{-1}.$$

Користуючись теоремою про суму всіх лишків, одержимо

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = -\operatorname*{res}_{i} f(z) - \operatorname*{res}_{-i} f(z) = \frac{1}{2}e^{-1}.$$

ЗАДАЧІ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ І ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

23. Обчислити лишки функцій в усіх особливих точках і в точці $z = \infty$ (якщо вона не є граничною для особливих точок):

1) $\dfrac{1}{z^3 - z^5}$; 2) $\dfrac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2}$; 3) $\dfrac{1}{z\left(1-z^2\right)}$; 4) $\dfrac{\sin 2z}{(z+1)^3}$;

5) $\dfrac{e^z}{z^2\left(z^2+9\right)}$; 6) $\operatorname{tg} z$; 7) $\dfrac{1}{\sin z}$; 8) $\operatorname{ctg}^2 z$; 9) $\dfrac{z-1}{z^{13}(z+2)}$;

10) $\sin z \cdot \sin\dfrac{1}{z}$; 11) $\sin\dfrac{z}{z+1}$; 12) $z^n \sin\dfrac{1}{z}$ $(n \in \mathbf{N})$;

13) $\dfrac{1}{z\left(z - e^{-hz}\right)}$, $(h \neq 0)$; 14) $z^3 \cos\dfrac{1}{z-2}$; 15) $\dfrac{\operatorname{tg} z}{z^n}$;

16) $\dfrac{\cos z}{\left(z^2+1\right)^2}$; 17) $\dfrac{1}{z^6(z-2)}$; 18) $\dfrac{1+z^{10}}{z^6\left(z^2+4\right)}$.

24. Обчислити:

$$1)\ \operatorname*{res}_0 \frac{z^{n-1}}{\sin^n z}\ \ (n\in\mathbf{N});\ 2)\ \operatorname*{res}_0 \frac{\operatorname{tg} z - z}{(1-\cos z)^2};\ 3)\ \operatorname*{res}_\infty \frac{\sin\frac{1}{z}}{z-1};$$

$$4)\ \operatorname*{res}_0\left(z^{n-3}\operatorname{ctg}^n z\right)\ (n=2,3,\ldots);\ 5)\ \operatorname*{res}_\infty \frac{\cos^2\frac{\pi}{z}}{z+1};\ 6)\ \operatorname*{res}_\infty\left(z\cos^2\frac{\pi}{z}\right).$$

Тема 7. ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ ПО ЗАМКНЕНОМУ КОНТУРУ

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Задача 1. Обчислити інтеграл

$$\int\limits_{|z|=1} e^{z+\frac{1}{z}}dz.$$

Розв'язання. Перемноживши ряди в правій частині рівності

$$e^z\cdot e^{\frac{1}{z}}=\left(1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots\right)\left(1+\frac{1}{1!z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\ldots\right),$$

одержимо розклад підінтегральної функції $f(z)=e^{z+\frac{1}{z}}$ в ряд Лорана в околі її особливої точки $z_0=0$.

Для обчислення $\operatorname*{res}_0 f(z)$ досить знати коефіцієнт C_{-1} при z^{-1} степені розкладу. Маємо:

$$C_{-1}=\frac{1}{1!}+\frac{1}{1!2!}+\frac{1}{2!3!}+\frac{1}{3!4!}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(k+1)!}.$$

Всередині кола $\{|z|=1\}$ функція $f(z)$ має одну особливу точку $z_0=0$. За основною теоремою про лишки

$$\int\limits_{|z|=1} e^{z+\frac{1}{z}}dz=2\pi i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(k+1)!}.$$

Задача 2. Обчислити інтеграл

$$I=\int\limits_{|z|=2}\frac{dz}{(z-3)\left(z^5-1\right)}.$$

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(z)=\dfrac{dz}{(z-3)\left(z^5-1\right)}$ має особливі точки:

$$z_k=\left(\sqrt[5]{1}\right)_k\ \ \left(k=\overline{1,5}\right),\ z_6=3,\ z_7=\infty.$$

При цьому кругу $|z|<2$ належать точки z_k $\left(k=\overline{1,5}\right)$. За основною теоремою про лишки

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^{5} \operatorname*{res}_{z_k} f(z).$$

Або за теоремою про суму всіх лишків:

$$\sum_{k=1}^{5} \operatorname*{res}_{z_k} f(z) = -\left[\operatorname*{res}_{\infty} f(z) + \operatorname*{res}_{3} f(z)\right]. \qquad (*)$$

Для обчислення лишку в нескінченності скористаємось формулою

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{-z}{(z-3)\left(z^5-1\right)} = 0.$$

Для функції $f(z)$ точка $z_0 = 3$ – полюс 1-го порядку. Тому маємо:

$$\operatorname*{res}_{3} f(z) = \left.\frac{1}{z^5-1}\right|_{z=3} = \frac{1}{3^5-1} = \frac{1}{242}.$$

Враховуючи рівність (*). одержимо:

$$I = -2\pi i \frac{1}{242} = -\frac{\pi i}{121}.$$

Задача 3. Обчислити інтеграл

$$I = \int_C \frac{dz}{(z-1)^3\left(z^2+1\right)}, \quad \text{де} \quad C = \left\{|z-1-i| = 2\right\}.$$

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^3(z+i)(z-i)}$ має особливі точки: $z_1 = 1$ – полюс 3-го порядку; $z_2 = i$, $z_3 = -i$ – полюси 1-го порядку. Кругу $\left\{|z-1-i|<2\right\}$ належать точки z_1 і z_2. Оскільки при $z=-i$ маємо $|z-1-i|>2$, то точка $z_3=-i$ лежить ззовні круга $\left\{|z-1-i|\le 2\right\}$. За основною теоремою про лишки, маємо $I = 2\pi i\left[\operatorname*{res}_{1} f(z) + \operatorname*{res}_{i} f(z)\right]$. Користуючись формулами для обчислення лишків, одержимо:

$$\operatorname*{res}_{1} f(z) = \frac{1}{2!}\left.\left(\frac{1}{z^2+1}\right)''\right|_{z=1} = \left.\frac{3z^5-1}{\left(z^2+1\right)^3}\right|_{z=1} = \frac{1}{4}.$$

$$\operatorname*{res}_{i} f(z) = \left.\frac{1}{(z-1)^3(z+i)}\right|_{z=i} = -\frac{1+i}{8}.$$

Отже, даний інтеграл: $I = 2\pi i\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1+i}{8}\right) = \dfrac{\pi}{4}(1+i).$

25. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_C \frac{dz}{z^4+1}$, де $C-$коло $x^2+y^2=2x$;

2) $\int\limits_C \frac{e^z}{z^2\left(z^2-9\right)}dz,\ C=\left\{z:|z|=1\right\}$;

3) $\int\limits_C \frac{z^2+1}{z^2\left(z^2-2\right)}dz,\ C=\left\{z:|z+1|+|z-1|=6\right\}$;

4) $\int\limits_C \frac{z\sin z}{\left(z-1\right)^5}dz,\ C=\left\{z:|z|=2\right\}$;

5) $\int\limits_C \frac{z\,\mathrm{sh}\,zdz}{z^2+z-6}$, де $C-$трикутник з вершинами в точках $3i,\ 3,\ \text{-}3i$;

6) $\int\limits_C z^2\,\mathrm{tg}\,\pi z dz,\ C=\left\{z:|z|=1\right\}$;

7) $\int\limits_C \frac{\mathrm{sh}\,zdz}{1-\sin\pi z},\ C=\left\{z:|z-1|=1\right\}$;

8) $\int\limits_{|z|=2} \frac{z^3}{z^4-1}dz$;

9) $\int\limits_{|z|=r} \sin^2\frac{1}{z}dz$;

10) $\int\limits_{|z|=4} \frac{z^3}{e^{z^2}-1}dz$;

11) $\int\limits_C \frac{\sin z}{\left(z+1\right)^3}dz;\ \ C=\left\{\left(x,y\right):x^{2/3}+y^{2/3}=2^{2/3}\right\}$;

12) $\int\limits_{\partial G} \sin\frac{z}{z+1}dz,\ G=\left\{z:|z|>9\right\}$;

13) $\int\limits_{\partial G} \frac{\mathrm{ctg}\,z}{z}dz,\ \ G=\left\{z:|z|>1\right\}$;

14) $\int\limits_{\partial G} \frac{dz}{\left(z^2-1\right)^2\left(z-3\right)^2},\ \ G=\left\{z:2<|z|<4\right\}$;

15) $\int\limits_{\partial G} \frac{z}{z+3}e^{\frac{1}{3z}}dz,\ G=\left\{z:|z|>4\right\}$.

Тема 8. ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНИХ І НЕВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ЛИШКІВ

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Задача 1. Обчислити інтеграл

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{a+\sin\varphi},\quad \text{де } a>1.$$

Розв'язання. Складемо функцію

$$F(z)=\frac{1}{iz}\cdot\frac{1}{a+\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)}=\frac{2}{z^2+2aiz-1}.$$

Розв'язавши рівняння $z^2+2aiz-1=0$, одержимо

$$z=-ai\pm\sqrt{-a^2+1}=-ai\pm\sqrt{a^2-1}i=\left(-a\pm\sqrt{a^2-1}\right)i.$$

Точки $z_1=-\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)i$ і $z_2=\left(-a+\sqrt{a^2-1}\right)i$ – полюси 1-го порядку для функції $F(z)$. Оскільки $a>1$, то маємо: $|z_1|=a+\sqrt{a^2-1}>1$, $|z_2|=a-\sqrt{a^2-1}<1$. На основі теореми про обчислення визначених інтегралів, одержимо

$$I=2\pi i\operatorname*{res}_{z_2}F(z)=2\pi i\left.\frac{2}{z-z_1}\right|_{z=z_2}=\frac{4\pi i}{z_2-z_1}=\frac{4\pi i}{2i\sqrt{a^2-1}}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Задача 2. Обчислити інтеграл

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)\left(x^2+b^2\right)},\quad \text{де } a,b>0.$$

Розв'язання. Функція $f(z)=\dfrac{1}{\left(z^2+a^2\right)\left(z^2+b^2\right)}$ у верхній півплощині має особливі точки $z_1=ai,\ z_2=bi$ – полюси 1-го порядку. За теоремою про обчислення визначених інтегралів, одержимо

$$I=2\pi i\left[\operatorname*{res}_{z_1}f(z)+\operatorname*{res}_{z_2}f(z)\right]=2\pi i\left[\left.\frac{1}{(z+ai)\left(z^2+b^2\right)}\right|_{z=ai}+\left.\frac{1}{\left(z^2+a^2\right)(z+bi)}\right|_{z=bi}\right]=$$

$$=2\pi i\left[\frac{1}{2ai\left(b^2-a^2\right)}+\frac{1}{2bi\left(a^2-b^2\right)}\right]=\frac{\pi}{ab(a+b)}.$$

Задача 3. Обчислити інтеграл

$$I=\int_0^{\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+b^2}dx,\quad \text{де } a,b>0.$$

Розв'язання. Враховуючи парність підінтегральної функції, одержимо:

$$I = \frac{1}{2} I_1, \quad \text{де } I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + b^2} dx.$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{iax}}{x^2 + b^2} dx = 2\pi i \operatorname*{res}_{bi} \frac{z e^{iaz}}{z^2 + b^2} =$$

$$= 2\pi i \left(\frac{z e^{iaz}}{z + bi} \right) \Bigg|_{z=bi} = 2\pi i \frac{bie^{-ab}}{2bi} = \pi e^{-ab} i.$$

Оскільки $I_1 = \operatorname{Im} I_2$, то даний інтеграл $I = \dfrac{\pi}{2} e^{-ab}$.

ЗАДАЧІ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ І ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

26. Обчислити визначені інтеграли:

1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{2 + \cos\varphi}{2 - \sin\varphi} d\varphi$; 2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{5 + 4\cos x} dx$; 3) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$, $a > b > 0$;

4) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a + b\cos\varphi)^2}$, $a > b > 0$; 5) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a + b\cos^2\varphi)^2}$, $a > 0$, $b > 0$;

6) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sin\varphi + \cos\varphi + 2}$; 7) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}$;

8) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5 + 3\cos\varphi}$; 9) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{13 + 12\sin\varphi}$;

10) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - 2a\cos\varphi + a^2}$, де $a \in$, $a \neq \pm 1$;

11) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^3 3\varphi \, d\varphi}{1 - 2a\cos\varphi + a^2}$, де $a \in$, $a \neq \pm 1$;

27. Обчислити невласні інтеграли:

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(a + bx^2)^2}$, де $a, b > 0$; 2) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$; 3) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^6}$;

4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{(x^2 + 4x + 13)^2}$; 5) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x - 1}{(x^2 + 1)^2} dx$; 6) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^3}$;

7) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^3}$; 8) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx$; 9) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)(x^2 + 1)^2}$;

10) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + b^2} dx$, $a, b > 0$; 11) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx$;

12) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{i\alpha x}}{1 + x^2} dx$; 13) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2 + a^2} dx$; 14) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2 \cos x}{(x^2 + 1)^2} dx$;

15) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^4}dx$; 16) $\int\limits_0^{\infty}\frac{\cos 2x}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$; 17) $\int\limits_0^{\infty}\frac{x^3\sin ax}{(1+x^2)^2}dx$, $a>0$.

Тема 9. ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА

РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Задача 1. Знайти перетворення Лапласа наступних функцій:

1) $f(x)=\sin\alpha t-\operatorname{sh}\alpha t$; 2) $f(t)=\operatorname{ch}3t\sin^2 t$;

3) $f(t)=t\sin\alpha t$; 4) $f(t)=\dfrac{e^{-\alpha t}\sin t}{t}$.

Розв’язання.

1) Скористаємось теоремою подібності, згідно якої, якщо $f(t)\risingdotseq F(p)$, то $f(\alpha t)\risingdotseq\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$. Відомо, що $\sin t\risingdotseq\frac{1}{p^2+1}$, $\operatorname{sh}t\risingdotseq\frac{1}{p^2-1}$, тому, використовуючи лінійність перетворення Лапласа

$$\sin\alpha t-\operatorname{sh}\alpha t\risingdotseq\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\frac{p^2}{\alpha^2}+1}-\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\frac{p^2}{\alpha^2}-1}=-\frac{2\alpha^3}{p^4-\alpha^4}.$$

2) Перетворимо кожну з функцій оригіналів до вигляду, щоб застосувати формули таблиці основних зображень та теорему запізнення.

$$\operatorname{ch}3t\sin^2 t=\frac{e^{3t}+e^{-3t}}{2}\frac{1-\cos 2t}{2}=\frac{1}{4}\left(e^{3t}+e^{-3t}-e^{3t}\cos 2t-e^{-3t}\cos 2t\right)\risingdotseq$$

$$\risingdotseq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{p-3}+\frac{1}{p+3}-\frac{p-3}{(p-3)^2+4}-\frac{p+3}{(p+3)^2+4}\right).$$

3) Застосуємо теорему про диференціювання зображення, згідно якої, якщо $f(t)\risingdotseq F(p)$, то $t^n f(t)\risingdotseq(-1)^n F^n(p)$. Оскільки $\sin\alpha t\risingdotseq\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$, то

$$t\sin\alpha t\risingdotseq-\left(\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}\right)'=\frac{2p\alpha}{(p^2+\alpha^2)^2}.$$

4) Застосуємо теорему про інтегрування зображення, згідно якої, якщо $f(t)\risingdotseq F(p)$ та інтеграл $\int\limits_p^{\infty}F(p)dp$ збігається, то $\frac{f(t)}{t}\risingdotseq\int\limits_p^{\infty}F(p)dp$. Оскільки $e^{-\alpha t}\sin t\risingdotseq\frac{1}{(p+\alpha)^2+1}$, то

$$\frac{e^{-\alpha t}\sin t}{t} \risingdotseq \int_p^{\infty} \frac{dp}{\left(p+\alpha\right)^2+1}.$$

Обчислимо невласний інтеграл, що стоїть справа.

$$\int_p^{\infty} \frac{dp}{\left(p+\alpha\right)^2+1} = \lim_{B\to\infty} \int_p^{B} \frac{dp}{\left(p+\alpha\right)^2+1} = \lim_{B\to\infty} \operatorname{arctg}\left(p+\alpha\right)\Big|_p^B =$$

$$= \lim_{B\to\infty}\Big(\operatorname{arctg}\left(B+\alpha\right) - \operatorname{arctg}\left(p+\alpha\right)\Big) = \lim_{B\to\infty} \operatorname{arctg} \frac{B+\alpha-p-\alpha}{1+\left(B+\alpha\right)\left(p+\alpha\right)} =$$

$$= \lim_{B\to\infty} \operatorname{arctg} \frac{B-p}{1+\left(B+\alpha\right)\left(p+\alpha\right)} = \operatorname{arctg}\frac{1}{p+\alpha}.$$

Отже, $\dfrac{e^{-\alpha t}\sin t}{t} \risingdotseq \operatorname{arctg}\dfrac{1}{p+\alpha}$.

Задача 2. Знайти оригінал $f\left(t\right)$ за його зображенням $F\left(p\right)$.

1) $F\left(p\right) = \dfrac{1}{p\left(p-1\right)\left(p^2+4\right)}$; 2) $F\left(p\right) = \dfrac{1}{\left(p+1\right)\left(p+2\right)^2}$;

3) $F\left(p\right) = \dfrac{p^2 e^{-2p}}{p^3+1}$; 4) $F\left(p\right) = \dfrac{p^2+p+1}{\left(p-1\right)\left(p+1\right)^2}$.

Розв'язання.

1) Розкладемо $F\left(p\right)$ на суму простих дробів.

$$F\left(p\right) = \frac{1}{p\left(p-1\right)\left(p^2+4\right)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{Cp+D}{p^2+4}.$$

Знайшовши коефіцієнти A, B, C, D, маємо:

$$F\left(p\right) = -\frac{1}{p} + \frac{1}{5}\frac{1}{p-1} + \frac{1}{5}\frac{4p-1}{p^2+4}.$$

Далі перетворимо отриманий вираз на суму таких дробів, оригінали яких відомі:

$$F\left(p\right) = -\frac{1}{p} + \frac{1}{5}\frac{1}{p-1} + \frac{4}{5}\frac{p}{p^2+2^2} - \frac{1}{10}\frac{2}{p^2+2^2} \risingdotseq -1 + \frac{1}{5}e^t + \frac{4}{5}\cos 2t - \frac{1}{10}\sin 2t.$$

2) Застосуємо теорему множення: якщо $F_1(p) \risingdotseq f_1(t)$, $F_2(p) \risingdotseq f_2(t)$, то $F_1(p)\cdot F_2(p) \risingdotseq f_1(t) * f_2(t) = \int\limits_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau)\,d\tau$.

$$\frac{1}{p+1} \risingdotseq e^{-t}, \quad \frac{1}{(p+2)^2} \risingdotseq te^{-2t}.$$

$$\frac{1}{(p+1)(p+2)} \risingdotseq e^{-t} * te^{-2t} = \int\limits_0^t e^{-(t-\tau)} \tau e^{-2\tau} d\tau = e^{-t}\int\limits_0^t \tau e^{-\tau} d\tau =$$

$$= e^{-t}\left(-\tau e^{-\tau}\Big|_0^t + \int\limits_0^t e^{-\tau} d\tau \right) = e^{-t}\left(-te^{-t} - e^{-\tau}\Big|_0^t \right) = e^{-t}\left(-te^{-t} - e^{-t} + 1 \right) =$$

$$= e^{-t} - e^{-2t}(t+1).$$

Отже, $\dfrac{1}{(p+1)(p+2)^2} \risingdotseq e^{-t} - e^{-2t}(t+1)$.

3) Знайдемо оригінал для дробу $\dfrac{p^2}{p^3+1}$, попередньо розклавши його на суму найпростіших дробів.

$$\frac{p^2}{p^3+1} = \frac{p^2}{(p+1)(p^2-p+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{p+1} + \frac{2p-1}{p^2-p+1} \right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{p+1} + 2\frac{p-\frac{1}{2}}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \right) \risingdotseq \frac{1}{3}\left(e^{-t} + 2e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t \right).$$

Далі, за теоремою запізнювання при $\tau = 2$ маємо:

$\dfrac{p^2 e^{-2p}}{p^3+1} \risingdotseq \dfrac{1}{3}\left(e^{-(t-2)} + 2e^{\frac{t-2}{2}}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}(t-2) \right)\eta(t-2)$, де $\eta(t)$ – одинична функція Хевісайда.

4) Використаємо другу теорему розкладання, згідно з якою $f(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} res\left[F(p)e^{pt}, p_k \right]$, де $F(p)$– однозначна функція, яка має скінченне число особливих точок $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Знаходимо особливі точки функції $F(p)$. Вона має два полюси: $p=1$ – полюс першого порядку, $p=-1$ – полюс другого порядку.

Знаходимо лишки функції $F(p)e^{pt}$ у цих точках.

$$\operatorname*{res}_{p=1}\left[\frac{p^2+p+1}{(p-1)(p+1)^2}e^{pt}\right]=\lim_{p\to1}\left[\frac{(p^2+p+1)(p-1)}{(p-1)(p+1)^2}e^{pt}\right]=\frac{3}{4}e^t.$$

$$\operatorname*{res}_{p=-1}\left[\frac{p^2+p+1}{(p-1)(p+1)^2}e^{pt}\right]=\lim_{p\to-1}\frac{d}{dp}\left[\frac{(p^2+p+1)(p+1)^2}{(p-1)(p+1)^2}e^{pt}\right]=$$

$$\lim_{p\to-1}\frac{d}{dp}\left[\frac{p^2+p+1}{p-1}e^{pt}\right]=\frac{e^{-t}}{4}-\frac{te^{-t}}{2}.$$

Тоді $f(t)=\operatorname*{res}_{p=1}\left[F(p)e^{pt}\right]+\operatorname*{res}_{p=-1}\left[F(p)e^{pt}\right]$, отже

$$\frac{e^{-2p}}{(p^2+1)^2}\risingdotseq\frac{3e^t}{4}+\frac{e^{-t}}{4}-\frac{te^{-t}}{2}.$$

Задача 3. Розв’язати диференціальні рівняння операційним методом.

1) $x'+2x=\sin t$, $x(0)=0$; 2) $x''-2x'+x=e^t$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$.

Розв’язання.

1) Нехай $x(t)\risingdotseq X(p)$. Тоді $x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)$. Зображення правої частини диференціального рівняння: $\sin t\risingdotseq\dfrac{1}{p^2+1}$.

Складаємо операторне рівняння і розв’язуємо його.

$$pX(p)+2X(p)=\frac{1}{p^2+1},$$

$$(p+2)X(p)=\frac{1}{p^2+1},$$

$$X(p)=\frac{1}{(p^2+1)(p+2)}.$$

Для того, щоб знайти оригінал розкладемо $X(p)$ на суму простих дробів.

$$\frac{1}{(p^2+1)(p+2)}=\frac{Ap+B}{p^2+1}+\frac{C}{p+2}.$$

Прирівнявши коефіцієнти при відповідних степенях, отримаємо $A=-\frac{1}{5}$, $B=\frac{2}{5}$, $C=\frac{1}{5}$.

Отже,

$$\frac{1}{\left(p^2+1\right)\left(p+2\right)}=-\frac{1}{5}\frac{p}{p^2+1}+\frac{2}{5}\frac{1}{p^2+1}+\frac{1}{5}\frac{1}{p+2}.$$

Таким чином, розв'язок даного диференціального рівняння:

$$x(t)=-\frac{1}{5}\cos t+\frac{2}{5}\sin t+\frac{1}{5}e^{-2t}=\frac{1}{5}\left(e^{-2t}-\cos t+2\sin t\right).$$

2) Нехай $x(t)\risingdotseq X(p)$. Тоді

$$x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p),$$

$$x''(t)\risingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)-1.$$

Зображення правої частини даного рівняння $e^t\risingdotseq\frac{1}{p-1}$.

Складемо операторне рівняння:

$$p^2X(p)-1-2pX(p)+X(p)=\frac{1}{p-1},$$

$$\left(p^2-2p+1\right)X(p)=\frac{1}{p-1}+1,$$

$$\left(p-1\right)^2X(p)=\frac{1}{p-1}+1,$$

$$X(p)=\frac{1}{\left(p-1\right)^3}+\frac{1}{\left(p-1\right)^2}.$$

Запишемо $X(p)$ у такому вигляді, щоб були відомі оригінали доданків:

$$X(p)=\frac{1}{2}\frac{2!}{\left(p-1\right)^{2+1}}+\frac{1}{\left(p-1\right)^{1+1}}.$$

Знайдемо оригінал, скориставшись таблицею основних зображень:

$$x(t)=\frac{1}{2}t^2e^t+te^t=\frac{te^t}{2}\left(t+2\right).$$

ЗАДАЧІ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ І ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

28) Знайти зображення заданих функцій:

1) $f(t)=t+\frac{1}{2}e^{-t}$; 2) $f(t)=2\sin t-\cos t$; 3) $f(t)=\sin^2 t$; 4) $f(t)=\cos^3 t$;

5) $f(t)=e^t\,\mathrm{sh}\,t$; 6) $f(t)=e^{-t}t^3$; 7) $f(t)=e^{3t}\sin^2 t$; 8) $f(t)=e^{-\alpha t}\cos^2\beta t$;

9) $f(t)=\cos^2(t-b)\eta(t-b)$; 10) $f(t)=e^{t-2}\eta(t-2)$; 11) $f(t)=t\cos\omega t$;

12) $f(t)=te^{4t}$; 13) $f(t)=t\left(e^{t}+\operatorname{ch}t\right)$; 14) $f(t)=(t+1)\sin 2t$;

15) $f(t)=\dfrac{e^{t}-1}{t}$; 16) $f(t)=\dfrac{\sin^{2}t}{t}$; 17) $f(t)=\dfrac{1-\cos t}{t}$.

29) Знайти оригінали за їх зображеннями:

1) $F(p)=\dfrac{1}{p^{2}+4p+5}$; 2) $F(p)=\dfrac{p}{\left(p^{2}+1\right)^{2}}$; 3) $F(p)=\dfrac{1}{p+2p^{2}+p^{3}}$;

4) $F(p)=\dfrac{2p^{3}+p^{2}+2p+2}{p^{5}+2p^{4}+2p^{3}}$; 5) $F(p)=\dfrac{1}{p^{2}\left(p^{2}+1\right)}$; 6) $F(p)=\dfrac{p}{p^{3}+1}$;

7) $F(p)=\dfrac{2p+3}{p^{3}+4p^{2}+5p}$; 8) $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)^{2}(p+2)}$; 9) $F(p)=\dfrac{3p^{2}}{\left(p^{2}-1\right)^{2}}$;

10) $F(p)=\dfrac{pe^{-4p}}{p^{2}+1}$; 11) $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p(p-1)}$; 12) $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p^{2}-1}+\dfrac{pe^{-2p}}{p^{2}-4}$.

30) Розв’язати диференціальні рівняння операційним методом:

1) $x''+x=\dfrac{1}{1+\sin^{2}t}$, $x(0)=x'(0)=0$; 2) $2x''+3x'+x=3e^{t}$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$;

3) $x''+x=\dfrac{1}{1+\cos^{2}t}$, $x(0)=x'(0)=0$; 4) $x''-x'-12x=10$, $x(0)=x'(0)=0$;

5) $x''+5x'=29\cos t$, $x(0)=-1$, $x'(0)=0$; 6) $x''+x=\operatorname{tg}t$, $x(0)=x'(0)=0$;

7) $x''+4x'+4x=\dfrac{e^{-2t}}{\cos^{2}t}$, $x(0)=x'(0)=0$; 8) $x''+4x=2\sin 2t$, $x(0)=-1$, $x'(0)=0$.

ТИПОВІ ЗАВДАННЯ НА ДРУГИЙ МОДУЛЬНИЙ КОНТРОЛЬ

ВАРІАНТ І

1. Функцію $f(z)=\dfrac{z}{z^2-2z+5}$ розкласти в степеневий ряд за степенями $z-1$ і знайти радіус збіжності.
2. Знайти порядки всіх нулів функції $e^{\frac{1}{z}}-1$.
3. Обчислити лишки функції $f(z)=\sin z\cdot\sin\dfrac{1}{z}$ в усіх особливих точках.
4. Обчислити $\int\limits_C \dfrac{z^2+1}{z^2\left(z^2-2\right)}dz$, $C=\left\{z:|z+1|+|z-1|=6\right\}$.
5. Обчислити $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{x^2\cos x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$.

ВАРІАНТ ІІ

1. Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z)=z^2\exp\left\{\dfrac{1}{z-1}\right\}$ в околі точки $z_0=1$.
2. Знайти всі нулі функції та встановити їх порядок: $f(z)=\cos z\,\mathrm{ch}\,z$.
3. Обчислити $\operatorname*{res}\limits_{\infty}\dfrac{\cos^2\frac{\pi}{z}}{z+1}$.
4. Обчислити $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{d\varphi}{1-4\cos\varphi+4}$.
5. Обчислити $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{x^3\sin ax}{\left(1+x^2\right)^2}dx$.

ВАРІАНТ ІІІ

1. Розкласти в ряд Тейлора в околі точки $z_0=0$ функцію $f(z)=\sin^4 z+\cos^4 z$.
2. Знайти нулі функції і визначити їх порядок: $f(z)=\dfrac{\left(z^2-z-2\right)^3}{1+\cos\pi z}$.
3. Обчислити лишки в усіх ізольованих особливих точках: $f(z)=\cos\dfrac{z^2+4z-1}{z+3}$.

4. Обчислити $\int\limits_{\Gamma} \frac{z^2}{\sin^3 z \cos z} dz$, $\Gamma = \{z : |z| = 1\}$.

5. Обчислити $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx$.

ВАРІАНТ IV

1. Знайти область збіжності ряду Лорана: $2\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{2n}} - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$.

2. Функцію $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$ розвинути в степеневий ряд в околі точки $z_0 = 0$.

3. Обчислити лишки в усіх особливих точках: $f(z) = \frac{\sin \frac{1}{z}}{z^2 + 4}$.

4. Обчислити $\int\limits_{C} \frac{ze^z}{z^3 - 3z + 2} dz$, $C = \{z : |z| = 3\}$.

5. Обчислити $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + \sin\varphi}$, $a > 1$.

ВАРІАНТ V

1. Розвинути в ряд Тейлора в околі точки $z_0 = -1$ функцію $f(z) = \frac{z}{(z^2+1)(z^2-1)}$.

2. Знайти всі нулі функції та встановити їх порядок: $f(z) = z\,\mathrm{tg}^2 z$.

3. Обчислити лишки функції в усіх особливих точках: $f(z) = z \cos\frac{1}{z-5}$.

4. Обчислити $\int\limits_{C} z^2\, \mathrm{tg}\, \pi z dz$, $C = \{z : |z| = 1\}$.

5. Обчислити $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2 \cos x}{(x^2+1)^2} dx$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Александров И.А., Соболев В.В. Аналитические функции комплексного переменного. – М.: Высшая школа, 1984. – 186с.
2. Алешков Ю.З., Смышляев П.П. Теория функций комплексного переменного и ее приложения. – Л.:Изд-во Лен. ун-та, 1986. – 247с.
3. Волковысский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексной переменной. – М.: Наука, 1975. –320с.
4. Гольдберг А.А., Шеремета М.М., Заболоцький М.В., Спасків О.Б. Комплексний аналіз. – Львів: Афіша, 2008. – 203с.
5. Грищенко О.Ю., Нагнибіда М.І., Настасієв П.П.. Теорія функцій комплексної змінної. Розв’язування задач. – К.: Вища школа, 1994.– 375с.
6. Давидов Н.О. Елементи теорії функцій комплексної змінної. – К.: Рад. шк.., 1968. – 212с.
7. Ефграфов М.А. и др. Сборник задач по теории аналитических функций.– М.: Наука, 1972. – 415с.
8. Павлова Л.В., Редькіна О.І. Теорія аналітичних функцій. Збірник вправ.– К.: Вища школа, 1980.
9. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1984. – 432с.
10. Самойленко В.Г., Бородін В.А., Верьовкіна В.Г., Ловейкін А.В., Романенко І.Б. Комплексний аналіз. Приклади і задачі. – К.: Вид.-полігр. центр «Київський університет», 2010. – 224с.
11. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теорія функцій комплексного переменного. – М.:Наука, 1984. – 304с.
12. Фукс Б.А., Шабат Б.В. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. – М.: Наука, 1964. – 388с.
13. Шабат Б.В. Введение в комплексный аналіз: В 2 ч. – М.: Наука, 1976.– Ч.1. – 320с.

Поляк Іван Йосипович – кандидат фіз.-мат. наук,
Погоріляк Олександр Олександрович – кандидат фіз.-мат. наук.

ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

ЧАСТИНА II

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять
для студентів математичного факультету

Відповідальний за випуск: канд. фіз.-мат наук, доцент кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу Моца А.І.

Формат 60х84/16. Папір офс. Гарнітура Times.
Друк офс. Ум. друк. арк. 1,86. Обл.-вид. арк. 1,43.
Тираж 100 шт. Замовлення № 19.

Видавництво ФОП Бреза А.Е.
м. Ужгород, вул. Університетська, 21/220. Тел./факс: (0312) 64-37-22
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4090 від 15.06.2011р.
Друк: ПП Бреза, тел.: 050-43-22-437

Для нотаток

Для нотаток